ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Илларионова Андрея Анатольевича "Статистические свойства полиэдров Клейна и локальных минимумов решеток", представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

История теории непрерывных дробей и диофантовых приближений насчитывает уже четыре столетия. К числу её основателей принадлежат такие классики науки как Л. Эйлер, Ж. Л. Лагранж, К. Ф. Гаусс, Э. Галуа и П. Г. Лежён-Дирихле. За время её развития получены красивые и глубокие результаты, лежащие в основе многих математических теорем. Некоторые из них получены более ста лет назад, некоторые в середине XX века, некоторые докладываются на последних международных конференциях по теории чисел как в России, так и за рубежом.

Так еще Ж. Л. Лагранж в конце XVIII века и Э. Галуа в 1828 году доказали, что только квадратичные иррациональности имеют периодические непрерывные дроби и приведенные квадратичные иррациональности — чисто периодические непрерывные дроби. Уже эта теорема показывает, что исследование диофантовых приближений алгебраических чисел высших степеней относится к числу сложнейших математических проблем.

Существенное продвижение в построении алгоритмов вычисления основных единиц кубического поля были получены Г. Ф. Вороным в 1896 г. в его диссертации «Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей».

Одним из центральных объектов исследования в геометрии чисел, основанной в трудах Г. Ф. Вороного и Г. Минковского, является решётка, определение которой было введено К. Ф. Гауссом ещё в 1831 году в рецензии на работу Зеебера. В своей диссертации Г. Ф. Вороной ввёл плодотворное понятие относительного минимума, которое независимо рассматривал Г. Минковский под именем локальный минимум. Именно относительные минимумы решёток целых алгебраических чисел играют центральную роль в алгоритме Г. Ф. Вороного.

Другое важное применение решёток, относительных минимумов и алгебраических решеток связано с теоретико-числовым методом в приближенном анализе. В методе оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова играют центральную роль решётка решений линейного сравнения от нескольких переменных и параллелепипедальная сетка, состоящая из точек взаимной решётки, попавших в единичный s-мерный куб. В методе К. К. Фролова появляются алгебраические сетки и алгебраические решётки целых алгебраических чисел чисто-вещественных алгебраических полей. Наконец, оценки В. А. Быковского для гиперболической дзета-функции целочисленной решётки представляют

из себя сумму по относительным минимумам этой решётки. Принципиальное значение этих оценок заключается в том, что они с точностью до мультипликативной константы дают правильный порядок гиперболической дзета-функции целочисленной решётки.

В терминах решёток формулируются известные, до сих пор нерешённые проблемы Литлвуда и Оппенгейма, решение которых имеет фундаментальное значение для дальнейшего развития теоретико-числового метода в приближенном анализе.

Известно, что в этих вопросах важную роль играют паруса Скубенко, которые в разных модификациях использовались им и при решении гипотезы Минковского о последовательных минимумах, и при попытке доказать гипотезы Литлвуда и Оппенгейма.

Из других соображений, идя от геометрической интерпретации Ф. Клейна непрерывных дробей, получаем полиэдры Клейна. В последнее время сильные результаты в этой области были получены О. Н. Германом, которые, в частности, вошли в его докторскую диссертацию.

Всё перечисленное позволяет утверждать, что диссертация выполнена на **актуальную** тему.

Выделим **основные новые научные результаты**, полученные в диссертации А. А. Илларионова:

1. В первой главе доказаны правильные, с точностью до констант, зависящих от размерности, верхние оценки для максимального количества относительных минимумов целочисленных неполных решёток и максимального количества относительных минимумов неполных (нецелочисленных) решёток, лежащих в заданном кубе.

   Эти результаты важны для понимания оценок Быковского и построения алгоритмов вычисления минимального множества Быковского, то есть множества всех относительных минимумов целочисленной решётки.

2. Во второй главе изучен вопрос о количестве целочисленных точек на детерминантной поверхности.

   Эти результаты являются естественным развитием классических исследований Ю. В. Линника и Б. Ф. Скубенко, но непосредственно к ним не сводятся.

3. В третьей главе впервые изучено поведение в среднем количества локальных минимумов многомерных целочисленных решеток. А именно, получена асимптотическая формула для среднего числа локальных минимумов целочисленных многомерных решеток с фиксированным определителем.

   Тем самым доказано многомерное обобщение классической теоремы Хейльбронна о средней длине конечной непрерывной дроби в терминах относительных минимумов.

Этот результат показывает, что аналогия между непрерывными дробями и множеством относительных минимумов является глубокой и естественной.

4. В четвертой главе получены асимптотические формулы для среднего числа граней фиксированного типа и вершин полиэдров Клейна трехмерных целочисленных решеток фиксированного определителя.

   Это количественная форма структурной теоремы о строении полиэдров Клейна трехмерных целочисленных решёток. Естественно, что эти результаты открывают возможность дальнейших глубокий обобщений на высшие размерности.

5. В пятой главе выведены асимптотические формулы для среднего числа наилучших приближений линейных форм с рациональными коэффициентами и математического ожидания количества наилучших приближений форм с вещественными коэффициентами.

   Эти результаты имеют несомненную ценность для теории диофантовых приближений и для метрической теории чисел.

6. В заключительной шестой главе получена асимптотическая формула для среднее число локальных Ф-минимумов полных целочисленных s-мерных решеток Γ с растущим диапазоном изменения детерминанта решётки.

   В методе доказательства этого результата видна специфика относительных минимумов, которая отлична от случая цилиндрических минимумов.

По диссертации можно сделать следующее замечание. Иногда в тексте встречаются стилистические неточности, не имеющие принципиального значения.

Суммируя вышесказанное, считаю, что совокупность основных результатов диссертации — Статистические свойства полиэдров Клейна и локальных минимумов решеток — можно квалифицировать как новое крупное научное достижение.

Её результаты найдут применения в дальнейших исследованиях по геометрии чисел, диофантовым приближениям и теоретико-числовому методу в приближенном анализе, проводимых в МГУ имени М. В. Ломоносова, МПГУ, Математическом институте им. В. А. Стеклова, ТГПУ им. Л. Н. Толстого, в Хабаровском отделении ИПМ ДВО РАН и в других научных центрах Росси и зарубежом.

Автореферат, составленный с соблюдением установленных требований, в достаточной степени отражает содержание диссертации. Основные результаты выполненных исследований опубликованы в 16 научных работах, включая 12 публикаций из перечня ВАК РФ, доложены на 10 российских и международных конференциях.

Тематика и содержание диссертации Илларионова А. А. отвечает паспорту специальности “01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел” по формуле специальности и области исследования.

Диссертационная работа “Статистические свойства полиэдров Клейна и локальных минимумов решеток” Илларионова Андрея Анатольевича является научно квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в области геометрии чисел и аналитической теории чисел.

Диссертационная работа соответствует критериям “Положения о порядке присуждения ученых степеней”, которым должна удовлетворять диссертация на соискание ученой степени доктора наук.

Её автор, Илларионов Андрей Анатольевич, заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук, профессор
заведующий кафедрой алгебры,
математического анализа и геометрии ФГБОУ ВПО
"Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого" Н. М. Добровольский

Тула, 300026, пр. Ленина 125,
учебный корпус 4, кафедра алгебры,
математического анализа и геометрии
8(4872)357829,
email: dobrovol@tspu.tula.ru

30.09.2014

Подпись Н.М. Добровольского
Заверяю. Начальник отдела
делопроизводства и связи