Российская Академия наук

Математический институт им. В.А. Стеклова

На правах рукописи
УДК 511.331

КОРОЛЁВ Максим Александрович

Закон Грама в теории дзета-функции Римана

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2013

Оглавление

Введение 4
Дзета-функция Римана и её нули 4
Точки Грама 6
Функции $S(t)$ и $N(t)$ 8
Классификация законов Грама 9
Закон Грама в работах Сельберга 11
Предмет исследования 12
Обозначения 18

Глава 1. Моменты специальных тригонометрических полиномов 20

§ 1 Чётные моменты величины $V(t_n)$ 21
§ 2 Явные формулы для коэффициентов Φ_n 28
§ 3 Порядок роста коэффициентов Φ_n при $n \to +\infty$ 42
§ 4 Дробные моменты величины $V(t_n)$ 51
§ 5 Уточнение оценки остатка в формуле для первого момента . . 75

Глава 2. Поведение аргумента дзета-функции Римана в точках Грама 89

§ 1 Приближение функции $S(t)$ специальными тригонометрическими полиномами 93
§ 2 Моменты величин $|\Delta(n)|$ с целым показателем 105
§ 3 Моменты величин $|\Delta(n)|$ с дробным показателем 110
§ 4 Распределение величин $|\Delta(n)|$ 117

Глава 3. Формулы Сельберга и их следствия 130

§ 1 Первое доказательство формул Сельберга 132
§ 2 Второе доказательство формул Сельберга 136
§ 3 Третье доказательство формул Сельберга 142
§ 4 Поведение разностей $t_n - \gamma_n$ 147
§ 5 Аргумент дзета-функции Римана в точках разрыва 151
§ 6 Промежутки Грама с аномальным числом ординат нулей $\zeta(s)$ 168
§ 7 Новый эквивалент «почти» гипотезы Римана 175

Глава 4. Порядок роста величин $\boldsymbol{\Delta_n}$ 180

§ 1 O - и Ω - теоремы для Δ_n 181
§ 2 Значения, которые принимает величина Δ_n 189

Глава 5. Соседние ординаты, не подчиняющиеся закону Грама 202

§ 1 Большие расстояния между соседними ординатами нулей $\zeta(s)$ 204
§ 2 Распределение знаков в наборах $(\Delta_n, \dots, \Delta_{n+s-1})$ 207
§ 3 Распределение произведений $\Delta_n \dots \Delta_{n+s-1}$ 213

Глава 6. Значения функции $\boldsymbol{\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)}$ в точках Грама 236

§ 1 Верхняя оценка $\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$ 240
§ 2 Основные теоремы 246

Приложение I. Вспомогательные утверждения 254

Приложение II. Фрагменты работ Грама, Хатчинсона, Титчмарша и Сельберга 263

Й.-П. Грам, «О нулях функции Римана $\zeta(s)$» 263
Дж.И. Хатчинсон, «О корнях дзета-функции Римана» 272
Э.Ч. Титчмарш, «Нули дзета-функции Римана» 274
А. Сельберг, «Дзета-функция и гипотеза Римана» 276

Приложение III. Таблицы 280

Статистика нарушений правила Грама 280
Соседние члены последовательности Δ_n, отличные от нуля . . 281
Маленькие значения $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ в точках Грама 285
Дискретный момент дзета-функции Римана 288

Литература 290

Введение

Светлой памяти моего Учителя
Анатолия Алексеевича Карацубы

Дзета-функция Римана и её нули

Для комплексного числа $s = \sigma + it$ с условием $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ определяется как сумма бесконечного ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Дзета-функцию ввёл в математику Леонард Эйлер. В своих рассуждениях он впервые использовал (при вещественных $s > 1$) тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \;=\; \prod_{p} \left(1 \;-\; \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{1}$$

теперь носящее его имя[1)]. Дзета-функцию как функцию комплексного переменного первым стал изучать Бернхардт Риман.

Правее единичной прямой $\operatorname{Re} s = 1$ справедливо равенство

$$\zeta(s) \;=\; \frac{s}{s-1} \;-\; s \int_1^{\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\, du, \tag{2}$$

в котором через $\{u\}$ обозначена дробная доля u. Так как несобственный интеграл в (2) сходится при любом s с положительной вещественной частью, то с помощью этого равенства дзета-функция мероморфно продолжается в область $0 < \operatorname{Re} s \leqslant 1$.

Для продолжения $\zeta(s)$ на всю комплексную плоскость рассматривают функцию

$$\xi(s) \;=\; s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

которая называется кси-функцией Римана. Определённая при $\operatorname{Re} s > 1$, кси-функция допускает в этой области представление

$$\xi(s) \;=\; 1 \;+\; s(s-1)\int_1^{\infty} \left(x^{\,s/2-1} \;+\; x^{-(s+1)/2}\right)\omega(x)\, dx, \tag{3}$$

[1)] В правой части (1) стоит бесконечное произведение по всем подряд идущим простым числам.

в котором $\omega(x)$ обозначает сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

Так как несобственный интеграл в (3) сходится при любых s, то кси-функция, а вместе с нею - и $\zeta(s)$, продолжаются на всю комплексную плоскость. Из (3) следует, что

$$\xi(s) \;=\; \xi(1-s). \tag{4}$$

Равенство (4) называется функциональным уравнением дзета-функции Римана.

Кси-функция Римана является целой функцией первого порядка и разлагается в бесконечное произведение Вейерштрасса вида

$$\xi(s) \;=\; e^{as} \prod_{\varrho} \left(1 \;-\; \frac{s}{\varrho}\right) e^{s/\varrho}, \tag{5}$$

где ϱ обозначает нули $\xi(s)$, $a = \log 2\sqrt{\pi} - 1 - \frac{1}{2}E = -0.023\,095\,708...$, E - постоянная Эйлера[2)].

Из равенства (5) и свойств гамма-функции следует, что и $\zeta(s)$ имеет бесконечно много нулей. Ими будут, во-первых, «нетривиальные» нули, совпадающие с нулями ϱ кси-функции Римана, и, во-вторых, «тривиальные» нули в точках $s = -2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, совпадающие с полюсами выражения $s\Gamma(s/2)$. Полагая $s = \varrho$ в (4) и замечая, что $\overline{\xi}(s) = \xi(\overline{s})$, заключаем, что вместе с числом ϱ нулями $\zeta(s)$ будут также и величины $1 - \varrho$, $\overline{\varrho}$ и $1 - \overline{\varrho}$. Иными словами, нетривиальные нули дзета-функции расположены симметрично относительно вещественной оси и прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Известно, что все нетривиальные нули дзета-функции Римана лежат в вертикальной полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1$, которая называется в теории $\zeta(s)$ критической полосой. Можно показать, что правая часть (2) отрицательна при $0 < s < 1$, и что $\xi(0) = 1 \neq 0$. Поэтому все нули $\zeta(s)$, лежащие в критической полосе, являются комплексными.

Нули ϱ, лежащие в верхней полуплоскости, нумеруются в порядке возрастания их ординат, а в случае совпадения ординат - произвольным образом:

$$\varrho_n = \beta_n + i\gamma_n, \quad 0 \leqslant \beta_n \leqslant 1, \quad 0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \ldots \leqslant \gamma_n \leqslant \gamma_{n+1} \leqslant \ldots \quad n = 1, 2, 3, ...^{3)}\ .$$

Гипотеза Римана утверждает, что все нули ϱ_n лежат на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, которая называется критической прямой. Эта гипотеза в настоящее время не доказана и не опровергнута. В то же время известно, что на критической прямой лежит положительная доля всех нетривиальных нулей $\zeta(s)$. Положительные ординаты таких нулей, также упорядоченные по возрастанию, обозначаются через $\mathfrak{c}_n$[4)].

[2)] В математической литературе постоянную Эйлера принято обозначать через γ; в настоящей работе мы отступаем от этой традиции, поскольку символом γ в дальнейшем обозначаются ординаты нулей дзета-функции Римана, для которых это обозначение также является общепринятым.

[3)] Наличие строгих и нестрогих неравенств отражает тот факт, что все нули $\zeta(s)$, приближённые значения которых известны в настоящее время, являются простыми, однако не доказано, что дзета-функция не имеет кратных нулей.

[4)] Это обозначение не является общепринятым. Несложно видеть, что $\gamma_n \leqslant \mathfrak{c}_n$; если гипотеза Римана верна, то $\mathfrak{c}_n = \gamma_n$ при любом n.

Знаменитый мемуар Римана «О числе простых чисел, не превышающих данной величины» [1] вызвал к жизни ряд новых направлений в теории чисел и теории функций комплексного переменного, в числе которых - исследования, связанные с вычислением комплексных нулей ϱ_n дзета-функции.

Хотя ординаты первых трёх таких нулей были приближённо найдены самим Риманом с помощью созданного им мощного метода, факт этот стал известен лишь после публикации Карла Людвига Зигеля [2] (1932 г.), в которой он восстановил ход рассуждений Римана, основываясь на его черновиках. Первой же публикацией на эту тему следует, по-видимому, считать статью датского математика Йоргена Педерсена Грама [3] (1895 г.), в которой он привёл следующие приближённые значения первых трёх ординат:

$$\gamma_1 = 14.135, \quad \gamma_2 = 20.82, \quad \gamma_3 = 25.1.$$

Использованный Грамом метод был достаточно трудоёмок и практически непригоден для дальнейших исследований. Последующие многолетние поиски привели Грама к открытию осенью 1902 г. иного, более совершенного способа приближённого вычисления нулей $\zeta(s)$.

Точки Грама

Для положительного t через $\vartheta(t)$ обозначим приращение, которое получает непрерывная ветвь аргумента функции $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ при изменении s вдоль отрезка, соединяющего точки $s = \frac{1}{2}$ и $s = \frac{1}{2} + it$. Тогда уравнение (4) приводит к равенству

$$e^{i\,\vartheta(t)}\zeta\big(\tfrac{1}{2} + it\big) = e^{-i\,\vartheta(t)}\zeta\big(\tfrac{1}{2} - it\big),$$

которое означает, что функция

$$Z(t) = e^{i\,\vartheta(t)}\zeta\big(\tfrac{1}{2} + it\big)$$

вещественна при вещественных t, а её вещественные нули совпадают с ординатами нулей $\zeta(s)$, лежащих на критической прямой.

В основу метода Грама [4] легло следующее простое соображение. Пусть $A(t)$ и $B(t)$ - вещественная и мнимая части функции $\zeta\big(\frac{1}{2} + it\big)$. Тогда

$$\zeta\big(\tfrac{1}{2} + it\big) = e^{-i\,\vartheta(t)}Z(t) = Z(t)\big(\cos\vartheta(t) - i\sin\vartheta(t)\big),$$

откуда $A(t) = Z(t)\cos\vartheta(t)$, $B(t) = -Z(t)\sin\vartheta(t)$. Рассмотрим те значения t, при которых $B(t)$ обращается в нуль. Ими будут, во-первых, вещественные корни функции $Z(t)$, совпадающие, очевидно, с ординатами $\mathfrak{c}_n$ тех нулей $\zeta(s)$, что лежат на критической прямой. Во-вторых, ими будут корни уравнения $\sin\vartheta(t) = 0$, то есть такие t, при которых $\vartheta(t)$ принимает значения, кратные π (см. рис. 1).

Можно показать, что функция $\vartheta(t)$ неограничена сверху и монотонно возрастает при $t > t^* = 6.289836\ldots$, причём $\vartheta(t^*) = -3.530573\ldots$. Поэтому при любом $n \geqslant 0$ уравнение $\vartheta(t) = (n-1)\pi$ имеет на промежутке $t > t^*$ единственное решение t_n.

Таким образом, величина $\zeta\big(\frac{1}{2} + it_n\big)$ оказывается вещественным числом, причём

$$\zeta\big(\tfrac{1}{2} + it_n\big) = A(t_n) = Z(t_n)\cos\pi(n-1) = (-1)^{n-1}Z(t_n).$$

Допустим теперь, что в соседних точках t_{n-1} и t_n функция $A(t)$ принимает значения одного знака. Тогда величины $Z(t_{n-1})$ и $Z(t_n)$ будут иметь противоположные знаки, что возможно лишь в случае, когда $Z(t)$ обращается в нуль между точками t_{n-1} и t_n нечётное число раз.

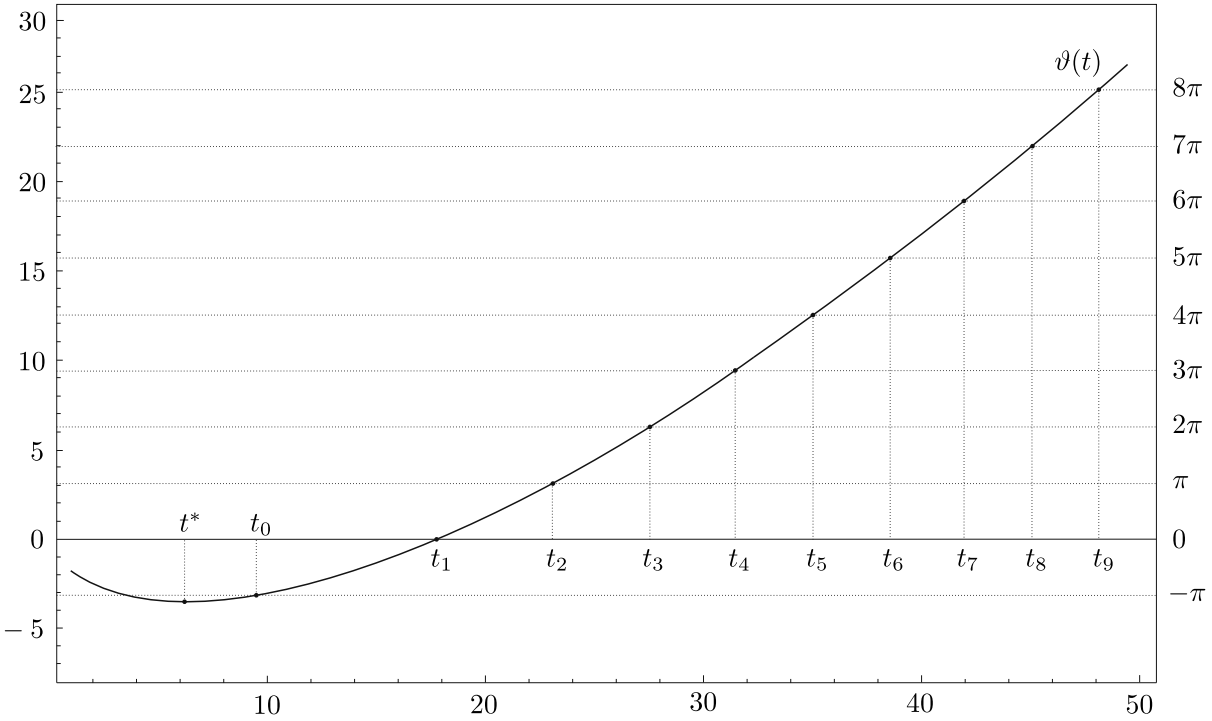


Рис. 1. Точки Грама являются абсциссами точек пересечения графика функции $y = \vartheta(t)$ с горизонтальными прямыми $y = m\pi$, $m = -1, 0, 1, 2 \ldots$.

Убедившись с помощью формулы суммирования Эйлера-Маклорена в выполнении неравенства $A(t_n) > 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots, 15$, Грам смог доказать, что все нули $\zeta(s)$, ординаты которых положительны и не превосходят 66, лежат на критической прямой, и нашёл весьма точные приближения для величин $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{15}$.

Таким образом Грам обнаружил, что каждый из промежутков $G_n = (t_{n-1}, t_n]$, $n = 1, 2, \ldots, 15$, содержит ровно один нуль $Z(t)$, причём $t_{n-1} < \mathfrak{c}_n < t_n$. По поводу этой закономерности Грам высказал в [4] следующее суждение. "*Для значений* t_n[5] *в интервале от* 10 *до* 65 *величина* $A(t_n)$ *всегда оказывается положительной. По всей видимости, и сама функция* $A(t)$ *остаётся положительной на большей части этого промежутка. Без сомнения, причина этого явления заключается в том, что первое слагаемое суммы* $\sum_1^n n^{-1/2} \cos(t \log n)$, *равное единице, приводит к преобладанию положительных членов* (над отрицательными - *М.К.*). *Но если это так, то эта закономерность во взаимном расположении чисел* $\mathfrak{c}_n$ *и* t_n *сохранится и для корней* $\mathfrak{c}$, *близких к* $\mathfrak{c}_{15}$ *и следующих за ним, до тех пор, пока мало-помалу не будет восстановлено равновесие.*"

[5] Во избежание недоразумений и излишних пояснений при цитировании статьи Грама используются обозначения, принятые в настоящей работе. С переводом фрагмента статьи Грама можно ознакомиться в Приложении II.

Величины t_n, называемые теперь точками Грама, образуют монотонно возрастающую неограниченную последовательность. Асимптотическое разложение

$$\vartheta(t) \sim \frac{t}{2}\log\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n}\,2n(2n-1)}\,(-1)^{n+1}B_{2n}\,t^{-(2n-1)},$$

где B_{2n} - числа Бернулли ($B_2=\frac{1}{6}$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $B_6=\frac{1}{42}$, $B_8=-\frac{1}{30}$, $B_{10}=\frac{5}{66}$ и т. д.; см. [5]), позволяет вычислять величины t_n с любой заданной степенью точности. В частности, можно показать, что

$$t_n=\frac{2\pi n}{\log n}\left(1+\frac{\log\log n}{\log n}\big(1+o(1)\big)\right),\quad t_{n+1}-t_n=\frac{2\pi}{\log n}\left(1+\frac{\log\log n}{\log n}\big(1+o(1)\big)\right)$$

при $n\to+\infty$. Так как при переходе от n к $n+1$ величина $\log n$ изменяется очень слабо, то из последнего соотношения следует, что точки Грама образуют на вещественной оси «почти равномерную» сетку.

Функции $S(t)$ и $N(t)$

Введём ещё несколько понятий, необходимых для дальнейшего. При t, отличном от ординаты нуля $\zeta(s)$, величину

$$S(t)=\frac{1}{\pi}\arg\zeta\big(\tfrac{1}{2}+it\big)$$

положим равной приращению непрерывной ветви $\pi^{-1}\arg\zeta(s)$ вдоль ломаной линии, соединяющей точки 2, $2+it$ и $\frac{1}{2}+it$. В противном случае положим

$$S(t)=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\big(S(t+h)+S(t-h)\big).$$

Так определённая функция $S(t)$ называется аргументом дзета-функции Римана на критической прямой.

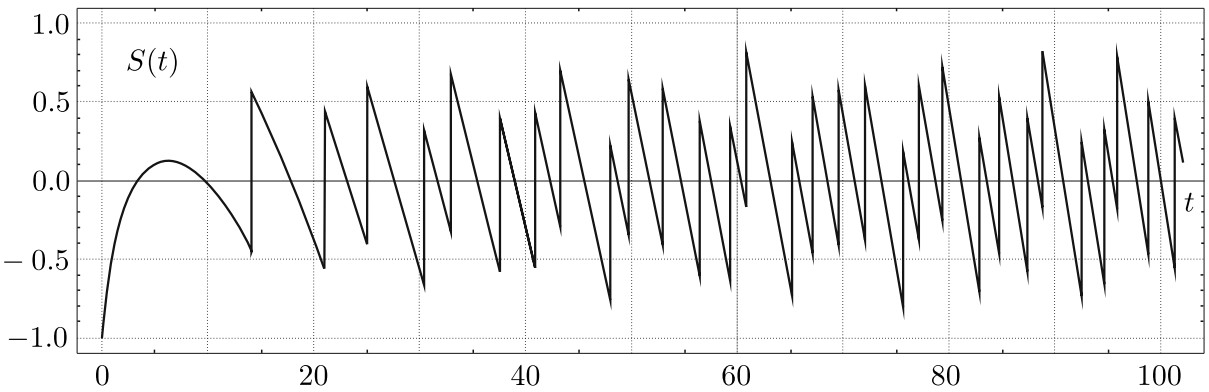


Рис. 2. График функции $S(t)$. Вертикальные отрезки графика отвечают скачкам $S(t)$ в точках разрыва, которые совпадают с ординатами комплексных нулей $\zeta(s)$.

Далее, через $N(t)$ обозначим число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 < \operatorname{Im} s \leqslant t$, $0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1$, с той лишь оговоркой, что в точках разрыва (совпадающих, очевидно, с ординатами γ_n) величина $N(t)$ определяется как полусумма пределов своих значений справа и слева:

$$N(t) = \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \bigl(N(t+h) + N(t-h) \bigr).$$

Функции $N(t), \vartheta(t)$ и $S(t)$ связаны равенством

$$N(t) = \frac{1}{\pi}\, \vartheta(t) + 1 + S(t),$$

которое называется формулой Римана-Мангольдта (см., например, [6]). Из этой формулы и классической оценки $S(t) = O(\log t)$, принадлежащей Дж. И. Литтлвуду [7], следует, что количества точек Грама t_n и ординат γ_n, попавших на промежуток $(0, T]$, совпадают с точностью до слагаемого $O(\log T)$ с величиной

$$\frac{1}{\pi}\, \vartheta(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} - \frac{1}{8} + O\Bigl(\frac{1}{T}\Bigr).$$

Таким образом, с ростом n величины t_n асимптотически ведут себя как ординаты нулей дзета-функции Римана: $t_n \sim \gamma_n$.

Наличие такой связи между просто устроенной последовательностью точек Грама, с одной стороны, и с трудно поддающимися изучению нулями $\zeta(s)$, с другой стороны, вызвало интерес к обнаруженной Грамом закономерности.

Классификация законов Грама

Понятие «закон Грама» впервые появилось в работе Дж.И. Хатчинсона [8] (1925 г.), который подразумевал под ним свойство соседних нулей $\mathfrak{c}_n$ и $\mathfrak{c}_{n+1}$ функции Харди быть отделёнными друг от друга точкой Грама t_n. Желая подтвердить приведённое выше предположение Грама о том, что найденная им закономерность рано или поздно нарушится, Хатчинсон предпринял вычисление нулей $\zeta(s)$ в более широком, чем Грам, диапазоне, и обнаружил в итоге два значения n, этой закономерности не подчиняющиеся, а именно $n = 127$ и $n = 135$, когда

$$t_{127} < \gamma_{127} < \gamma_{128} < t_{128}, \quad t_{134} < \gamma_{135} < \gamma_{136} < t_{135}.$$

Десять лет спустя вычисления Хатчинсона были продолжены Э.Ч. Титчмаршем и Л.Дж. Комри с применением счётных машин «Брунсвига», «Холлерит» и «Нейшенел». В ходе этих вычислений, результаты которых изложены в статьях [9],[10], были обнаружены новые исключения из закона Грама, доля которых в общем числе изученных случаев не превышала 4.5%[6)].

Помимо численных данных, статья [9] содержала и первые теоретические результаты, относящиеся к закону Грама. Во-первых, Титчмарш доказал, что последовательность номеров n, для которых нарушено неравенство $A(t_n) > 0$ и первые

[6)] Сам Титчмарш упоминает о 43 исключениях, встретившихся при вычислении 1041 нуля $Z(t)$ на промежутке $0 < t \leqslant 1468$. В действительности между $t = 0$ и $t = 1468$ имеется 1042 нуля функции Харди, 1041 точка Грама t_n и 45 значений n, для которых $(-1)^{n-1} Z(t_n) < 0$.

два члена которой были обнаружены Хатчинсоном, является неограниченной. Во-вторых, Титчмарш установил, что неограниченной является и последовательность дробей

$$\tau_n = \frac{\mathfrak{c}_n - t_n}{t_{n+1} - t_n}. \tag{6}$$

Отсюда сразу следовало, что для бесконечно многих n нуль $\mathfrak{c}_n$ функции Харди не попадает в «свой» промежуток Грама $G_n = (t_{n-1}, t_n]$.

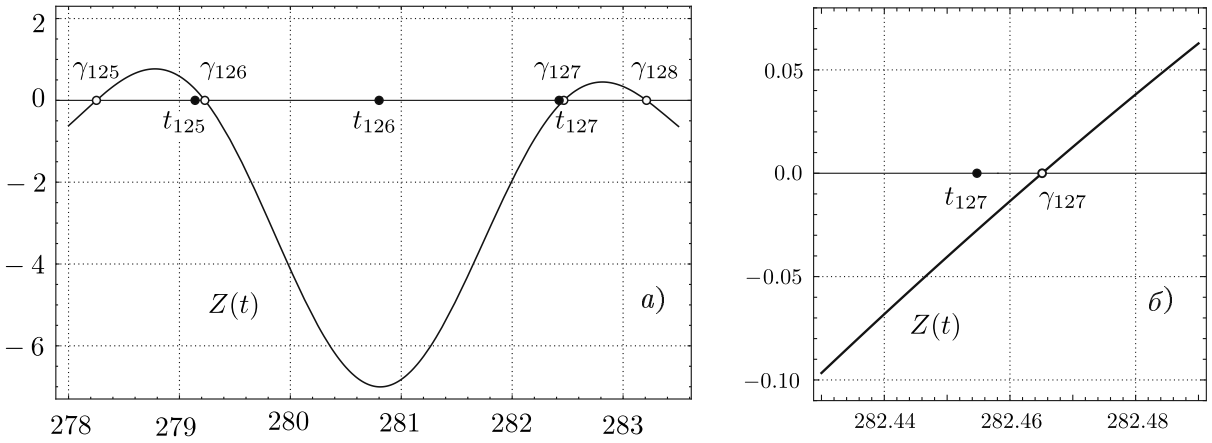


Рис. 3. График функции Харди $Z(t)$ вблизи точки t_{127}, отвечающей первому исключению из закона Грама, обнаруженному Дж.И. Хатчинсоном; промежуток $G_{127} = (t_{126}, t_{127}]$ не содержит ни одной ординаты.

Закономерность, допускающая бесконечно много исключений, не может, строго говоря, называться законом. Тем не менее, понятие «закон Грама» стало использоваться достаточно широко, правда, в различных смыслах. Так, ряд авторов подразумевает под ним свойство промежутка Грама $G_n = (t_{n-1}, t_n]$ содержать ровно один нуль функции Харди $Z(t)$. Вместе с этим рассматривается и «ослабленный закон Грама», выполнение которого отвечает наличию на промежутке G_n нечётного числа нулей $Z(t)$. Известно, что каждая из этих разновидностей закона Грама нарушается для положительной доли промежутков G_n. Ослабленный закон Грама выполняется в положительной доле случаев, но в то же время неизвестно даже, конечно или нет число промежутков Грама, содержащих ровно один нуль функции $Z(t)$[7)]. Ещё более сложным оказывается задача описания множества тех нулей $\mathfrak{c}_n$ функции Харди, каждый из которых попадает в «свой» промежуток Грама G_n[8)].

Ввиду такого разнообразия формальных описаний закономерности, подмеченной Грамом на небольшом количестве численных примеров, название «закон Грама» уместно относить ко всякому вообще утверждению о взаимном расположении членов бесконечных последовательностей ординат нулей $\zeta(s)$ и точек Грама.

[7)] Подробное обсуждение этого вопроса см. в [11].

[8)] Очевидным следствием теоремы Титчмарша о неограниченности дробей (6) является тот факт, что нуль $\mathfrak{c}_n$ не попадает в G_n для бесконечного множества номеров n.

Закон Грама в работах Сельберга

В докладе «Дзета-функция и гипотеза Римана» [12], прочитанном на 10 Скандинавском математическом конгрессе в Копенгагене (1946 г.), Сельберг, желая продемонстрировать, насколько ошибочными могут быть теоретико-числовые гипотезы, основанные на одних лишь численных данных, привёл два примера.

Первый - классический - относился к неравенству $\pi(x) < \mathrm{li}(x)$[9], подкреплённому большим числом примеров, но которое, тем не менее, нарушается для бесконечного множества целых чисел x.

Второй пример относился к численной проверке закона Грама. Поясним этот пример подробнее. Для этого рассмотрим произвольную ординату γ_n нуля дзета-функции Римана. По её номеру n определим целое число $m = m(n)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$t_{m-1} < \gamma_n \leqslant t_m,$$

и положим $\Delta_n = m - n$.

Вычисления, проделанные Титчмаршем для промежутка $1 \leqslant n \leqslant 1041$, показывают, что равенство $\Delta_n = 0$ имеет место во всех случаях, за исключением 45 ординат γ_n, для которых $\Delta_n = \pm 1$. Появление более совершенных вычислительных средств в каком-то смысле не сильно изменило эту картину. Так, подсчёты Х. Гордона и П. Демишеля (2004 г.; см. [13]), затронувшие промежутки вида $10^k \leqslant n \leqslant 10^k + 2\cdot 10^9$, $k = 13, 14, \ldots, 24$, не обнаружили ни одного n с условием $|\Delta_n| > 3$.

Перечисленные факты как будто указывают на то, что величины $|\Delta_n|$ ограничены по модулю. Для опровержения столь поспешных заключений Сельберг привёл в своём докладе найденным им соотношения

$$\sum_{n \leqslant N} \Delta_n^{2k} = \frac{(2k)!}{k!}\frac{N}{(2\pi)^{2k}}\,(\log\log N)^k + O\big(N(\log\log N)^{k-1/2}\big), \tag{12}$$

$$\sum_{n \leqslant N} \Delta_n^{2k-1} = O\big(N(\log\log N)^{k-1}\big), \tag{13}$$

в которых $N \to +\infty$, а $k \geqslant 1$ - фиксированное целое число.

Равенство (12) наводит на мысль о том, что значения Δ_n, имеющие порядок $\sqrt{\log\log n}$, должны встречаться достаточно часто. Так, в [12] Сельберг высказал следующее предположение: «*По-видимому, хотя я и не мог доказать этого строго, $\sqrt{\log\log n}$ есть «нормальный» порядок величины Δ_n в следующем смысле: если $\Phi(n)$ - положительная функция от n, стремящаяся к бесконечности вместе с n, то неравенства*

$$\frac{\sqrt{\log\log n}}{\Phi(n)} < |\Delta_n| \leqslant \Phi(n)\sqrt{\log\log n} \tag{14}$$

имеют место для почти всех n. В частности, это должно означать, что γ_ν «почти никогда» не лежит в интервале $(t_{\nu-1}, t_\nu)$. Именно первое неравенство составляет основную трудность, его я доказать полностью не смог.»[10]

---

[9] Здесь $\pi(x)$ - количество простых чисел, не превосходящих x, $\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u}$ - интегральный логарифм x.

[10] Слова «почти никогда» в данном случае означают следующее: если $\nu = \nu(\Phi; N)$ - число номеров n, $n \leqslant N$, не удовлетворяющих условиям (14), то $\nu/N \to 0$ при $N \to +\infty$. Подобный смысл несут и используемые здесь и далее словосочетания «почти все», «почти всегда» и т.д.

Позже Сельбергу удалось найти доказательство этого предположения[11]. Об этом можно судить по замечанию, которым снабжён текст доклада в первом томе трудов Сельберга: «*Из этих равенств* (имеются в виду формулы (12) и (13) - М.К.) *стандартным образом выводится, что величина* $\Delta_n/\sqrt{\log\log n}$ *имеет гауссово распределение. В частности, это даёт ответ на поставленный там же вопрос. В 1946 г. я ещё не знал, что эти теоремы о моментах* Δ_n *позволяют находить функцию распределения.*» (см. [14, с. 355]).

Перечисленные результаты Сельберга объясняют и тот факт, что все вычисленные к настоящему времени значения Δ_n очень малы. Действительно, положив $N = 10^{24}$, для «большинства» номеров $n \leqslant N$ будем иметь: $|\Delta_n| \approx \sqrt{\log\log N} \approx 2.001$. Иными словами, влияние растущего множителя $\log\log N$ формулы (12) в области, доступной для вычислений, практически незаметно.

В докладе [12] Сельберг именует законом Грама свойство величины Δ_n или, что то же, свойство ординаты γ_n попадать в промежуток Грама G_n с тем же номером.

Отличие этой разновидности закона Грама от перечисленных выше состоит в том, что здесь ограничение накладывается на взаимное расположение точек Грама t_n и произвольных ординат γ_m нулей $\zeta(s)$, то время как Грам, Хатчинсон и Титчмарш принимали в рассмотрение ординаты $\mathfrak{c}_m$ лишь тех нулей, что лежат на критической прямой[12].

Эта разница является принципиальной. На глубину различия уровней наших знаний о последовательностях ординат γ_n и $\mathfrak{c}_n$ указывает следующий факт. Известно, например, что расстояние между соседними ординатами γ_n и γ_{n+1} стремится к нулю с ростом n. Более того, если n достаточно велико, то для разности этих ординат справедлива оценка

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \leqslant \frac{32}{\log\log\log\gamma_n}.$$

Однако ничего подобного до сих пор не известно в отношении величин $\mathfrak{c}_n$. Самое большее, что можно гарантировать - это выполнение неравенства

$$\mathfrak{c}_{n+1} - \mathfrak{c}_n \leqslant \mathfrak{c}_n^{\alpha+\varepsilon}, \quad \alpha = 0.1559458\ldots$$

(доказательства этого и предыдущего результатов можно найти в работах [15] и [16, с. 261] соответственно).

Чтобы отличать в дальнейшем трактовку закона Грама, предложенную Сельбергом, от всех прочих, будем говорить, что в случае $\Delta_n = 0$ (или, что то же, в случае $\gamma_n \in G_n$) для ординаты γ_n наблюдается *явление Грама-Сельберга*. Таким образом, сформулированное Сельбергом в [14, с. 355] и процитированное выше утверждение означает, что явление Грама-Сельберга является в действительности очень редким и не наблюдается «почти никогда».

Предмет исследования

Первоначальная цель автора состояла в строгом обосновании формул Сельберга (12) и (13). Поиск такого доказательства привёл к рассмотрению целого круга

[11] Вместе с тем, доказательство формул (12),(13) ни Сельбергом, ни кем-либо другим опубликовано не было, так что вопрос их обоснования оставался открытым.

[12] Разумеется, это различие исчезает, если гипотеза Римана верна.

вопросов, связанных с величинами Δ_n, которые и составили содержание настоящей работы. В их числе:

1) моменты тригонометрических полиномов специального вида;

2) поведение аргумента дзета-функции Римана в точках Грама;

3) формулы Сельберга для моментов величин Δ_n и их обобщения; распределение значений Δ_n;

4) порядок роста величин Δ_n при $n \to +\infty$; множество значений, которые принимает Δ_n;

5) распределение пар, троек, четвёрок и т.д. соседних ординат γ_n, для которых величина $\Delta_n \neq 0$;

6) малые значения функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ в точках Грама t_n.

Поясним каждую из этих задач подробнее.

1) Величины Δ_n тесно связаны со значениями функции $S(t)$ в точках Грама t_n. В свою очередь, функция $S(t)$ приближается (в метрике пространства $L_a[T;T+H]$, $a>0$) тригонометрическими полиномами вида

$$W_x(t) \,=\, W(t) \,=\, -\,\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin\left(t\log p\right)}{\sqrt{p}},$$

где $x = x(t)$, а p пробегает простые числа. По этой причине особый интерес приобретает задача нахождения асимптотических формул для «дискретных» моментов $W(t)$, т.е. величин

$$\sum_{N<n\leqslant N+M}\left|W(t_n)\right|^a, \qquad a>0.$$

Именно эта задача и рассматривается в главе 1.

Основными результатами этой главы являются новые формулы, дающие для таких моментов асимптотические разложения по степеням параметра

$$\mathfrak{S} \,=\, \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}.$$

Примером такого разложения служит следующая формула для первого момента

$$\sum_{N<n\leqslant N+M}\left|W(t_n)\right| \,= \\ =\, \frac{M}{\pi\sqrt{\pi}}\left\{\mathfrak{S}_1^{\frac{1}{2}} \,+\, \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n-1}}\,\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\,\Phi_{n+1}\,\mathfrak{S}_1^{-\frac{1}{2}-n}\right\} \,+\, O\left(M\sqrt{\frac{\log x}{\log N}}\right),$$

в которой Φ_n - некоторые коэффициенты, допускающие явные выражения в виде полиномов от величин $\mathfrak{S}_r = \sum\limits_{p\leqslant x} p^{-r}$, $r = 2,\ldots,n$.

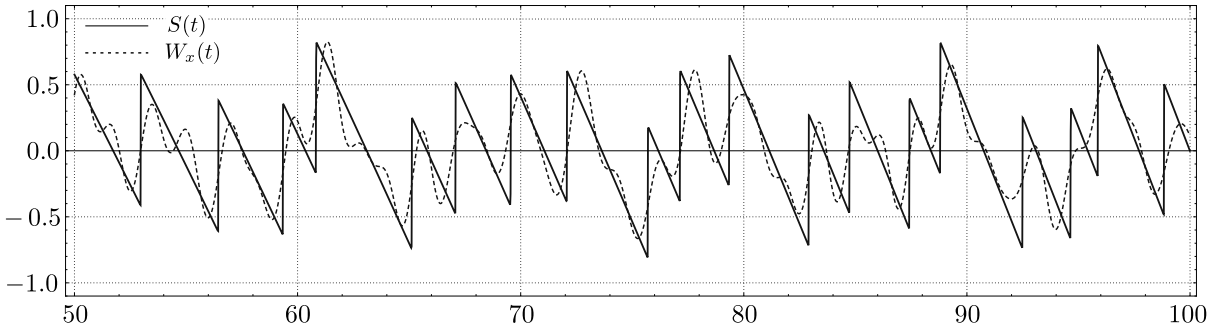


Рис. 4. Графики функций $S(t)$ и $W_x(t)$ при $x = 100$.

Следует отметить, что способ вывода соотношений такого рода оказывается применим к достаточно широкому классу полиномов вида

$$\sum_{p \leqslant x} a_p \, f(t \log p),$$

где a_p – последовательность вещественных чисел, а $f(u)$ - любая из функций $\sin u$, $\cos u$, e^{iu}, а также к «непрерывному» случаю, когда суммирование по точкам Грама t_n заменяется интегрированием по промежутку $T < t \leqslant T + H$.

2) Теоремы главы 1 позволяют значительно уточнить имеющиеся формулы для дискретных моментов аргумента дзета-функции Римана на критической прямой, т.е. для сумм вида

$$\sum_{N < n \leqslant N+M} |S(t_n + 0)|^a, \quad a > 0.$$

Так, например, оценку остаточного члена r,

$$r \ll \frac{\log\log\log\log N}{\log\log\log N}$$

в формуле

$$\sum_{N < n \leqslant N+M} |S(t_n + 0)| = \frac{M}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\log\log N}\,(1 + r)$$

удаётся заменить оценкой вида

$$r \ll \sqrt{\frac{\log\log\log N}{\log\log N}}.$$

Доказательство этого и ряда других результатов содержатся в главе 2.

3) Некоторые характеристики последовательностей Δ_n и $\Delta(n) = S(t_n + 0)$ оказываются во многом схожи. Это касается, в частности, сумм

$$\sum_{N < n \leqslant N+M} |\Delta_n|^a \qquad \text{и} \qquad \sum_{N < n \leqslant N+M} |\Delta(n)|^a.$$

Наличие такой связи позволяет вывести формулы Сельберга (12) и (13) непосредственно из теорем главы 2. Кроме того, величины Δ_n хорошо приближаются значениями $S(t)$ в точках разрыва (т.е. числами $S(\gamma_n \pm 0)$), а также величинами

$$(\gamma_n - t_n)\frac{\log n}{2\pi}.$$

Поэтому прямым следствием формул Сельберга оказываются асимптотические выражения для сумм

$$\sum_{N<n\leqslant N+M} |S(\gamma_n \pm 0)|^a, \qquad \sum_{N<n\leqslant N+M} |\gamma_n - t_n|^a.$$

Переход от моментов величин $\Delta(n)$ к моментам Δ_n осуществляется несколькими способами, три из которых приводятся в настоящей работе. Каждый из них представляет и самостоятельный интерес. Так, один из этих способов приводит к следующему результату: для положительной доли номеров n промежуток Грама G_n не содержит ни одной ординаты нуля $\zeta(s)$ и вместе с тем в положительной доле случаев G_n содержит не менее двух ординат[13)]. Это указывает на значительную нерегулярность в распределении нулей $\zeta(s)$, поскольку «в среднем» на один промежуток Грама приходится ровно одна ордината γ_n.

Доказательства этого и других перечисленных выше результатов можно найти в главе 3.

4) Из формул Сельберга (12), (13) несложно заключить, что

$$\liminf_{n\to+\infty} \Delta_n = -\infty, \qquad \limsup_{n\to+\infty} \Delta_n = +\infty. \tag{14}$$

Связь величин Δ_n с аргументом дзета-функции Римана $\zeta(s)$ позволяет воспользоваться наиболее точными на сегодняшний день результатами о порядке роста функции $S(t)$. Так получаются, например, соотношения

$$\Delta_n = O\big(\log n\big), \quad \Delta_n = \Omega_\pm\left(\sqrt[3]{\frac{\log n}{\log\log n}}\right),$$

уточняющие (14).

Ряд дополнительных соображений, в основе которых лежит метод Сельберга оценки числа перемен знака $S(t)$ на заданном промежутке, даёт возможность доказать, что всякое целочисленное значение k, лежащее между максимумом и минимумом Δ_n, $N < n \leqslant N+M$, принимается величиной Δ_n на указанном промежутке, и притом достаточно часто. Например, в случае $k = 0$ оказывается, что явление Грама-Сельберга имеет место по крайней мере для $Me^{-c(\log\log\log N)^2}$ ординат γ_n с условием $N < n \leqslant N+M$. Все эти результаты помещены в главе 4.

5) Явление Грама-Сельберга оказывается достаточно редким: как следует из результатов главы 3, равенство $\Delta_n = 0$ имеет место не более чем для $O\big(N(\log\log\log N)^{-0.5}\big) = o(N)$ номеров $n \leqslant N$. Отсюда несложно заключить, что и неравенство

$$\Delta_n \Delta_{n+1} \neq 0 \tag{15}$$

выполняется для всех $n \leqslant N$, за исключением $o(N)$ номеров.

Из теорем главы 3 о распределении значений Δ_n следует, что как число положительных, так и число отрицательных среди первых n членов последовательности Δ_n

[13)] Этот результат является усилением теоремы Т.С.Труджиана [11], согласно которой положительная доля промежутков Грама G_n содержит «аномальное» (т.е. отличное от единицы) число ординат.

при $N \to +\infty$ асимптотически эквивалентно $0.5N$. Естественно поставить следующий вопрос: как распределены знаки величин Δ_n, Δ_{n+1}, отвечающих условию (15)? Эта задача обобщается на случай трёх, четырёх и вообще любого фиксированного числа s подряд идущих величин $\Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots$.

Оказывается, что среди всех возможных 2^s наборов длины s, составленных из символов «+» и «−», имеется два «особых» набора, состоящих из одинаковых знаков (т.е. из одних только плюсов или из одних только минусов), каждому из которых отвечает $0.5N + o(N)$ наборов $\Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1}$, $n \leqslant N$, с соответствующим распределением знаков. Все же остальные комбинации знаков или вовсе не реализуются, или же встречаются не более чем в $o(N)$ случаях. Это означает, грубо говоря, что перемены знака в последовательности Δ_n встречаются очень редко.

Кроме того, оказывается возможным исследовать распределение значений произведений $|\Delta_n \ldots \Delta_{n+s-1}|$ с условием $n \leqslant N$, отвечающих наборам чисел одного знака. Эти произведения, должным образом нормированные, имеют распределение, сходящееся при $N \to +\infty$ к гамма-распределению с плотностью

$$f(u) = \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}}, \quad u > 0.$$

Перечисленные выше результаты позволяют доказать и существование сколь угодно большого числа подряд идущих аномально больших илии аномально малых значений величины Δ_n. Именно, при любом $s \geqslant 2$ можно указать функции $h(x)$ и $H(x)$ с условиями

$$\frac{h(x)}{\sqrt{\log\log x}} \to 0, \quad \frac{H(x)}{\sqrt{\log\log x}} \to +\infty, \quad x \to +\infty,$$

такие, что каждое из неравенств

$$0 < \Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1} \leqslant h(n), \quad \Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1} > H(n)$$

имеет бесконечно много решений.

6) Грам и ряд последующих авторов обращали особое внимание на тот факт, что точки t_n при малых n действительно отделяют друг от друга нули $\mathfrak{c}_n$ функции Харди:

$$\mathfrak{c}_1 < t_1 < \mathfrak{c}_2 < t_2 < \mathfrak{c}_3 < t_3 < \ \ldots \ .$$

Между тем, всюду выше речь идёт о «попаданиях» нулей $\mathfrak{c}_n$ или ординат γ_n в промежутки Грама $G_n = (t_{n-1}, t_n]$. Тем самым допускается совпадение нуля или ординаты с точкой Грама t_n. Это приводит нас к следующему вопросу: возможны ли в действительности такие совпадения? Отметим, что к этому же вопросу приводит нас и следующее рассуждение.

Как отмечалось выше, точки Грама t_n образуют на числовой оси «почти равномерную» сетку в том смысле, что при изменении n в промежутке вида $N < n \leqslant N + M$, $M = o(N)$, все разности $t_{n+1} - t_n$ приближённо равны одному и тому же числу $2\pi(\log N)^{-1}$.

Естественно ожидать, что многие особенности поведения дзета-функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ при непрерывном изменении t на вещественной прямой будут присущи и случаю, когда величина t пробегает дискретное множество точек Грама t_n.

В ряде случаев ожидания такого рода оправдываются (полностью или частично). Это касается, например, поведения величин

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt \quad \text{и} \quad \sum_{n\leqslant N} \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_n\right)\right|^{2k},$$

для которых при некоторых k получены сходные асимптотические формулы или хотя бы близкие по порядку роста верхние и нижние оценки (см., соответственно, работы [17] и [18]; [19] и [20],[21]; [22],[23] и [24]-[26]). То же относится и к величинам

$$\max_{0<t\leqslant T}\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right| \quad \text{и} \quad \max_{0<n\leqslant N}\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_n\right)\right|,$$

для которых имеются нижние оценки одного порядка (см. [27],[28] и [29]).

Менее очевидной оказывается ситуация в случае, когда вместо максимума значений дзета-функции на соответствующем множестве точек критической прямой рассматривается минимум. Поскольку дзета-функция имеет на критической прямой бесконечно много нулей, то очевидно, что

$$\min_{0<t\leqslant T}\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right| = 0.$$

Вместе с тем, совпадение точки Грама t_n с какой-либо из ординат нулей $\zeta(s)$ представляется практически невероятным.

Для проверки такого предположения можно предложить два пути. Первый состоит в получении возможно более точных нижних оценок для количества номеров n, $n\leqslant N$, удовлетворяющих условию

$$\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_n\right) \neq 0. \tag{16}$$

Второй путь заключается в изучении точек Грама t_{n_k}, $k=1,2,\ldots$ таких, что

$$\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_{n_k}\right) \to 0$$

при $k\to+\infty$.

Оказывается, например, что среди первых N точек Грама условию (16) удовлетворяют не менее $Ne^{-c(\log\log\log N)^2}$ из них, и вместе с тем при любом $A>0$ на том же промежутке для положительной доли номеров n выполняется неравенство $\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_n\right)\right| < e^{-A\sqrt{\log\log N}}$.

Все эти результаты содержатся в последней, шестой главе.

Автор считает приятным долгом поблагодарить В.А. Быковского, С.А. Гриценко, А. Ивича, С.В. Конягина, А.П. Лауринчикаса, Н.Г. Мощевитина, Ю.В. Нестеренко, А.Н. Паршина, Д.А. Попова, И.С. Резвякову, К.-М.Тсанга и И.Д. Шкредова за интерес к работе и всестороннюю поддержку. Автор искренне признателен М. Балазару за помощь в переводе с французского статьи Грама, Е.И. Иванниковой за неоценимую помощь в оформлении иллюстраций, Р.Н. Бояринову за многочисленные дискуссии по затронутым в диссертации вопросам, а также всем своим родным, без поддержки которых эта работа не была бы написана. Кроме того, в ходе работы автор пользовался поддержкой РФФИ (грант № 12-01-31165 «мол-а»).

Обозначения

В работе используются следующие обозначения:

– $N(t)$ - число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 < \operatorname{Re} s < 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leqslant t$;

– $N_0(t)$ - число нулей $\zeta(s)$ на отрезке критической прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $0 < \operatorname{Im} s \leqslant t$;

– $N_j(t)$ - число ординат нулей $\zeta(s)$ кратности $j \geqslant 1$ в прямоугольнике $0 < \operatorname{Re} s < 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leqslant t$;

– $N(\sigma, t)$ - число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma < \operatorname{Re} s < 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leqslant t$;

– $\vartheta(t)$ - приращение непрерывной ветви аргумента функции $\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ вдоль отрезка с концами $s = \frac{1}{2}$ и $s = \frac{1}{2} + it$;

– $S(t) = \pi^{-1} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ - аргумент дзета-функции Римана на критической прямой;

– $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots \leqslant \gamma_n \leqslant \gamma_{n+1} \leqslant \ldots$ - положительные ординаты нулей $\zeta(s)$, занумерованные в порядке возрастания с учётом кратности (а в случае совпадения - в произвольном порядке);

– $0 < \mathfrak{c}_1 < \mathfrak{c}_2 < \ldots \leqslant \mathfrak{c}_n \leqslant \mathfrak{c}_{n+1} \leqslant \ldots$ - положительные ординаты нулей $\zeta(s)$, лежащих на критической прямой, занумерованные в порядке возрастания с учётом кратности (а в случае совпадения - в произвольном порядке), или, что то же, вещественные нули функции Харди $Z(t)$;

– $J_0(z)$ - функция Бесселя первого рода;

– $G(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{u} e^{-v^2/2} dv$ - нормальное распределение;

– $\sigma_{x,t}$, $\Lambda_x(n)$ - функции Сельберга (см. §2.1);

– B_n - числа Бернулли: $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = \frac{1}{42}, ..., B_3 = B_5 = \ldots = 0$;

– t_n - последовательность точек Грама;

– $G_n = (t_{n-1}, t_n]$ - промежуток Грама;

– $\Delta(n) = S(t_n + 0)$;

– $r(n) = \Delta(n) - \Delta(n-1)$;

– $\#\mathcal{A}$, $|\mathcal{A}|$ - число элементов во множестве $\mathcal{A}$;

– $\mathbf{E}(\eta)$ – математическое ожидание случайной величины η;

– $\mathbf{P}\{\xi \leqslant u\}$ - вероятность того, что случайная величина ξ не превосходит u;

– ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 10^{-3}$; $\varepsilon_1 = 0.9\,\varepsilon$;

– $\alpha = \frac{27}{82} = \frac{1}{3} - \frac{1}{246}$;

– N, M – достаточно большие целые числа, $N^{\alpha+\varepsilon_1} \leqslant M \leqslant N^{\alpha+\varepsilon}$;

– символы $\displaystyle\sum_n \ldots$ и $\displaystyle\sum_{n \in A} \ldots$ означают, соответственно, $\displaystyle\sum_{N < n \leqslant N+M} \ldots$ и $\displaystyle\sum_{\substack{N < n \leqslant N+M \\ n \in A}} \ldots$;

– символами $p, p_1, p_2, \ldots$ и $q, q_1, q_2, \ldots$ обозначаются простые числа;

– $V_x(t) = \displaystyle\sum_{p \leqslant x} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}}$, $W_x(t) = -\pi^{-1} V_x(t)$;

– $L = \log\log N$;

– $\mathcal{L}_k = \dfrac{(2k)!}{k!} \dfrac{ML^k}{(2\pi)^{2k}}$;

– $\varkappa(a) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} (2v)^a e^{-v^2} dv = \frac{2^a}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)$; в частности, $\varkappa(2k) = \dfrac{(2k)!}{k!}$ при целом $k \geqslant 1$;

– $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots$ - комплексные числа, по абсолютной величине не превосходящие единицы и в разных соотношениях, вообще говоря, разные;

– $a, a_1, a_2, \ldots, b, b_1, b_2, \ldots$ – положительные величины, зависящие разве что от ε;

– $c_0 = 2880\,\varepsilon^{-1}$ (лемма 2.7);

– $c_1 = \left(1.75\pi^2\right)^{1/3} c_0^{-1}$ (теорема 2.1);

– $c_2 = 11^{-2/3} c_0^{-1}$ (теорема 2.3);

– $c_3 = (6c_0)^{-2}$ (теорема 3.13);

– $c_4 = 8.7ec_0$, $c_5 = 9e^5 c_0$ (лемма 5.2);

– $c_6 = 5132.8\,\varepsilon^{-1}$ (лемма 6.5).

При ссылке на лемму n из Приложения I используется запись «лемма n.П». Все прочие обозначения вводятся и поясняются по ходу изложения.

Глава 1

Моменты специальных тригонометрических полиномов

Цель настоящей главы состоит в выводе асимптотических формул для дискретных моментов полинома

$$V(t) \,=\, V_x(t) \,=\, \sum_{p\leqslant x} \frac{\sin\,(t\log p)}{\sqrt{p}},$$

где p пробегает подряд идущие простые числа, т.е. для сумм вида

$$V_a \,=\, \sum_n \bigl|V(t_n)\bigr|^a,$$

где a - произвольное (не обязательно целое) положительное число.

В первом параграфе доказывается асимптотическая формула чётного момента V_{2k}, главные член которой имеет вид

$$\frac{(2k)!}{2^{2k}}\,M\biggl\{\frac{\Phi_0}{k!}\,\mathfrak{S}_1^k \,+\, \frac{\Phi_1}{(k-1)!}\,\mathfrak{S}_1^{k-1} \,+\, \frac{\Phi_2}{(k-2)!}\,\mathfrak{S}_1^{k-2} \,+\,\ldots\,+\,\Phi_n\biggr\},$$

где

$$\mathfrak{S}_1 \,=\, \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} \,\sim\, \log\log x.$$

Коэффициенты Φ_n этого выражения являются, в свою очередь, многочленами от величин

$$\mathfrak{S}_r = \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p^r}, \quad r=2,3,\ldots$$

и имеют довольно сложный вид. Исследованию свойств чисел Φ_n посвящены §§2,3 настоящей главы.

Утверждения §§2,3 находят применение в §4 при выводе формулы для момента V_a при a, отличном от чётного целого числа. В этом случае главный член такой формулы представляется асимптотическим рядом

$$\frac{M}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\biggl(\frac{a+1}{2}\biggr)\,\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\Phi_n\,\frac{\Gamma\Bigl(n-\dfrac{a}{2}\Bigr)}{\Gamma\Bigl(-\dfrac{a}{2}\Bigr)}\,\mathfrak{S}_1^{\frac{a}{2}-n}. \tag{1.1}$$

Для основной цели настоящей работы, состоящей в изучении закона Грама, вполне достаточно результатов §§1-4. Тем не менее, ввиду того, что асимптотические разложения дробных моментов могут представлять и самостоятельный интерес, мы сочли уместным включить в эту главу дополнительный §5, посвящённый уточнению остаточного члена в формуле для первого момента V_1.

Все рассуждения §§1-5 практически без изменений могут быть перенесены на случай «интегральных» моментов, т.е. величин вида

$$\int_T^{T+H} \bigl|V(t)\bigr|^a dt, \quad T^{\alpha+\varepsilon} \leqslant H \leqslant T.$$

Отметим также, что многие результаты главы 1 (или их аналоги) остаются справедливыми и для полиномов вида

$$\sum_{p\leqslant x} a_p \sin(t\log p), \quad \sum_{p\leqslant x} a_p \cos(t\log p), \quad \sum_{p\leqslant x} a_p\, p^{it}$$

с вещественными коэффициентами a_p. В этом случае роль величин $\mathfrak{S}_r$ будут играть суммы $\sum\limits_{p\leqslant x} a_p^{2r}$. Задача описания класса таких полиномов требует отдельного исследования.

§1. Чётные моменты величины $V(t_n)$

Прежде всего, нам потребуется ряд вспомогательных утверждений о поведении точек Грама t_n и их обобщений на случай нецелого n при неограниченном возрастании параметра n. Все необходимые нам соотношения такого рода содержатся в следующей лемме.

Лемма 1.1. *Пусть $u \geqslant 0$ - произвольное (не обязательно целое) число, t_u - единственное решение уравнения*

$$\vartheta(t_u) \,=\, (u-1)\pi, \tag{1.2}$$

отвечающее условию $\vartheta'(t_u) > 0$. Тогда:

1) *при $u \to +\infty$ имеют место следующие соотношения:*

$$t_u \,=\, \frac{2\pi u}{\log u}\biggl(1 \,+\, \bigl(1+o(1)\bigr)\,\frac{\log\log u}{\log u}\biggr), \tag{1.3}$$

$$\frac{dt_u}{du} \,=\, \frac{2\pi}{\log u}\biggl(1 \,+\, \bigl(1+o(1)\bigr)\,\frac{\log\log u}{\log u}\biggr), \tag{1.4}$$

$$\frac{d^2t_u}{du^2} \,=\, -\,\frac{\pi}{u(\log u)^2}\biggl(1 \,+\, \bigl(2+o(1)\bigr)\,\frac{\log\log u}{\log u}\biggr); \tag{1.5}$$

2) *если* $u \to +\infty$, $|v| \leqslant \frac{1}{5}\, u$, *то*

$$t_{u+v} \,-\, t_u \,=\, \frac{2\pi v}{\log u}\left(1 \,+\, \big(1+o(1)\big)\,\frac{\log\log u}{\log u}\right), \tag{1.6}$$

$$|t_{u+v} \,-\, t_u| \,>\, \frac{2\pi|v|}{\log u}, \tag{1.7}$$

$$t_{u+v} \,-\, t_u \,=\, \frac{\pi v}{\vartheta'(t_u)}\left(1 \,+\, \frac{\theta|v|}{u\log u}\right); \tag{1.8}$$

3) *если* $N < u \leqslant u+v \leqslant N+M$, *то*

$$t_{u+v} \,-\, t_u \,=\, \frac{\pi v}{\vartheta'(t_N)} \,+\, \frac{2\pi\theta v M}{N(\log N)^2}. \tag{1.9}$$

$$\frac{2\pi}{\log N} < \frac{dt_u}{du} < \frac{2\pi}{\log N - \log\log N}. \tag{1.10}$$

Доказательство. Формула (1.3) является следствием леммы 2 из работы [21]. Дважды дифференцируя соотношение (1.2), приходим к равенствам

$$t'_u \,=\, \frac{\pi}{\vartheta'(t_u)}, \quad t''_u \,=\, -\,\frac{\pi^2\,\vartheta''(t_u)}{(\vartheta'(t_u))^3}, \tag{1.11}$$

из которых получим (1.4) и (1.5), воспользовавшись (1.2) наряду с соотношениями

$$\vartheta'(t) \,=\, \frac{1}{2}\log\frac{t}{2\pi} \,+\, O\big(t^{-2}\big), \quad \vartheta''(t) \,=\, \frac{1}{2t} \,+\, O\big(t^{-3}\big).$$

При доказательстве формул (1.6)-(1.8) будем предполагать, что $0 \leqslant v \leqslant \frac{1}{5}u$ (случай отрицательных u рассматривается аналогично). Тогда из формулы конечных приращений при некотором w, $0 \leqslant w \leqslant v$, получаем:

$$\pi v \,=\, \vartheta(t_{u+v}) \,-\, \vartheta(t_u) \,=\, (t_{u+v} - t_u)\,\vartheta'(t_{u+w}),$$

откуда, согласно (1.4) и (1.11), заключаем:

$$t_{u+v} - t_u \,=\, \frac{\pi v}{\vartheta'(t_{u+w})} \,=\, v t'_{u+w} \,=\, \frac{2\pi v}{\log(u+w)}\left(1 + \big(1+o(1)\big)\frac{\log\log(u+w)}{\log(u+w)}\right) \,=$$
$$=\, \frac{2\pi v}{\log u}\left(1 + \big(1+o(1)\big)\,\frac{\log\log u}{\log u}\right). \tag{1.12}$$

Далее, из формулы конечных приращений при некотором (другом) w с условием $|w| \leqslant \frac{1}{5}u$ имеем:

$$\pi v \,=\, \vartheta(t_{u+v}) \,-\, \vartheta(t_u) \,=\, (t_{u+v} - t_u)\,\vartheta'(t_u) \,+\, \frac{1}{2}\,(t_{u+v} - t_u)^2\,\vartheta''(t_{u+w}),$$

так что

$$t_{u+v} \,-\, t_u \,=\, \frac{\pi v}{\vartheta'(t_u)}\,\big(1+r\big)^{-1}, \tag{1.13}$$

где, согласно (1.11), величина r имеет вид

$$r \,=\, \frac{1}{2}\,(t_{u+v}-t_u)\,\frac{\vartheta''(t_{u+w})}{\vartheta'(t_u)} \,=\, -\,\frac{1}{2}(t_{u+v}-t_u)\,\frac{t'_u t''_{u+w}}{(t'_{u+w})^3}.$$

Воспользовавшись равенством (1.12) наряду с оценкой (1.13), последовательно находим:

$$r=\frac{v}{4(\log u)^2}\,\frac{\log\,(u+w)}{u+w}\left(1+\big(1+o(1)\big)\frac{\log\log u}{\log u}\right)\,=$$
$$=\,\frac{v}{4u\log u}\left(1-\big(1+o(1)\big)\frac{w}{u}\right)\left(1+\big(1+o(1)\big)\frac{\log\log u}{\log u}\right),$$
$$|r|\leqslant\frac{|v|}{3u\log u},\quad (1+r)^{-1}\,=\,1+\frac{\theta|v|}{2u\log u}.$$

Таким образом, (1.6), (1.7) следуют из (1.13) и последнего соотношения.

Предполагая выполненными условия $N<u\leqslant u+v\leqslant N+M$, при некоторых y,z,w с условиями $u\leqslant y,z\leqslant w\leqslant u+v$, будем иметь:

$$t_{u+v}-t_u\,=\,\frac{\pi v}{\vartheta'(t_w)}\,=\,\frac{\pi v}{\vartheta'(t_N)}-h,$$

причём

$$0\leqslant h=\pi v\left(\frac{1}{\vartheta'(t_N)}\,-\,\frac{1}{\vartheta'(t_w)}\right)\,=\,\frac{\pi v(\vartheta'(t_w)-\vartheta'(t_N))}{\vartheta'(t_N)\,\vartheta'(t_w)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\pi v(t_w-t_N)\,\vartheta''(t_y)}{(\vartheta'(t_N))^2}\,=\,\frac{\pi v(w-N)}{\vartheta'(t_z)}\,\frac{\vartheta''(t_y)}{(\vartheta'(t_N))^2}\leqslant\frac{\pi v\,\vartheta''(t_N)}{(\vartheta'(t_N))^3}\,=$$
$$=\,\frac{\pi vM}{N(\log N)^2}\left(1+\big(2+o(1)\big)\,\frac{\log\log N}{\log N}\right)\,<\,\frac{2\pi vM}{N(\log N)^2},$$

что и доказывает (1.9).

Наконец, верхнюю оценку в (1.10) получим, воспользовавшись равенством (1.11), соотношением (1.3) и монотонным убыванием функции $\dfrac{dt_u}{du}$ на промежутке $N\leqslant u\leqslant N+M$. Нижняя оценка (1.10) очевидным образом следует из (1.4). Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть μ,ν - целые числа с условием $1\leqslant\mu,\nu\leqslant\sqrt{N/\log N}$, причём $\mu\neq\nu$. Тогда сумма*

$$S\,=\,\sum_n\Big(\frac{\mu}{\nu}\Big)^{it_n}$$

не превосходит по абсолютной величине $\sqrt{\mu\nu}\log N$.

Доказательство. Пусть, для определённости, $\mu>\nu\geqslant 1$. Запишем S в виде

$$\sum_n e^{2\pi i f(n)},\quad\text{где}\quad f(u)=\frac{t_u}{2\pi}\log\frac{\mu}{\nu}.$$

Применяя оценку (1.10) леммы 1.1 наряду с неравенством из условия, получим:

$$0<f'(u)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{dt_u}{du}\,\log\frac{\mu}{\nu}<\frac{1}{2\pi}\,\frac{2\pi\log\mu}{\log N-\log\log N}\leqslant\frac{1}{2}.$$

В силу леммы 1.П имеем, следовательно:

$$|S| \,<\, |j|+3, \quad j=\int_N^{N+M} e^{2\pi i f(u)}\,du.$$

Интегрируя по частям и пользуясь монотонностью функции $\dfrac{1}{f'(u)}$ наряду с оценкой (1.10), найдём:

$$|j| = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{e^{2\pi i f(N+M)}}{f'(N+M)} - \frac{e^{2\pi i f(N)}}{f'(N)} - \int_N^{N+M} e^{2\pi i f(x)} d\,\frac{1}{f'(x)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{f'(N+M)} + \frac{1}{f'(N)} + \frac{1}{f'(N+M)} - \frac{1}{f'(N)}\right) = \frac{1}{\pi f'(N+M)} < \frac{1}{\pi}\,\frac{\log N}{\log\frac{\mu}{\nu}}.$$

Несложно видеть, что

$$\log\frac{\mu}{\nu} \geqslant \log\frac{\nu+1}{\nu} = \frac{\lambda}{\nu}, \quad \lambda = 1 - \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{3\nu^2} - \frac{1}{4\nu^3} + \dots\ .$$

Замечая, что $\lambda = \log 2$ при $\nu = 1$ и $\lambda \geqslant \dfrac{3}{4}$ при $\nu \geqslant 2$, получим:

$$|j| \,<\, \frac{\nu\log N}{\pi\log 2} \,<\, \frac{\sqrt{\mu\nu}}{\pi\log 2}\log N, \quad |S| < \frac{\sqrt{\mu\nu}}{\pi\log 2}\log N + 3 \,<\, \sqrt{\mu\nu}\log N.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть k, m, r – целые числа, $m \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, $m + r = k$, $e^2 < y < (N/\log N)^{1/(2k)}$. Пусть, далее, $p_1, \dots, p_m$, $q_1, \dots, q_r$ пробегают значения простых чисел из промежутка $(1, y]$, удовлетворяющие условию $p_1 \dots p_m \neq q_1 \dots q_r$. Пусть, наконец, все члены последовательности $a(p)$ при $p \leqslant y$ подчинены условию $|a(p)| \leqslant \delta$. Тогда для суммы*

$$S = \sum_n \sum_{\substack{p_1,\dots,p_m \\ q_1,\dots,q_r}} \frac{a(p_1)\dots a(p_m)\,\overline{a}(q_1)\dots\overline{a}(q_r)}{(p_1\dots p_m\, q_1\dots q_r)^{1/2}} \left(\frac{q_1\dots q_r}{p_1\dots p_m}\right)^{it_n} \tag{1.14}$$

имеет место оценка: $|S| < \big(\delta y\big)^k \log N$.

Доказательство. Изменим в (1.14) порядок суммирования и воспользуемся леммой 1.2, положив в ней $\mu = q_1 \dots q_r$, $\nu = p_1 \dots p_m$. Получим:

$$|S| \,<\, \delta^k \sum_{p_1,\dots,p_m \leqslant x} \;\sum_{q_1,\dots,q_r \leqslant x} (p_1\dots q_r)^{-\frac{1}{2}} \cdot (p_1\dots q_r)^{\frac{1}{2}} \log N \,=\, \big(\delta\pi(y)\big)^k \log N <$$
$$< (\delta y)^k \log N.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть $k \geqslant 1$ - целое число, $x_0 < x \leqslant M^{1/(2k)}$. Тогда справедливо равенство*

$$V_{2k} \,=\, \sum_n V^{2k}(t_n) \,=\, \binom{2k}{k}\frac{M}{2^{2k}}\,\mathfrak{C}_k \,+\, \theta\, x^{2k}\log N,$$

в котором

$$\mathfrak{C}_k \;=\; \sum_{\substack{p_1\dots p_k = q_1\dots q_k \\ p_1,\dots,\, q_k \leqslant x}} \big(p_1\dots p_k\big)^{-1}$$

(*суммирование в* $\mathfrak{C}_k$ *ведётся по всем наборам простых чисел* $p_1,\dots,q_k$, *которые не превосходят* x *и удовлетворяют уравнению* $p_1\dots p_k = q_1\dots q_k$).[1)]

Доказательство. Полагая

$$U(t) \;=\; \sum_{p\leqslant x} \frac{p^{it}}{\sqrt{p}}, \quad \text{так что} \quad V(t) = \frac{1}{2i}\,\big(U(t) \;-\; \overline{U}(t)\big),$$

сумму V_{2k} представим в виде

$$\frac{(-1)^k}{2^{2k}}\,\sum_n \big(U(t_n) \;-\; \overline{U}(t_n)\big)^{2k} \;=\; \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \sum_{\nu=0}^{2k} (-1)^\nu \binom{2k}{\nu} v_\nu,$$

где

$$v_\nu = \sum_n U^\nu(t_n)\overline{U}^{\,2k-\nu}(t_n) = \sum_n \sum_{\substack{p_1,\dots,\,p_\nu \leqslant x \\ q_1,\dots,\,q_{2k-\nu}\leqslant x}} \big(p_1\dots q_{2k-\nu}\big)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{p_1\dots p_\nu}{q_1\dots q_{2k-\nu}}\right)^{it_n}.$$

Согласно лемме 1.2, при $\nu \neq k$ имеем неравенства:

$$|v_\nu| \;<\; (\log N) \sum_{\substack{p_1,\dots,\,p_\nu \leqslant x \\ q_1,\dots,\,q_{2k-\nu}\leqslant x}} \big(p_1\dots q_{2k-\nu}\big)^{-\frac{1}{2}} \cdot \big(p_1\dots q_{2k-\nu}\big)^{\frac{1}{2}} < x^{2k}\log N.$$

Точно так же оценивается и вклад в v_k слагаемых, отвечающих условию $p_1\dots p_k \neq q_1\dots q_k$. Поэтому, положив

$$\mathfrak{C}_k \;=\; \sum_{\substack{p_1\dots p_k = q_1\dots q_k \\ p_1,\dots,\, q_k \leqslant x}} \big(p_1\dots q_k\big)^{-\frac{1}{2}} \;=\; \sum_{\substack{p_1\dots p_k = q_1\dots q_k \\ p_1,\dots,\, q_k \leqslant x}} \big(p_1\dots p_k\big)^{-1},$$

приходим к равенству

$$V_{2k} \;=\; \binom{2k}{k}\frac{M}{2^{2k}}\,\mathfrak{C}_k \;+\; \theta\, 2^{-2k} \sum_{\nu=0}^{2k} \binom{2k}{\nu} x^{2k}\log N,$$

из которого и следует утверждение леммы.

Лемма 1.5. *При любом* $k \geqslant 1$ *для величины*

$$\mathfrak{C}_k \;=\; \sum_{\substack{p_1\dots p_k = q_1\dots q_k \\ p_1,\dots,\, q_k \leqslant x}} \big(p_1\dots p_k\big)^{-1}$$

[1)] Применение метода А. Сельберга и К.-М. Тсанга из [40, §3, гл. 1] позволяет оценить остаточный член в формуле леммы 1.4 величиною порядка $\sqrt{M}(ck)^k\log N$, где $c>0$ - некоторая постоянная. В свою очередь, это приводит к более точной оценке остаточных членов в формулах теорем 1.1 -1.3. Этим ценным замечанием автор обязан Р.Н. Бояринову.

справедливо равенство: $\mathfrak{C}_k = k!H^{(k)}(0)$, *где*

$$H(z) \,=\, \prod_{p\leqslant x} J_0\biggl(2i\sqrt{\frac{z}{p}}\,\biggr),$$

а $J_0(u)$ - *функция Бесселя первого рода.*

Доказательство. Преобразуем величину $\mathfrak{C}_k$, следуя работе М. Радзивилла [30]. Пусть $n\geqslant 2$ - целое число, все простые делители которого не превосходят x, и пусть $r_1^{\alpha_1}\dots r_s^{\alpha_s}$ - его каноническое разложение. Если число $\Omega(n)=\alpha_1+\ldots+\alpha_s$ его простых делителей совпадает с k, то уравнение

$$n \,=\, p_1\dots p_k \,=\, q_1\dots q_k \tag{1.15}$$

разрешимо в простых числах $p_1,\dots,q_k\leqslant x$ и число его решений равно

$$\biggl(\frac{k!}{\alpha_1!\dots\alpha_s!}\biggr)^2.$$

Если же $\Omega(n)\neq k$ или хотя бы одно из простых чисел $r_1,\dots,r_s$ превосходит x, то уравнение (1.15), очевидно, неразрешимо.

Определим мультипликативную функцию $f(n)$ на степенях простых чисел равенствами

$$f(r^\alpha) \,=\, \begin{cases} (\alpha!)^{-2}, & \text{если} \quad r\leqslant x,\\ 0, & \text{если} \quad r>x. \end{cases}$$

Тогда число решений (1.15) при любом n совпадает с $(k!)^2 f(n)$, а сумма $\mathfrak{C}_k$ - с величиною $(k!)^2 h(k)$, где

$$h(k) \,=\, \sum_{\substack{n=1\\ \Omega(n)=k}}^{+\infty} \frac{f(n)}{n}.$$

Чтобы вычислить $h(k)$, рассмотрим формальный ряд

$$H(z) \,=\, \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) z^k.$$

Меняя в нём порядок суммирования и пользуясь мультипликативностью (по n) функции $z^{\Omega(n)}$, получим:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\biggl\{\sum_{\substack{n=1\\ \Omega(n)=k}}^{+\infty} \frac{f(n)}{n}\biggr\} z^k \,=\, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n}\, z^{\Omega(n)} \,=$$

$$= \prod_p \biggl\{\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f(p^m)}{p^m}\, z^{\Omega(p^m)}\biggr\} \,=\, \prod_{p\leqslant x}\biggl\{\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m!)^2}\biggl(\frac{z}{p}\biggr)^m\biggr\}. \tag{1.16}$$

Каждый член последнего произведения представляет собой ряд, сходящийся абсолютно в любой конечной части плоскости. Поэтому и ряд $H(z)$, как произведение

конечного числа таких рядов, сходится абсолютно для любого z. Этим и обосновывается законность изменения порядка суммирования в (1.16). Таким образом, $H(z)$ - целая функция, так что

$$h(k) \,=\, \frac{H^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{и} \quad \mathfrak{C}_k \,=\, k!H^{(k)}(0).$$

Замечая, наконец, что

$$J_0(z) \,=\, \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m},$$

приходим к утверждению леммы.

Лемма 1.6. *При любом $k \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$H^{(k)}(0) \,=\, k! \sum_{n=0}^{k} \frac{\Phi_n}{(k-n)!}\, \mathfrak{S}_1^{k-n},$$

в котором

$$\mathfrak{S}_1 \,=\, \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p},$$

а модули коэффициентов Φ_n при неограниченном возрастании x остаются ограниченными сверху некоторыми постоянными, зависящими лишь от n.

Доказательство. Первые слагаемые ряда

$$J_0\left(2i\sqrt{\frac{z}{p}}\right) \,=\, \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m!)^2} \left(\frac{z}{p}\right)^m \,=\, 1 + \frac{z}{p} + \dots$$

в правой части (1.16) совпадают с первыми слагаемыми разложения

$$e^{\frac{z}{p}} \,=\, 1 + \frac{z}{p} + \dots\,.$$

Это наблюдение позволяет предположить, что при достаточно малых z произведение (1.16) для $H(z)$ ведёт себя подобно функции

$$\prod_{p \leqslant x} e^{\frac{z}{p}} \,=\, \exp\left\{z \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p}\right\} \,=\, e^{z\mathfrak{S}_1}.$$

Поэтому для дальнейшего $H(z)$ удобно представить в виде

$$\prod_{p \leqslant x} e^{\frac{z}{p}} \cdot e^{-\frac{z}{p}} \left\{\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m!)^2} \left(\frac{z}{p}\right)^m\right\} \,=\, \prod_{p \leqslant x} e^{\frac{z}{p}}\, \varphi\left(\frac{z}{p}\right) \,=\, e^{z\mathfrak{S}_1}\Phi(z),$$

где

$$\varphi(v) \,=\, e^{-v} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{v^m}{(m!)^2}, \quad \Phi(z) \,=\, \prod_{p \leqslant x} \varphi\left(\frac{z}{p}\right).$$

Дифференцируя равенство $H(z) = e^{z\mathfrak{S}_1}\Phi(z)$, получим:

$$H^{(k)}(z) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{k}{n}\Phi^{(n)}(z)\big(e^{z\mathfrak{S}_1}\big)^{(k-n)} = \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\Phi^{(n)}(z)\mathfrak{S}_1^{k-n}e^{z\mathfrak{S}_1},$$

откуда

$$H^{(k)}(0) \;=\; \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\Phi^{(n)}(0)\mathfrak{S}_1^{k-n}.$$

Обозначая через Φ_n коэффициент разложения $\Phi(z)$ в ряд по степеням z, будем иметь:

$$\Phi^{(n)}(0) \;=\; n!\Phi_n, \quad H^{(k)}(0) \;=\; \sum_{k=0}^{n} n!\binom{k}{n}\Phi_n\,\mathfrak{S}_1^{k-n}.$$

Далее, заметим, что в разложении $\varphi(z/p)$ в ряд отсутствует член с z/p:

$$\varphi\left(\frac{z}{p}\right) \;=\; 1 - \frac{z^2}{4p^2} + \frac{z^3}{18p^3} - \ldots\,.$$

Следовательно, при перемножении таких разложений по всем $p \leqslant x$ коэффициент при z^n выразится конечной линейной комбинацией сумм произведений вида

$$\frac{1}{p_1^{m_1}\ldots p_r^{m_r}}, \quad r \leqslant n, \quad p_1,\ldots,p_r \leqslant x, \quad m_1+\ldots+m_r = n,$$

в которых все показатели $m_1,\ldots,m_r$ больше или равны 2. Поскольку ряды $\sum p^{-r}$, $r = 2,3,\ldots$, сходятся, коэффициент Φ_n будет ограничен по модулю некоторой постоянной, зависящей лишь от n и не зависящей от x. Лемма доказана.

Доказанные выше леммы 1.4 – 1.6 позволяют сформулировать главное утверждение настоящего параграфа в следующей форме:

Теорема 1.1. *Пусть $k \geqslant 1$ - целое число, $x_0 < x \leqslant M^{1/(2k)}$. Тогда*

$$V_{2k} \;=\; \sum_n V^{2k}(t_n) \;=\; \frac{M}{2^{2k}}\sum_{n=0}^{k}\frac{(2k)!}{(k-n)!}\,\Phi_n\,\mathfrak{S}_1^{k-n} \;+\; \theta\, x^{2k}\log N,$$

где каждый из коэффициентов Φ_n представляет собой полином от величин $\mathfrak{S}_2,\ldots,\mathfrak{S}_n$,

$$\mathfrak{S}_r \;=\; \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p^r}.$$

Доказательство. Первая часть теоремы сразу следует из лемм 1.4 – 1.6. Доказательство последнего утверждения мы отложим до следующего параграфа, который целиком посвящён изучению свойств коэффициентов Φ_n.

§2. Явные формулы для коэффициентов Φ_n

Формула для чётного момента V_{2k} из теоремы 1.1 содержит величины Φ_n, которые определяются как коэффициенты разложения в ряд по степеням z функции

$\Phi(z)$. Для дальнейшей работы с такими формулами необходимо установить некоторые свойства этих коэффициентов. Это и является целью настоящего и следующего параграфов.

Прежде всего, мы завершим доказательство теоремы 1.1. Именно, мы укажем явный вид Φ_n для небольших значений n и опишем процедуру, которая позволяет за конечное число шагов отыскать выражение для Φ_n в виде полинома от величин $\mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ при любом n.

Лемма 1.7. *Имеют место следующие равенства:*

$$\begin{aligned}
&\Phi_0 \equiv 1, \quad \Phi_1 \equiv 0, \quad \Phi_2 = -\frac{1}{2^2}\,\mathfrak{S}_2, \quad \Phi_3 = \frac{1}{3^2}\,\mathfrak{S}_3,\\
&\Phi_4 = -\frac{11}{2^6\cdot 3}\,\mathfrak{S}_4 + \frac{1}{2^5}\,\mathfrak{S}_2^2, \quad \Phi_5 = \frac{19}{2^3\cdot 3\cdot 5^2}\,\mathfrak{S}_5 - \frac{1}{2^2\cdot 3^2}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3,\\
&\Phi_6 = -\frac{11\cdot 43}{2^6\cdot 3^4\cdot 5}\,\mathfrak{S}_6 + \frac{11}{2^8\cdot 3}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4 + \frac{1}{2\cdot 3^4}\,\mathfrak{S}_3^2 - \frac{1}{2^7\cdot 3}\,\mathfrak{S}_2^3,\\
&\Phi_7 = \frac{229}{2^4\cdot 3^3\cdot 7^2}\,\mathfrak{S}_7 - \frac{19}{2^5\cdot 3\cdot 5^2}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_5 - \frac{11}{2^6\cdot 3^3}\,\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4 + \frac{1}{2^5\cdot 3^2}\,\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_3.
\end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим через ϖ_n коэффициенты разложения в ряд функции $\varphi(v)$, так что

$$\varphi(v) \,=\, e^{-v}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{v^m}{(m!)^2} \,=\, \sum_{n=0}^{+\infty}\varpi_n\, v^n.$$

Тогда несложно проверить, что

$$\varpi_0 = 1, \quad \varpi_1 = 0, \quad 2!\,\varpi_2 = -\frac{1}{2}, \quad 3!\,\varpi_3 = \frac{2}{3}, \quad 4!\,\varpi_4 = -\frac{5}{8},$$

$$5!\,\varpi_5 = \frac{7}{15}, \quad 6!\,\varpi_6 = -\frac{37}{144}, \quad 7!\,\varpi_7 = \frac{17}{420},$$

и вообще,

$$n!\,\varpi_n \,=\, (-1)^n\sum_{m\,=\,0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}\binom{n}{m}.$$

Перемножая разложения для $\varphi(z/p)$ по всем $p\leqslant x$, получим:

$$\Phi(z) = \prod_{p\leqslant x}\sum_{m=0}^{+\infty}\varpi_m\left(\frac{z}{p}\right)^m = \sum_{r\geqslant 0}\;\sum_{m_1,\ldots,m_r\geqslant 0}\;\sum_{p_1<\ldots<p_r\leqslant x}\frac{\varpi_{m_1}\ldots\varpi_{m_r}}{p_1^{m_1}\ldots p_r^{m_r}}\,z^{m_1+\ldots+m_r},$$

откуда

$$\Phi_n \,=\, \sum_{0\leqslant r\leqslant n}\;\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_r=n\\ m_1,\ldots,m_r\geqslant 0}}\varpi_{m_1}\ldots\varpi_{m_r}\,T_{m_1,\ldots,m_r},$$

где

$$T_{m_1,\ldots,m_r} \,=\, \sum_{p_1<\ldots<p_r\leqslant x}\left(p_1^{m_1}\ldots p_r^{m_r}\right)^{-1}.$$

Поскольку $\varpi_1 = 0$, ненулевой вклад в Φ_n дают лишь те слагаемые, что отвечают наборам $m_1, \ldots, m_r$, не содержащим единиц, т.е. таким, у которых $m_j = 0$ или $m_j\geqslant 2$ для всех j. Пусть s - число ненулевых компонент такого набора, и пусть

$\alpha_1,\dots,\alpha_s$ - сами компоненты, записанные с сохранением порядка следования. Так как $\alpha_1,\dots,\alpha_s\geqslant 2$, то $n=\alpha_1+\ldots+\alpha_s\geqslant 2s$, откуда как необходимое условие при $n\geqslant 2$ получаем неравенство: $1\leqslant s\leqslant\frac{n}{2}$. Следовательно,

$$\Phi_n\;=\sum_{1\leqslant s\leqslant\frac{n}{2}}\;\sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_s=n\\ \alpha_1,\dots,\alpha_s\geqslant 2}}\varpi_{\alpha_1}\dots\varpi_{\alpha_s}\,T_{\alpha_1,\dots,\alpha_s}. \tag{1.17}$$

Таким образом,

$$\Phi_2=\varpi_2\,T_2=\varpi_2\,\mathfrak{S}_2=-\frac{1}{4}\,\mathfrak{S}_2,\quad \Phi_3=\varpi_3\,T_3=\varpi_3\,\mathfrak{S}_3=\frac{1}{9}\,\mathfrak{S}_3.$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned}
&\Phi_4=\varpi_4\,T_4+\varpi_2^2\,T_{2,2},\quad \Phi_5=\varpi_5\,T_5+\varpi_2\,\varpi_3\big(T_{2,3}+T_{3,2}\big),\\
&\Phi_6=\varpi_6\,T_6+\varpi_3^2\,T_{3,3}+\varpi_2\,\varpi_4\big(T_{2,4}+T_{4,2}\big)+\varpi_2^3\,T_{2,2,2},\\
&\Phi_7=\varpi_7\,T_7+\varpi_2\,\varpi_5\big(T_{2,5}+T_{5,2}\big)+\varpi_3\,\varpi_4\big(T_{3,4}+T_{4,3}\big)+\varpi_2^2\,\varpi_3\big(T_{2,2,3}+T_{2,3,2}+T_{3,2,2}\big).
\end{aligned}$$

Пусть α и β - произвольные натуральные числа. Тогда

$$\mathfrak{S}_\alpha\mathfrak{S}_\beta=\sum_{p,q\leqslant x}\frac{1}{p^\alpha q^\beta}\;=\;\sum_{p<q\leqslant x}\frac{1}{p^\alpha q^\beta}+\sum_{q<p\leqslant x}\frac{1}{q^\beta p^\alpha}+\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p^{\alpha+\beta}}=T_{\alpha,\beta}+T_{\beta,\alpha}+\mathfrak{S}_{\alpha+\beta},$$

откуда

$$T_{\alpha,\beta}+T_{\beta,\alpha}\;=\;\mathfrak{S}_\alpha\mathfrak{S}_\beta\;-\;\mathfrak{S}_{\alpha+\beta}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_\alpha^2\mathfrak{S}_\beta\;&=\;\sum_{p,q,r\leqslant x}\frac{1}{p^\alpha q^\alpha r^\beta}\;=\;\Big\{\sum_{p<q\leqslant x}+\sum_{q<p\leqslant x}\Big\}\frac{1}{p^\alpha q^\alpha}\sum_{r\leqslant x}\frac{1}{r^\beta}+\sum_{p,r\leqslant x}\frac{1}{p^{2\alpha}r^\beta}\;=\\
&=\;2\sum_{p<q\leqslant x}\sum_{r\leqslant x}\frac{1}{p^\alpha q^\alpha r^\beta}+\sum_{p<r\leqslant x}\frac{1}{p^{2\alpha}r^\beta}+\sum_{r<p\leqslant x}\frac{1}{r^\beta p^{2\alpha}}+\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p^{2\alpha+\beta}}\;=\\
=\;2\Big\{&\sum_{r<p<q\leqslant x}\frac{1}{r^\beta p^\alpha q^\alpha}+\sum_{p<q\leqslant x}\frac{1}{p^{\alpha+\beta}q^\alpha}+\sum_{p<r<q\leqslant x}\frac{1}{p^\alpha r^\beta q^\alpha}+\sum_{p<q\leqslant x}\frac{1}{p^\alpha q^{\alpha+\beta}}+\sum_{p<q<r\leqslant x}\frac{1}{p^\alpha q^\alpha r^\beta}\Big\}\\
&+T_{2\alpha,\beta}+T_{\beta,2\alpha}+\mathfrak{S}_{2\alpha+\beta}\;=\\
&=\;2\big(T_{\beta,\alpha,\alpha}+T_{\alpha+\beta,\alpha}+T_{\alpha,\beta,\alpha}+T_{\alpha,\alpha+\beta}+T_{\alpha,\alpha,\beta}\big)+T_{2\alpha,\beta}+T_{\beta,2\alpha}+\mathfrak{S}_{2\alpha+\beta},
\end{aligned}$$

так что

$$T_{\alpha,\alpha,\beta}+T_{\alpha,\beta,\alpha}+T_{\beta,\alpha,\alpha}\;=\;\frac{1}{2}\,\big(\mathfrak{S}_\alpha^2\mathfrak{S}_\beta\;-\;\mathfrak{S}_{2\alpha}\mathfrak{S}_\beta\big)+\mathfrak{S}_{2\alpha+\beta}-\mathfrak{S}_\alpha\mathfrak{S}_{\alpha+\beta}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&T_{2,2}=\frac{1}{2}\,(\mathfrak{S}_2^2-\mathfrak{S}_4),\quad T_{3,3}=\frac{1}{2}\,(\mathfrak{S}_3^2-\mathfrak{S}_6),\\
&T_{2,3}+T_{3,2}=\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3-\mathfrak{S}_5,\quad T_{2,4}+T_{4,2}=\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4-\mathfrak{S}_6,\\
&T_{2,5}+T_{5,2}=\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_5-\mathfrak{S}_7,\quad T_{3,4}+T_{4,3}=\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4-\mathfrak{S}_7,\\
&T_{2,2,2}=\frac{1}{6}\,\mathfrak{S}_2^3-\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4+\frac{1}{3}\,\mathfrak{S}_6,
\end{aligned}$$

и, наконец,

$$T_{2,2,3}+T_{2,3,2}+T_{3,2,2} \;=\; \frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_3-\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_5-\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4+\mathfrak{S}_7.$$

Возвращаясь к выражениям для Φ_n, $n=4,\dots,7$, находим:

$$\begin{aligned}
\Phi_4 &= \varpi_4\,\mathfrak{S}_4+\frac{1}{2}\;\varpi_2^2\big(\mathfrak{S}_2^2\;-\;\mathfrak{S}_4\big)=\Big(\varpi_4-\frac{1}{2}\;\varpi_2^2\Big)\mathfrak{S}_4+\frac{1}{2}\;\varpi_2^2\;\mathfrak{S}_2=-\frac{11}{192}\,\mathfrak{S}_4+\frac{1}{32}\,\mathfrak{S}_2^2;\\
\Phi_5 &= \varpi_5\,\mathfrak{S}_5+\varpi_2\,\varpi_3\big(\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3\;-\;\mathfrak{S}_5\big)=(\varpi_5\;-\;\varpi_2\,\varpi_3)\mathfrak{S}_5+\varpi_2\,\varpi_3\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3=\\
&= \frac{19}{600}\,\mathfrak{S}_5\;-\;\frac{1}{36}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3;\\
\Phi_6 &= \varpi_6\,\mathfrak{S}_6+\frac{1}{2}\;\varpi_3^2\big(\mathfrak{S}_3^2\;-\;\mathfrak{S}_6\big)+\varpi_2\,\varpi_4\big(\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4\;-\;\mathfrak{S}_6\big)+\varpi_2^3\Big(\frac{1}{3}\,\mathfrak{S}_6\;-\;\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4\;+\;\frac{1}{6}\,\mathfrak{S}_2^3\Big)\\
&=\Big(\varpi_6-\frac{1}{2}\;\varpi_3^2-\varpi_2\,\varpi_4+\frac{1}{3}\;\varpi_2^3\Big)\mathfrak{S}_6\;+\;\Big(\varpi_2\,\varpi_4-\frac{1}{2}\;\varpi_2^3\Big)\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4+\\
&+\frac{1}{2}\;\varpi_3^2\,\mathfrak{S}_3^2\;+\;\frac{1}{6}\;\varpi_2^3\,S_2^3\;=\\
&=-\;\frac{473}{25\,920}\,\mathfrak{S}_6\;+\;\frac{11}{768}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4\;+\;\frac{1}{162}\,\mathfrak{S}_3^2\;-\;\frac{1}{384}\,\mathfrak{S}_2^3;\\
\Phi_7 &= \varpi_7\,\mathfrak{S}_7+\varpi_2\,\varpi_5\big(\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_5\;-\;\mathfrak{S}_7\big)+\varpi_3\,\varpi_4\big(\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4\;-\;\mathfrak{S}_7\big)+\\
&+\varpi_2^2\,\varpi_3\Big(\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_3\;-\;\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_5\;+\;\mathfrak{S}_7\;-\;\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4\Big)\;=\;\big(\varpi_7-\varpi_2\,\varpi_5-\varpi_3\,\varpi_4+\varpi_2^2\,\varpi_3\big)\mathfrak{S}_7\\
&+\big(\varpi_2\,\varpi_5\;-\;\varpi_2^2\,\varpi_3\big)\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_5+\Big(\varpi_3\,\varpi_4-\frac{1}{2}\;\varpi_2^2\,\varpi_3\Big)\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4\;+\;\frac{1}{2}\;\varpi_2^2\,\varpi_3\;\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_3\;=\\
&=\frac{229}{21\,168}\,\mathfrak{S}_7\;-\;\frac{19}{2\,400}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_5\;-\;\frac{11}{1\,728}\,\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4\;+\;\frac{1}{288}\,\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_3.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Применённый выше способ нахождения величин Φ_n, $n\leqslant 7$, оказывается очень трудоёмким уже при сравнительно небольших n. Имея в виду сделать формулы теоремы 1.1 (как, впрочем, и формулы теорем 1.2, 1.3) пригодными для вычислений, ниже мы приводим описание алгоритма, который позволяет за конечное число шагов найти явное выражение Φ_n в виде полинома от $\mathfrak{S}_2,\dots,\mathfrak{S}_n$.

Предварим описание алгоритма рядом вспомогательных утверждений.

Пусть $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ - набор произвольных натуральных чисел, упорядоченных по возрастанию: $\alpha_1\leqslant\ldots\leqslant\alpha_s$. Обозначим через $Q_{\alpha_1,\dots,\alpha_s}(x)$ (или, короче, через $Q_{\alpha_1,\dots,\alpha_s}$) сумму

$$\sum_{p_1,\dots,\,p_s\,\leqslant\,x}{}'\;\big(p_1^{\alpha_1}\dots p_s^{\alpha_s}\big)^{-1},\tag{1.18}$$

где штрих означает суммирование по всем наборам простых чисел $p_1,\dots,p_s$, не содержащим повторений.

Лемма 1.8. *Справедливо равенство*

$$Q_{\alpha_1,\dots,\alpha_s}\;=\;\nu_1!\dots\nu_m!\sum_{\overline{\beta}}T_{\beta_1,\dots,\,\beta_s},$$

где m - количество различных чисел в наборе $(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$, $\nu_1,\dots,\nu_m$ - их кратности, а суммирование ведётся по всем различным упорядоченным наборам $\overline{\beta}=(\beta_1,\dots,\beta_s)$, которые получаются из $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ перестановкой.

Доказательство. Для любого слагаемого в (1.18) и любой пары простых чисел p_i, p_j имеет место одно из неравенств $p_i < p_j$, $p_j < p_i$. Следовательно, область изменения переменных в (1.18) можно разбить на $s!$ областей, каждая из которых определяется соотношением вида $p_{i_1} < p_{i_2} < \ldots < p_{i_s} \leqslant x$, где $i_1, i_2, \ldots, i_s$ - перестановка чисел $1, 2, \ldots, s$. Соответственно, $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$ распадается на $s!$ сумм вида

$$\sum_{p_{i_1}<p_{i_2}<\ldots<p_{i_s}\leqslant x} \bigl(p_1^{\alpha_1}\ldots p_s^{\alpha_s}\bigr)^{-1} = \sum_{p_{i_1}<p_{i_2}<\ldots<p_{i_s}\leqslant x} \bigl(p_1^{\alpha_{i_1}}\ldots p_s^{\alpha_{i_s}}\bigr)^{-1} = T_{\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_s}}.$$

Поскольку среди чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ могут встретиться одинаковые, некоторые из этих $s!$ сумм могут совпадать друг с другом. Это будет тогда, когда совпадут перестановки $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s})$. Меняя в наборе $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s})$ местами одинаковые элементы, получим $\nu_1! \ldots \nu_m!$ перестановок, совпадающих с исходной. Следовательно, каждая из сумм $T_{\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_s}}$, отвечающих различным перестановкам $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s})$, войдёт в $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$ с коэффициентом $\nu_1! \ldots \nu_m!$. Лемма доказана.

Пример 1.1. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2, 2, 3)$. Имеем тогда:

$$Q_{2,2,3} = \sum_{p_1,p_2,p_3\leqslant x}{}' \bigl(p_1^2 p_2^2 p_3^3\bigr)^{-1} =$$

$$= \Biggl\{ \sum_{p_1<p_2<p_3} + \sum_{p_1<p_3<p_2} + \sum_{p_2<p_1<p_3} + \sum_{p_2<p_3<p_1} + \sum_{p_3<p_1<p_2} + \sum_{p_3<p_2<p_1} \Biggr\} \bigl(p_1^2 p_2^2 p_3^3\bigr)^{-1} =$$

$$= \sum_{q_1<q_2<q_3} \bigl(q_1^2 q_2^2 q_3^3\bigr)^{-1} + \sum_{q_1<q_2<q_3} \bigl(q_1^2 q_3^3 q_2^2\bigr)^{-1} + \sum_{q_1<q_2<q_3} \bigl(q_1^2 q_2^2 q_3^3\bigr)^{-1} +$$
$$+ \sum_{q_1<q_2<q_3} \bigl(q_1^2 q_2^3 q_3^2\bigr)^{-1} + \sum_{q_1<q_2<q_3} \bigl(q_1^3 q_2^2 q_3^2\bigr)^{-1} + \sum_{q_1<q_2<q_3} \bigl(q_1^3 q_2^2 q_3^2\bigr)^{-1} =$$
$$= T_{2,2,3} + T_{2,3,2} + T_{2,2,3} + T_{2,3,2} + T_{3,2,2} + T_{3,2,2} = 2\bigl(T_{2,2,3} + T_{2,3,2} + T_{3,2,2}\bigr). \quad \boxtimes$$

Лемма 1.9. *Сумма $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$ является многочленом от величин $\mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$, где $n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s$.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по s. Если $s = 1$, то

$$Q_\alpha = \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p^\alpha} = \mathfrak{S}_\alpha$$

и утверждение леммы очевидно.

Предположим, что утверждение проверено для всех $s \leqslant m$ и докажем его для $s = m + 1$. Рассмотрим произвольный набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1})$ с условием $\alpha_i \geqslant 2$, $i = 1, \ldots, m + 1$. При перемножении выражений

$$\mathfrak{S}_{\alpha_1} = \sum_{p_1\leqslant x} p_1^{-\alpha_1}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{S}_{\alpha_{m+1}} = \sum_{p_{m+1}\leqslant x} p_{m+1}^{-\alpha_{m+1}}$$

получим сумму

$$\sum_{p_1,\ldots,p_{m+1}\leqslant x} \bigl(p_1^{\alpha_1}\ldots p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}\bigr)^{-1},$$

все слагаемые которой разобьём на два класса. К первому отнесём те, что отвечают наборам $(p_1, \ldots, p_{m+1})$, не содержащим повторений. Ко второму классу отнесём все остальные слагаемые.

Слагаемые первого класса образуют сумму $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1}}$.

Всякое же слагаемое второго класса отвечает набору, содержащему по крайней мере два одинаковых простых числа и потому может быть записано в виде $\left(q_1^{\beta_1} \ldots q_r^{\beta_r}\right)^{-1}$, где число r сомножителей, отвечающих различным простым числам $q_1, \ldots, q_r$, строго меньше s: $r \leqslant s-1 = m$.

Следовательно, все слагаемые второго класса можно распределить по суммам $Q_{\beta_1,\ldots,\beta_r}$, где $1 \leqslant r \leqslant s-1 = m$. В силу предположения индукции каждая из таких сумм является полиномом от величин $\mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$. Поэтому и $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1}}$, как разность между мономом $\mathfrak{S}_{\alpha_1} \ldots \mathfrak{S}_{\alpha_{m+1}}$ и слагаемыми второго класса, также будет полиномом от $\mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$. Лемма (а вместе с нею - и теорема 1.1) доказана.

Анализ предыдущего доказательства обнаруживает следующее. Возникающие при группировке слагаемых второго класса суммы $Q_{\beta_1,\ldots,\beta_r}$ отвечают наборам $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$, которые получились из набора $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ путём замены некоторых его компонент $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ одной, равной их сумме $\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k}$ (или же многократным повторением этой операции). Для всякого набора $\overline{\beta}$, полученного таким образом из $\overline{\alpha}$, будем писать: $\overline{\beta} \prec \overline{\alpha}$.

Далее, выражение для суммы $Q_{\beta_1,\ldots,\beta_r}$ содержит лишь один моном, равный произведению r величин из числа $\mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$, а именно моном $\mathfrak{S}_{\beta_1} \ldots \mathfrak{S}_{\beta_r}$, причём последний входит в $Q_{\beta_1,\ldots,\beta_r}$ с коэффициентом, равным единице. Следовательно,

$$Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s} = \mathfrak{S}_{\alpha_1} \ldots \mathfrak{S}_{\alpha_s} + \sum_{r=1}^{s-1} \sum_{\overline{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_r)\prec\overline{\alpha}} A_{\overline{\beta}}\, \mathfrak{S}_{\beta_1} \ldots \mathfrak{S}_{\beta_r}, \tag{1.19}$$

где $A_{\overline{\beta}}$ - некоторые числа, не зависящие от $\mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ и x.

Укажем теперь на связь величин Φ_n с суммами $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$.

При доказательстве леммы 1.7 была получена формула

$$\Phi_n = \sum_{1 \leqslant s \leqslant \frac{n}{2}} \sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_s=n \\ \beta_1,\ldots,\beta_s \geqslant 2}} \varpi_{\beta_1} \ldots \varpi_{\beta_s} T_{\beta_1,\ldots,\beta_s},$$

в которой суммирование ведётся по всем упорядоченным наборам $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$ - решениям уравнения

$$\beta_1 + \ldots + \beta_s = n \tag{1.20}$$

с условием $\beta_1, \ldots, \beta_s \geqslant 2$. Приведём во внутренней сумме подобные слагаемые, собирая вместе те, что отвечают различным перестановкам $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$ одного и того же решения $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ уравнения (1.20), компоненты которого упорядочены по возрастанию: $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_s$.

Для всех таких наборов $\overline{\beta}$ произведение $\varpi_{\beta_1} \ldots \varpi_{\beta_s}$ имеет одно и то же значение $\varpi_{\alpha_1} \ldots \varpi_{\alpha_s}$. Сумма же величин $T_{\beta_1,\ldots,\beta_s}$ совпадает, в силу леммы 1.8, с величиной $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$, делённой на $\nu_1! \ldots \nu_m!$, где m - число различных элементов в наборе $\overline{\alpha}$, а $\nu_1, \ldots, \nu_m$ - их кратности. Таким образом,

$$\Phi_n = \sum_{1 \leqslant s \leqslant \frac{n}{2}} {\sum_{\overline{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}}' \frac{\varpi_{\alpha_1} \ldots \varpi_{\alpha_s}}{\nu_1! \ldots \nu_m!}\, Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s},$$

где штрих означает суммирование по всем разбиениям числа n на s слагаемых, превосходящих единицу, причём разбиения, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования слагаемых, считаются одинаковыми.

Пример 1.2. В случае $n = 8$ имеем разбиения: $n = 8 = 2{+}6 = 3{+}5 = 4{+}4 = 2+2+4 = 2+3+3 = 2+2+2+2$. Следовательно,

$$\Phi_8 = \varpi_8 T_8 + \varpi_2\,\varpi_6\big(T_{2,6}+T_{6,2}\big) + \varpi_3\,\varpi_5\big(T_{3,5}+T_{5,3}\big) + \varpi_4^2\,T_{4,4} + \\ + \varpi_2^2\,\varpi_4\big(T_{2,2,4}+T_{2,4,2}+T_{4,2,2}\big) + \varpi_2\,\varpi_3^2\big(T_{2,3,3}+T_{3,2,3}+T_{3,3,2}\big) + \varpi_2^4\,T_{2,2,2,2}.$$

Пользуясь введёнными выше обозначениями, получаем следующую таблицу:

$\overline{\beta}$	m	$\nu_1,\dots,\nu_m$	$\nu_1!\dots\nu_m!$
(8)	1	$\nu_1 = 1$	1
(2,6)	2	$\nu_1 = \nu_2 = 1$	1
(3,5)	2	$\nu_1 = \nu_2 = 1$	1
(4,4)	1	$\nu_1 = 2$	2
(2,2,4)	2	$\nu_1 = 2, \nu_2 = 1$	2
(2,3,3)	2	$\nu_1 = 1, \nu_2 = 2$	2
(2,2,2,2)	1	$\nu_1 = 4$	24

Окончательно находим:

$$\Phi_8 = \varpi_8\,Q_8 + \varpi_2\,\varpi_6\,Q_{2,6} + \varpi_3\,\varpi_5\,Q_{3,5} + \frac{1}{2}\,\varpi_4^2\,Q_{4,4} + \frac{1}{2}\,\varpi_2^2\,\varpi_4\,Q_{2,2,4} + \\ + \frac{1}{2}\,\varpi_2\,\varpi_3^2\,Q_{2,3,3} + \frac{1}{24}\,\varpi_2^4\,Q_{2,2,2,2}. \quad \boxtimes \quad (1.21)$$

Таким образом, для того, чтобы выразить коэффициент Φ_n через $\mathfrak{S}_2,\dots,\mathfrak{S}_n$, достаточно отыскать способ вычисления коэффициентов $A_{\overline{\beta}}$ в формуле (1.19). Для этой цели мы составим систему линейных уравнений относительно неизвестных $A_{\overline{\beta}}$, имеющую единственное решение.

Прежде всего, все мономы $\mathfrak{S}_{\beta_1}\dots\mathfrak{S}_{\beta_r}$ в выражении (1.19) расположим так, чтобы: 1) запись начиналась с монома $\mathfrak{S}_{\alpha_1}\dots\mathfrak{S}_{\alpha_s}$; 2) для любых наборов $\overline{\gamma} = (\gamma_1,\dots,\gamma_k)$ и $\overline{\beta} = (\beta_1,\dots,\beta_r)$, связанных соотношением $\overline{\gamma} \prec \overline{\beta}$, моном $\mathfrak{S}_{\beta_1}\dots\mathfrak{S}_{\beta_r}$ предшествовал моному $\mathfrak{S}_{\gamma_1}\dots\mathfrak{S}_{\gamma_k}$.

Опираясь на такой порядок записи мономов, составим матрицу системы с неизвестными $A_{\overline{\beta}}$, подсчитывая, с каким коэффициентом входит в разложение $\mathfrak{S}_{\beta_1}\dots\mathfrak{S}_{\beta_r}$ всякая дробь $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(\overline{\gamma}) = \big(p_1^{\gamma_1}\dots p_k^{\gamma_k}\big)^{-1}$.

Каждая из дробей $\mathfrak{f}(\overline{\gamma})$ не встречается в сумме $Q_{\alpha_1,\dots,\alpha_s}$, но входит в сумму, которая образуется при перемножении мономов $\mathfrak{S}_{\alpha_1},\dots,\mathfrak{S}_{\alpha_s}$.

Далее, дробь $\mathfrak{f}(\overline{\gamma})$ встречается в разложении монома $\mathfrak{S}_{\gamma_1}\dots\mathfrak{S}_{\gamma_k}$ по меньшей мере один раз и не встречается в разложениях следующих по порядку записи мономов $\mathfrak{S}_{\beta_1}\dots\mathfrak{S}_{\beta_r}$. Поэтому матрица системы оказывается нижнетреугольной, причём все элементы её главной диагонали отличны от нуля. Очевидно, система уравнений с такой матрицей имеет единственное решение.

Пример 1.3. Выразим величину $Q = Q_{2,2,2,2}$, которая встречается в формуле

(1.21) для Φ_8, через $\mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_8$. Прежде всего, имеем:

$$(2,2,2,2) \succ (2,2,4) \succ (2,6), (4,4) \succ (8).$$

Следовательно, $Q_{2,2,2,2}$ имеет вид

$$\mathfrak{S}_2^4 + A\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_4 + B\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6 + C\mathfrak{S}_4^2 + D\mathfrak{S}_8$$

(вместо $A_{\overline{\beta}}$ для краткости будем использовать буквы A, B и т. д.). Заполним следующую таблицу, в которой на пересечении строки, отвечающей набору $\overline{\gamma}$ (и дроби $\mathfrak{f}(\overline{\gamma})$), и столбца, отвечающего моному $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\beta_1} \dots \mathfrak{S}_{\beta_2}$, стоит коэффициент, с которым $\mathfrak{f}(\overline{\gamma})$ входит в $\mathfrak{M}$:

$\overline{\gamma}$	$\mathfrak{f}^{-1}(\overline{\gamma})$	$\mathfrak{S}_2^4$	$\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6$	$\mathfrak{S}_4^2$	$\mathfrak{S}_8$	Q
(2,2,4)	$p_1^2p_2^2p_3^4$	12	2	0	0	0	0
(2,6)	$p_1^2p_2^6$	4	2	1	0	0	0
(4,4)	$p_1^4p_2^4$	6	2	0	2	0	0
(8)	p_1^8	1	1	1	1	1	0

Действительно, дробь $(p_1^2p_2^2p_3^4)^{-1}$ не встречается в разложениях $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6$, $\mathfrak{S}_4^2$ и $\mathfrak{S}_8$, дробь $(p_1^2p_2^6)^{-1}$ - в разложениях $\mathfrak{S}_4^2$, $\mathfrak{S}_8$, дробь $(p_1^4p_2^4)^{-1}$ - в разложениях $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6$, $\mathfrak{S}_8$, поэтому соответствующие ячейки таблицы заполняются нулями. Далее, сумма $\mathfrak{S}_2^4$ имеет вид

$$\sum_{q_1,\dots,q_4 \leqslant x} \left(q_1^2q_2^2q_3^2q_4^2\right)^{-1}.$$

Фиксируя различные простые числа p_1, p_2, p_3, подсчитаем число наборов q_1, q_2, q_3, q_4, для которых дробь $\left(q_1^2q_2^2q_3^2q_4^2\right)^{-1}$ совпадёт с дробью $\left(p_1^2p_2^2p_3^4\right)^{-1}$. Ясно, что это число равно количеству решений уравнения

$$q_1^2q_2^2q_3^2q_4^2 = p_1^2p_2^2p_3^4 \tag{1.22}$$

в простых $q_1, \dots, q_4$. Очевидно, что два числа из q_i должны совпадать с p_3. Выбор этой пары можно осуществить $\binom{4}{2} = 6$ способами. Из двух оставшихся q_i одно должно равняться p_1, а другое – p_2, так что выбрать значения для них можно 2 способами. Значит, общее число решений (1.22) составит $6 \cdot 2 = 12$.

Рассуждая аналогично, убеждаемся, что коэффициент, с которым дробь $\left(p_1^2p_2^2p_3^4\right)^{-1}$ входит в $\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_4$, равен числу решений уравнения $q_1^2q_2^2q_3^4 = p_1^2p_2^2p_3^4$. Так как его решения исчерпываются наборами (p_1, p_2, p_3) и (p_2, p_1, p_3), то искомый коэффициент равен 2.

Далее, несложно проверить, что уравнения

$$q_1^2q_2^2q_3^2q_4^2 = p_1^2p_2^6, \quad q_1^2q_2^2q_3^4 = p_1^2p_2^6, \quad q_1^2q_2^6 = p_1^2p_2^6$$

имеют 4, 2 и 1 решение, соответственно. Эти числа помещаются во вторую строку таблицы.

Третья строка таблицы будет содержать числа решений уравнений

$$q_1^2q_2^2q_3^2q_4^2 = p_1^4p_2^4, \quad q_1^2q_2^2q_3^4 = p_1^4p_2^4, \quad q_1^2q_2^6 = p_1^4p_2^4,$$

т.е. 6, 2 и 2.

Замечая, наконец, что каждое из уравнений

$$q_1^2q_2^2q_3^2q_4^2 \,=\, p_1^8, \quad q_1^2q_2^2q_3^4 \,=\, p_1^8, \quad q_1^2q_2^6 \,=\, p_1^8$$

имеет единственное решение, все компоненты которого совпадают с p_1, последнюю строку заполняем единицами.

Поскольку ни одна из рассмотренных выше дробей не встречается в сумме Q, то последний столбец таблицы будет содержать лишь нули; система же уравнений принимает вид

$$\begin{cases} 12 + 2A & = 0 \\ 4 + 2A + B & = 0 \\ 6 + 2A + 2C & = 0 \\ 1 + A + B + C + D & = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $A = -6, B = 8, C = 3, D = -6$ и

$$Q_{2,2,2,2} = \mathfrak{S}_2^4 \,-\, 6\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_4 \,+\, 8\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6 \,+\, 3\mathfrak{S}_4^2 \,-\, 6\mathfrak{S}_8.$$

Последнее соотношение наряду с формулой (1.21) позволяет вычислить Φ_8. Действительно, из формул леммы 1.7 следуют равенства

$$\begin{aligned} Q_{2,6} \,&=\, \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6 - \mathfrak{S}_8, \quad Q_{3,5} \,=\, \mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_5 - \mathfrak{S}_8, \quad Q_{4,4} \,=\, \mathfrak{S}_4^2 - \mathfrak{S}_8, \\ Q_{2,2,4} \,&=\, 2\big(T_{2,2,4} + T_{2,4,2} + T_{4,2,2}\big) \,=\, \mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_4 - 2\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6 - \mathfrak{S}_4^2 + 2\mathfrak{S}_8, \\ Q_{2,3,3} \,&=\, 2\big(T_{2,3,3} + T_{3,2,3} + T_{3,3,2}\big) \,=\, \mathfrak{S}_3^2\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6 - 2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_5 + 2\mathfrak{S}_8. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулу (1.21), получим:

$$\begin{aligned} \Phi_8 \,=\, \mathfrak{S}_8\Big(\varpi_8 - \varpi_2\,\varpi_6 - \varpi_3\,\varpi_5 - \frac{1}{2}\,\varpi_4^2 + \varpi_2^2\,\varpi_4 + \varpi_2\,\varpi_3^2 - \frac{1}{4}\,\varpi_2^4\Big) \,+ \\ + \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6\Big(\varpi_2\,\varpi_6 - \varpi_2^2\,\varpi_4 - \frac{1}{2}\,\varpi_2\,\varpi_3^2 + \frac{1}{3}\,\varpi_2^4\Big) + \mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_5\Big(\varpi_3\,\varpi_5 - \varpi_2\,\varpi_3^2\Big) + \\ + \mathfrak{S}_4^2\Big(\frac{1}{2}\,\varpi_4^2 - \frac{1}{2}\,\varpi_2^2\,\varpi_4 + \frac{1}{8}\,\varpi_2^4\Big) + \mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_4\Big(\frac{1}{2}\,\varpi_2^2\,\varpi_4 - \frac{1}{4}\,\varpi_2^4\Big) + \\ + \frac{1}{2}\,\varpi_2\,\varpi_3^2\,\mathfrak{S}_3^2\mathfrak{S}_2 + \frac{1}{24}\,\varpi_2^4\,\mathfrak{S}_2^4 = \\ = -\frac{167\cdot607}{2^{14}\cdot3^3\cdot5\cdot7}\,\mathfrak{S}_8 \,+\, \frac{11\cdot43}{2^8\cdot3^4\cdot5}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6 \,+\, \frac{19}{2^3\cdot3^3\cdot5^2}\,\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_5 \,+\, \frac{11^2}{2^{13}\cdot3^2}\,\mathfrak{S}_4^2 - \\ - \frac{11}{2^{11}\cdot3}\,\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_4 \,-\, \frac{1}{2^3\cdot3^4}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3^2 \,+\, \frac{1}{2^{11}\cdot3}\,\mathfrak{S}_2^4. \quad \boxtimes \end{aligned}$$

Чтобы завершить описание алгоритма вычисления Φ_n в общем случае, остаётся указать способ подсчёта коэффициента, с которым дробь $\big(q_1^{\beta_1}\dots q_r^{\beta_r}\big)^{-1}$ входит в сумму, возникающую при перемножении величин $\mathfrak{S}_{\alpha_1}, \dots, \mathfrak{S}_{\alpha_s}$, т.е. в сумму

$$\sum_{p_1,\dots,p_s \,\leqslant\, x} \big(p_1^{\alpha_1}\dots p_s^{\alpha_s}\big)^{-1}.$$

Несложно видеть, что этот коэффициент совпадает с числом $\mathcal{N}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ решений уравнения

$$p_1^{\alpha_1}\dots p_s^{\alpha_s} \,=\, q_1^{\beta_1}\dots q_r^{\beta_r} \tag{1.23}$$

в простых числах $p_1, \ldots, p_s$. Для нахождения $\mathcal{N}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ нам потребуется ряд новых понятий.

Разбиением вектора $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ с натуральными компонентами β_i назовём представление каждой из его компонент суммою натуральных чисел:

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_{u_1} + \ldots + \alpha_{v_1} \\ \ldots \\ \beta_r = \alpha_{u_r} + \ldots + \alpha_{v_r}. \end{cases} \tag{1.24}$$

Представления, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования слагаемых α_i, считаются одинаковыми.

Если $\overline{\alpha}$ – произвольный вектор, компонентами которого являются все слагаемые $\alpha_{u_1}, \ldots, \alpha_{v_r}$, фигурирующие в правых частях (1.24), то из (1.24) следует, что $\overline{\beta} \prec \overline{\alpha}$ (или же $\overline{\beta} = \overline{\alpha}$). Для двух векторов $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$, связанных условием $\overline{\beta} \prec \overline{\alpha}$, через $\mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ обозначим множество всех разбиений вектора $\overline{\beta}$ на слагаемые, являющиеся компонентами вектора $\overline{\alpha}$.

Пример 1.4. Пусть $\overline{\alpha} = (2, 2, 2, 3, 3)$, $\overline{\beta} = (6, 6)$. Тогда $\mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ состоит из разбиений π_1 и π_2, которые задаются системами равенств:

$$\pi_1 : \begin{cases} \beta_1 = 6 = 2 + 2 + 2, \\ \beta_2 = 6 = 3 + 3; \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} \beta_1 = 6 = 3 + 3, \\ \beta_2 = 6 = 2 + 2 + 2. \end{cases} \quad \boxtimes$$

Обозначим через $\mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ множество тех разбиений вектора $\overline{\beta}$ из $\mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$, которые не могут быть получены друг из друга перестановкой правых частей равенств (1.24).

Пример 1.5. Для векторов $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ из предыдущего примера множество $\mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ состоит из единственного разбиения π,

$$\pi : \begin{cases} \beta_1 = 6 = 2 + 2 + 2, \\ \beta_2 = 6 = 3 + 3. \end{cases}$$

Если $\overline{\alpha} = (2, 2, 2, 3, 3, 4)$, $\overline{\beta} = (4, 6, 6)$, то $\mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ состоит из двух разбиений:

$$\pi_1 : \begin{cases} 4 = 4, \\ 6 = 3 + 3, \\ 6 = 2 + 2 + 2; \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} 4 = 2 + 2, \\ 6 = 2 + 4, \\ 6 = 3 + 3. \end{cases} \quad \boxtimes$$

Зафиксируем произвольное разбиение $\pi \in \mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ вектора $\overline{\beta}$ и подсчитаем число различных разбиений π', которые могут быть получены из π перестановкой правых частей (1.24).

Пусть β - произвольное число из набора $\beta_1, \ldots, \beta_r$. Рассмотрим все равенства системы (1.24), левая часть которых совпадает с β. Пусть l - число различных типов среди этих равенств (два равенства относятся к разным типам, если они не могут быть получены друг из друга изменением порядка слагаемых), и пусть $m_1, \ldots, m_l$ - их кратности. Новые разбиения из множества $\mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ получим, меняя местами

правые части равенств, которые принадлежат к разным типам. Число таких перестановок равно

$$\frac{(m_1 + \ldots + m_l)!}{m_1! \ldots m_l!}.$$

Общее же число разбиений, которые получаются таким образом из π, равно

$$\mathcal{N}_1(\pi) = \prod_{\beta} \frac{(m_1 + \ldots + m_l)!}{m_1! \ldots m_l!},$$

где произведение берётся по всем различным элементам набора $\beta_1, \ldots, \beta_r$.

Пример 1.6. Рассмотрим разбиения π_1 и π_2 из примера 1.5. Для первого разбиения и элемента $\beta = 4$ имеем, очевидно: $l = 1$, $m_1 = 1$; если же $\beta = 6$, то $l = 2, m_1 = m_2 = 1$. Следовательно,

$$\mathcal{N}_1(\pi_1) = \frac{1!}{1!} \cdot \frac{(1+1)!}{1!\,1!} = 2.$$

Аналогично, $\mathcal{N}_1(\pi_2) = 2$. Общее же число разбиений в $\mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ равно $\mathcal{N}_1(\pi_1) + \mathcal{N}_1(\pi_2) = 4$. $\boxtimes$

Вернёмся теперь к подсчёту числа решений уравнения (1.23). Пусть $\pi \in \mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ - произвольное разбиение вектора $\overline{\beta}$, и пусть этому разбиению отвечает система (1.24). Представим правую часть в виде

$$q_1^{\alpha_{u_1} + \ldots + \alpha_{v_1}} \ldots q_r^{\alpha_{u_r} + \ldots + \alpha_{v_r}} = \left(q_1^{\alpha_{u_1}} \ldots q_1^{\alpha_{v_1}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(q_r^{\alpha_{u_r}} \ldots q_r^{\alpha_{v_r}}\right).$$

Упорядочивая соответствующим образом множители в левой части (1.21), получим:

$$\left(p_{u_1}^{\alpha_{u_1}} \ldots p_{v_1}^{\alpha_{v_1}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_{u_r}^{\alpha_{u_r}} \ldots p_{v_r}^{\alpha_{v_r}}\right) = \left(q_1^{\alpha_{u_1}} \ldots q_1^{\alpha_{v_1}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(q_r^{\alpha_{u_r}} \ldots q_r^{\alpha_{v_r}}\right). \tag{1.25}$$

Очевидно, что следующий набор будет решением исходного уравнения:

$$\begin{cases} p_{u_1} = \ldots = p_{v_1} & = q_1, \\ \ldots & \ldots \\ p_{u_r} = \ldots = p_{v_r} & = q_r. \end{cases} \tag{1.26}$$

Найденное решение порождает целую серию новых. Действительно, зафиксируем произвольное число α из набора $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и выделим в каждой из скобок правой части (1.25) все множители q_i^{α}.

Меняя любые два из них местами, но сохраняя при этом порядок следования множителей p_i в левой части, будем получать новые наборы $(p_1, \ldots, p_s)$, которые так же являются решениями (1.23). Некоторые из этих наборов совпадут с решением (1.26). Это будет, если местами поменяются два одинаковых множителя $q_i^{\alpha}, q_i^{\alpha}$. К новым решениям приведут лишь те перестановки, которые меняют местами множители q_i^{α} и q_j^{α}, отвечающие различным простым числам q_i, q_j.

Найдём число таких перестановок. Предположим, что показатель α встречается в пределах первой скобки k_1 раз, ..., в пределах r-й скобки – k_r раз (иначе говоря,

$k_j = k_j(\alpha)$ равно числу слагаемых в правой части j-го уравнения системы (1.24), равных α). Тогда искомое число перестановок равно

$$\frac{(k_1 + \ldots + k_r)!}{k_1! \ldots k_r!}.$$

Общее же число различных решений, которые можно таким образом получить из (1.26), равно

$$\mathcal{N}_2(\pi) = \prod_{\alpha} \frac{(k_1 + \ldots + k_r)!}{k_1! \ldots k_r!},$$

где произведение берётся по всем различным элементам набора $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$.

Отметим, что перестановка множителей q_i^α и q_j^α и полученное таким образом решение $p_1, \ldots, p_s$ не меняют вид разбиения (1.24). Действительно, эта операция равносильна перестановке в правых частях системы (1.24) двух одинаковых слагаемых $\alpha_u = \alpha_v = \alpha$, стоящих в разных строках.

Далее, так как произведение $\mathcal{N}_2(\pi)$ не зависит от порядка записи равенств в (1.24), то его значение будет одним и тем же для всех разбиений $\pi' \in \mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$, которые получаются из заданного разбиения $\pi \in \mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$. Так как общее число разбиений π', получающихся из $\pi \in \mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$, равно $\mathcal{N}_1(\pi)$, то, с учётом сказанного выше, можно указать

$$\sum_{\pi \in \mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})} \mathcal{N}_1(\pi)\mathcal{N}_2(\pi)$$

решений уравнения (1.23).

Покажем, что иных решений уравнения (1.23), отличных от тех, что получаются в ходе описанной выше процедуры, нет.

Напомним, что в ходе её сначала производился перебор всех разбиений π вектора $\overline{\beta}$ из множества $\mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$. Для каждого из них перестановкой равенств в системе (1.24) было построено $\mathcal{N}_1(\pi)$ различных разбиений из $\mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$. Наконец, по каждому из $\mathcal{N}_1(\pi)$ решений, отвечающих этим разбиениям, перестановкой множителей q_i^α и q_j^α, $i \neq j$, строилось $\mathcal{N}_2(\pi)$ новых.

Пусть теперь $p_1, \ldots, p_s$ - произвольное решение (1.23). В силу основной теоремы арифметики каждое из неизвестных p_i не может принимать значения, отличные от $q_1, \ldots, q_r$. Но тогда, группируя вместе в произведении $p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$ множители p_i, равные q_1, затем – множители p_i, равные q_2 и т.д. до множителей, равных q_r, получим равенство

$$\left(p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots p_{j_1}^{\alpha_{j_1}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_{i_r}^{\alpha_{i_r}} \ldots p_{j_r}^{\alpha_{j_r}}\right) = q_1^{\beta_1} \ldots q_r^{\beta_r},$$

в котором

$$\begin{cases} p_{i_1} = \ldots = p_{j_1} & = q_1, \\ \ldots & \ldots \\ p_{i_r} = \ldots = p_{j_r} & = q_r, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{j_1} \\ \ldots \\ \beta_r = \alpha_{i_r} + \ldots + \alpha_{j_r}. \end{cases} \tag{1.27}$$

Система (1.27) задаёт разбиение $\pi \in \mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$. Такое разбиение необходимо окажется в числе рассмотренных в ходе описанной процедуры построения решений. Соответствующая система равенств типа (1.24), отвечающая разбиению π, возникающему в ходе построения решений, будет отличаться от системы (1.27) разве что перестановкой чисел α_i, имеющих разные индексы, одинаковые значения и стоящих в разных строках системы. Но все такие перестановки также учитываются в ходе построения решений. Следовательно, в их числе окажется и система (1.27) вместе с отвечающим ей решением $p_1, \ldots, p_s$. Итак, всякое решение (1.23) будет найдено описанным выше образом.

Остаётся лишь заметить, что все построенные решения различны. Очевидно, что различными будут решения, отвечающие разным разбиениям $\pi \in \mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$, так как в противном случае им отвечала бы одна и та же система (1.24) и, следовательно, одно и то же разбиение. Далее, решения, которые отвечают одному и тому же разбиению $\pi \in \mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ и получаются перестановкой множителей q_i^α, q_j^α, также различны, поскольку всякая такая перестановка означает перестановку различных по значению компонент в наборе $p_1, \ldots, p_s$.

Таким образом, для числа решений уравнения (1.23) имеем формулу:

$$\mathcal{N}(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \;=\; \sum_{\pi \in \mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})} \mathcal{N}_1(\pi)\mathcal{N}_2(\pi) \;=\; \sum_{\pi \in \mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})} \prod_{\alpha} \frac{(k_1 + \ldots + k_r)!}{k_1! \ldots k_r!} \prod_{\beta} \frac{(m_1 + \ldots + m_l)!}{m_1! \ldots m_l!}.$$

Пример 1.7. Найдём число решений уравнения

$$p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^3 p_5^3 p_6^4 \;=\; 729\,000\,000 \;=\; 5^4 \cdot 3^6 \cdot 2^6.$$

Положим $\overline{\alpha} = (2, 2, 2, 3, 3, 4)$, $\overline{\beta} = (4, 6, 6)$. В примерах 1.5, 1.6 мы нашли, что множество $\mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ состоит из двух разбиений

$$\pi_1 \;:\; \begin{cases} 4 = 4, \\ 6 = 3 + 3, \\ 6 = 2 + 2 + 2, \end{cases} \qquad \pi_2 \;:\; \begin{cases} 4 = 2 + 2, \\ 6 = 2 + 4, \\ 6 = 3 + 3, \end{cases}$$

и что $\mathcal{N}_1(\pi_1) = \mathcal{N}_1(\pi_2) = 2$. Рассмотрим разбиение π_1. Перебирая различные компоненты α вектора $\overline{\alpha}$, получим:

$$\begin{aligned} &\alpha = 2; \quad k_1 = k_2 = 0,\ k_3 = 3, \\ &\alpha = 3; \quad k_1 = 0,\ k_2 = 2,\ k_3 = 0, \\ &\alpha = 4; \quad k_1 = 1,\ k_2 = k_3 = 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\mathcal{N}_2(\pi_1) \;=\; \frac{(0+3+0)!}{0!\,3!\,0!} \frac{(0+0+2)!}{0!\,0!\,2!} \frac{(1+0+0)!}{1!\,0!\,0!} \;=\; 1.$$

Переходя к разбиению π_2, будем иметь:

$$\begin{aligned} &\alpha = 2; \quad k_1 = 2,\ k_2 = 1,\ k_3 = 0, \\ &\alpha = 3; \quad k_1 = k_2 = 0,\ k_3 = 2, \\ &\alpha = 4; \quad k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_3 = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\mathcal{N}_2(\pi_2) \,=\, \frac{(2+1+0)!}{2!\,1!\,0!}\,\frac{(0+0+2)!}{0!\,0!\,2!}\,\frac{(0+1+0)!}{0!\,1!\,0!} \,=\, 3.$$

Таким образом,

$$\mathcal{N}(\overline{\alpha},\overline{\beta}) \,=\, \mathcal{N}_1(\pi_1)\,\mathcal{N}_2(\pi_1) \,+\, \mathcal{N}_1(\pi_2)\,\mathcal{N}_2(\pi_2) \,=\, 8.$$

Итак, исходное уравнение имеет 8 решений. ⊠

На этом завершается описание алгоритма вычисления Φ_n. Описание способов отыскания всех возможных разбиений $\pi \in \mathcal{P}(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ вектора $\overline{\beta}$ выходит за рамки настоящей работы. Для сравнительно небольших значений величины $n = \sum\limits_{i=1}^{s}\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{r}\beta_j$ эта задача успешно решается «ручным» перебором.

Пример 1.8. Применяя этот алгоритм к вычислению коэффициентов Φ_n для $n = 9, 10$, последовательно получим:

$$\begin{aligned}
Q_{2,3,4} \,&=\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4 \,-\, \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_7 \,-\, \mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_6 \,-\, \mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5 \,+\, 2\mathfrak{S}_9,\\
Q_{2,2,2,3} \,&=\mathfrak{S}_2^3\mathfrak{S}_3 \,-\, 3\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_5 \,-\, 3\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4 \,+\, 3\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5 \,+\, 2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_6 \,+\, 6\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_7 \,-\, 6\mathfrak{S}_9,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_9 \,=\, \varpi_9\,Q_9 + \varpi_2\,\varpi_7\,Q_{2,7} + \varpi_3\,\varpi_6\,Q_{3,6} + \varpi_4\,\varpi_5\,Q_{4,5} + \frac{1}{2}\,\varpi_2^2\,\varpi_5\,Q_{2,2,5} + \varpi_2\,\varpi_3\,\varpi_4\,Q_{2,3,4} \,+\\
+\,\frac{1}{6}\,\varpi_3^3\,Q_{3,3,3} \,+\, \frac{1}{6}\,\varpi_2^3\,\varpi_3\,Q_{2,2,2,3} \,=\\
=\,\mathfrak{S}_9\Big(\varpi_9 - \varpi_2\,\varpi_7 - \varpi_3\,\varpi_6 - \varpi_4\,\varpi_5 + \varpi_2^2\,\varpi_5 + 2\,\varpi_2\,\varpi_3\,\varpi_4 + \frac{1}{3}\,\varpi_3^3 - \varpi_2^3\,\varpi_3\Big) \,+\\
+\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_7\big(\varpi_2\,\varpi_7 - \varpi_2^2\,\varpi_5 - \varpi_2\,\varpi_3\,\varpi_4 + \varpi_2^3\,\varpi_3\big) \,+\\
+\,\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_6\Big(\varpi_3\,\varpi_6 - \varpi_2\,\varpi_3\,\varpi_4 - \frac{1}{2}\,\varpi_3^3 + \frac{1}{3}\,\varpi_2^3\,\varpi_3\Big) \,+\\
+\,\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5\Big(\varpi_4\,\varpi_5 - \frac{1}{2}\,\varpi_2^2\,\varpi_5 - \varpi_2\,\varpi_3\,\varpi_4 + \frac{1}{2}\,\varpi_2^3\,\varpi_3\Big) \,+\\
+\,\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_5\Big(\frac{1}{2}\,\varpi_2^2\,\varpi_5 - \frac{1}{2}\,\varpi_2^3\,\varpi_3\Big) \,+\, \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4\Big(\varpi_2\,\varpi_3\,\varpi_4 - \frac{1}{2}\,\varpi_2^3\,\varpi_3\Big) \,+\\
+\,\frac{1}{6}\,\varpi_3^3\,\mathfrak{S}_3^3 \,+\, \frac{1}{6}\,\varpi_2^3\,\varpi_3\,\mathfrak{S}_2^3\mathfrak{S}_3 \,=\\
=\,\frac{19\cdot 31\cdot 1607}{2^{10}\cdot 3^8\cdot 5\cdot 7}\,\mathfrak{S}_9 \,-\, \frac{229}{2^6\cdot 3^3\cdot 7^2}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_7 \,-\, \frac{11\cdot 43}{2^6\cdot 3^6\cdot 5}\,\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_6 \,-\, \frac{11\cdot 19}{2^9\cdot 3^2\cdot 5^2}\,\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5 \,+\\
+\,\frac{19}{2^8\cdot 3\cdot 5^2}\,\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_5 \,+\, \frac{11}{2^8\cdot 3^3}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4 \,+\, \frac{1}{2\cdot 3^7}\,\mathfrak{S}_3^3 \,-\, \frac{1}{2^7\cdot 3^3}\,\mathfrak{S}_2^3\mathfrak{S}_3.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
Q_{2,2,6} \,&=\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_6 \,-\, 2\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_8 \,-\, \mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_6 \,+\, 2\mathfrak{S}_{10},\\
Q_{2,3,5} \,&=\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_5 \,-\, \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_8 \,-\, \mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_7 \,-\, \mathfrak{S}_5^2 \,+\, 2\mathfrak{S}_{10},\\
Q_{2,4,4} \,&=\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4^2 \,-\, \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_8 \,-\, 2\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_6 \,+\, 2\mathfrak{S}_{10},\\
Q_{3,3,4} \,&=\mathfrak{S}_3^2\mathfrak{S}_4 \,-\, 2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_7 \,-\, \mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_6 \,+\, 2\mathfrak{S}_{10},\\
Q_{2,2,2,4} \,&=\mathfrak{S}_2^3\mathfrak{S}_4 \,-\, 3\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_6 \,-\, 3\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4^2 \,+\, 6\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_8 \,+\, 5\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_6 \,-\, 6\mathfrak{S}_{10},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q_{2,2,3,3} &= \mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_3^2 - \mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_6 - 4\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_5 - \mathfrak{S}_3^2\mathfrak{S}_4 + 4\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_8 + 4\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_7 + \\
&\quad + \mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_6 + 2\mathfrak{S}_5^2 - 6\mathfrak{S}_{10}, \\
Q_{2,2,2,2,2} &= \mathfrak{S}_2^5 - 10\mathfrak{S}_2^3\mathfrak{S}_4 + 20\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_6 + 15\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4^2 - 30\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_8 - 20\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_6 + 24\mathfrak{S}_{10};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_{10} &= \varpi_{10}\,Q_{10} + \varpi_2\,\varpi_8\,Q_{2,8} + \varpi_3\,\varpi_7\,Q_{3,7} + \varpi_4\,\varpi_6\,Q_{4,6} + \frac{1}{2}\,\varpi_5^2\,Q_{5,5} + \frac{1}{2}\,\varpi_2^2\,\varpi_6\,Q_{2,2,6} + \\
&\quad + \varpi_2\,\varpi_3\,\varpi_5\,Q_{2,3,5} + \frac{1}{2}\,\varpi_2\,\varpi_4^2\,Q_{2,4,4} + \frac{1}{2}\,\varpi_3^2\,\varpi_4\,Q_{3,3,4} + \frac{1}{6}\,\varpi_2^3\,\varpi_4\,Q_{2,2,2,4} + \\
&\quad + \frac{1}{4}\,\varpi_2^2\,\varpi_3^2\,Q_{2,2,3,3} + \frac{1}{120}\,\varpi_2^5\,Q_{2,2,2,2,2} = \\
&= A_{10}\,\mathfrak{S}_{10} + A_{2,8}\,\mathfrak{S}_2\,\mathfrak{S}_8 + A_{3,7}\,\mathfrak{S}_3\,\mathfrak{S}_7 + A_{4,6}\,\mathfrak{S}_4\,\mathfrak{S}_6 + A_{5,5}\,\mathfrak{S}_5^2 + \\
&\quad + A_{2,2,6}\,\mathfrak{S}_2^2\,\mathfrak{S}_6 + A_{2,3,5}\,\mathfrak{S}_2\,\mathfrak{S}_3\,\mathfrak{S}_5 + A_{2,4,4}\,\mathfrak{S}_2\,\mathfrak{S}_4^2 + A_{3,3,4}\,\mathfrak{S}_3^2\,\mathfrak{S}_4 + \\
&\quad + A_{2,2,2,4}\,\mathfrak{S}_2^3\,\mathfrak{S}_4 + A_{2,2,3,3}\,\mathfrak{S}_2^2\,\mathfrak{S}_3^2 + A_{2,2,2,2,2}\,\mathfrak{S}_2^5,
\end{aligned}
$$

где коэффициенты A задаются равенствами:

$$
\begin{aligned}
A_{10} &= \varpi_{10} - \varpi_2\,\varpi_8 - \varpi_3\,\varpi_7 - \varpi_4\,\varpi_6 - \frac{1}{2}\,\varpi_5^2 + \varpi_2^2\,\varpi_6 + 2\,\varpi_2\,\varpi_3\,\varpi_5 + \\
&\quad + \varpi_2\,\varpi_4^2 + \varpi_3^2\,\varpi_4 - \varpi_2^3\,\varpi_4 - \frac{3}{2}\,\varpi_2^2\,\varpi_3^2 + \frac{1}{5}\,\varpi_2^5 = -\frac{199\cdot 329\,981}{2^{13}\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7}, \\
A_{2,8} &= \varpi_2\,\varpi_8 - \varpi_2^2\,\varpi_6 - \varpi_2\,\varpi_3\,\varpi_5 - \frac{1}{2}\,\varpi_2\,\varpi_4^2 + \varpi_2^3\,\varpi_4 + \varpi_2^2\,\varpi_3^2 - \frac{1}{4}\,\varpi_2^5 = \frac{167\cdot 607}{2^{16}\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7}, \\
A_{3,7} &= \varpi_3\,\varpi_7 - \varpi_2\,\varpi_3\,\varpi_5 - \varpi_3^2\,\varpi_4 + \varpi_2^2\,\varpi_3^2 = \frac{229}{2^4\cdot 3^5\cdot 7^2} \\
A_{4,6} &= \varpi_4\,\varpi_6 - \frac{1}{2}\,\varpi_2^2\,\varpi_6 - \varpi_2\,\varpi_4^2 - \frac{1}{2}\,\varpi_3^2\,\varpi_4 + \frac{5}{6}\,\varpi_2^3\,\varpi_4 + \frac{1}{4}\,\varpi_2^2\,\varpi_3^2 - \frac{1}{6}\,\varpi_2^5 = \frac{11^2\cdot 43}{2^{12}\cdot 3^5\cdot 5}, \\
A_{5,5} &= \frac{1}{2}\,\varpi_5^2 - \varpi_2\,\varpi_3\,\varpi_5 + \frac{1}{2}\,\varpi_2^2\,\varpi_3^2 = \frac{19^2}{2^7\cdot 3^2\cdot 5^4}, \\
A_{2,2,6} &= \frac{1}{2}\,\varpi_2^2\,\varpi_6 - \frac{1}{2}\,\varpi_2^3\,\varpi_4 - \frac{1}{4}\,\varpi_2^2\,\varpi_3^2 + \frac{1}{6}\,\varpi_2^5 = -\frac{11\cdot 43}{2^{11}\cdot 3^4\cdot 5}, \\
A_{2,3,5} &= \varpi_2\,\varpi_3\,\varpi_5 - \varpi_2^2\,\varpi_3^2 = -\frac{19}{2^5\cdot 3^3\cdot 5^2} \\
A_{2,4,4} &= \frac{1}{2}\,\varpi_2\,\varpi_4^2 - \frac{1}{2}\,\varpi_2^3\,\varpi_4 + \frac{1}{8}\,\varpi_2^5 = -\frac{11^2}{2^{15}\cdot 3^2}, \\
A_{3,3,4} &= \frac{1}{2}\,\varpi_3^2\,\varpi_4 - \frac{1}{4}\,\varpi_2^2\,\varpi_3^2 = -\frac{11}{2^7\cdot 3^5}, \\
A_{2,2,2,4} &= \frac{1}{6}\,\varpi_2^3\,\varpi_4 - \frac{1}{12}\,\varpi_2^5 = \frac{11}{2^{13}\cdot 3^2}, \\
A_{2,2,3,3} &= \frac{1}{4}\,\varpi_2^2\,\varpi_3^2 = \frac{1}{2^6\cdot 3^4}, \\
A_{2,2,2,2,2} &= \frac{1}{120}\,\varpi_2^5 = -\frac{1}{2^{13}\cdot 3\cdot 5}.
\end{aligned}
$$

§3. Порядок роста коэффициентов Φ_n при $n \to +\infty$

Главный член (1.1) формулы дробного момента V_a получается формальным интегрированием ряда для функции $H\bigl(-u^2/\mathfrak{S}_1\bigr)$ по лучу $0 \leqslant u < +\infty$.

Чтобы доказать сходимость (1.1) и свойство этого ряда быть асимптотическим, нам потребуется ряд утверждений о порядке роста коэффициентов Φ_n при неограниченном возрастании n.

Одно из таких утверждений (лемма 1.11) опирается на неравенство для коэффициентов разложения в ряд функции

$$\varphi(v) \,=\, e^{-v} \sum_{m\,=\,0}^{+\infty} \frac{v^m}{m!} \,=\, e^{-v} J_0(2i\sqrt{v}).$$

Лемма 1.10. *При любом $n \geqslant 0$ справедливо неравенство $|\,\varpi_n\,| < 1/n!$.*

Доказательство. Из определения $\varphi(z)$ следует, что $(-1)^n\,\varpi_n$ совпадает с коэффициентом при v^{2n} в разложении в ряд функции $\varphi(-v^2)$. Замечая, что

$$J_0(z) \,=\, \sum_{m\,=\,0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m},$$

находим:

$$\varphi(-v^2) \,=\, e^{v^2} \sum_{m\,=\,0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2}\, v^{2m} \,=\, e^{v^2} J_0(2v).$$

Следовательно,

$$(-1)^n\,\varpi_n \,=\, \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{v^2} J_0(2v)}{v^{2n+1}}\, dv,$$

где интегрирование ведётся по произвольной окружности радиуса r с центром в начале координат. Пользуясь чётностью функции $J_0(2v)$ и полагая $v = re^{i\,\vartheta}$, будем иметь:

$$(-1)^n\,\varpi_n \,=\, \frac{r^{-2n}}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{r^2 e^{2i\,\vartheta}} J_0(2re^{i\,\vartheta}) e^{-2in\,\vartheta}\, d\,\vartheta,$$

откуда

$$|\,\varpi_n\,| \leqslant \frac{r^{-2n}}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{r^2 \cos 2\,\vartheta} \big|J_0(2re^{i\,\vartheta})\big| d\,\vartheta\,.$$

Положим теперь $r = \sqrt{n}$ и воспользуемся формулой Стирлинга. Так получим:

$$r^{-2n} \,=\, n^{-n} \,=\, \frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}\, e^{-n+\frac{\theta}{12n}} \leqslant \frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}\, e^{-n+\frac{1}{12n}}$$

и, следовательно,

$$|\,\varpi_n\,| \leqslant \frac{2}{\pi}\, \frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}\, e^{\frac{1}{12n}} \int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-\,n+n\cos 2\,\vartheta} \big|J_0(2\sqrt{n}e^{i\,\vartheta})\big| d\,\vartheta\,.$$

Применив оценку леммы 2.П, приходим к неравенству

$$n!|\,\varpi_n\,| \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\, \sqrt[4]{n}\, e^{\frac{1}{12}} \left(1 \,+\, \frac{1}{4\sqrt{2n}}\right) j(n),$$

в котором

$$j(n) \,=\, \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\,n+n\cos 2\,\vartheta+2\sqrt{n}\sin\vartheta} d\,\vartheta \,=\, \int\limits_0^{\pi/2} e^{\,f(\sin\vartheta)} d\,\vartheta, \quad f(u) \,=\, -2nu^2+2u\sqrt{n}.$$

Так как $f(u)$ монотонно убывает при $u \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, то при любом ϑ с условием $\dfrac{\pi}{6} \leqslant \vartheta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ величина $f(\sin\vartheta)$ не превосходит $-\,\dfrac{n}{2}+\sqrt{n}$. Следовательно, интеграл по соответствующему промежутку оценивается сверху величиной

$$\frac{\pi}{3}\,\exp\left(-\,\frac{n}{2}+\sqrt{n}\right).$$

Далее, поскольку $\cos\vartheta \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ при $0 \leqslant \vartheta \leqslant \dfrac{\pi}{6}$, то положив $u = 2\sqrt{n}\sin\vartheta$, будем иметь:

$$\int\limits_0^{\pi/6} e^{\,f(\sin\vartheta)} d\,\vartheta \,=\, \frac{1}{2\sqrt{n}} \int\limits_0^{\sqrt{n}} e^{\,-\,\frac{u^2}{2}+u}\,\frac{du}{\cos\vartheta} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n}} \int\limits_0^{+\infty} e^{\,-\,\frac{u^2}{2}+u} du \,=\, \sqrt{\frac{2\pi e}{3n}}\,G(1),$$

где

$$G(1) \,=\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\,-\,\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Таким образом, имеем неравенство $n!\,|\,\varpi_n\,| \leqslant F(n)$, в котором

$$F(n) \,=\, \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(1 \,+\, \frac{1}{4\sqrt{2n}}\right) \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{\sqrt[4]{n}} \left\{\sqrt{\frac{2\pi e}{3}}\,G(1) \,+\, \frac{\pi\sqrt{n}}{3}\,e^{\,-\,\frac{n}{2}+\sqrt{n}}\right\}.$$

Подсчёт, произведённый с помощью программного пакета «Wolfram Mathematica 7.0.0», показывает, что $0 < F(n) < 1$ при всех $n \geqslant 16$. Для $0 \leqslant n \leqslant 15$ искомое неравенство проверяется непосредственно:

n	$n!\,\varpi_n$	n	$n!\,\varpi_n$
0	1	8	0.153 993
1	0	9	-0.309 744
2	-0.5	10	0.418 946
3	0.666 667	11	-0.480 134
4	-0.625	12	0.496 212
5	0.466 667	13	-0.472 883
6	-0.256 944	14	0.417 443
7	0.040 476	15	-0.337 870

Лемма доказана.

Первое из необходимых неравенств для величины Φ_n даётся следующей леммой.

Лемма 1.11. *При любом n справедлива оценка:* $|\Phi_n| \leqslant \dfrac{\mathfrak{S}_1^n}{n!}$.

Доказательство. Пусть $n \geqslant 2$. Пользуясь формулой (1.17) наряду с оценкой леммы 1.10, получим:

$$|\Phi_n| \leqslant \sum_{1 \leqslant s \leqslant n} \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_s=n \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_s \geqslant 0}} |\,\varpi_{\alpha_1} \ldots \varpi_{\alpha_s}\,| \sum_{p_1<\ldots<p_s \leqslant x} \left(p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}\right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n!} \sum_{1 \leqslant s \leqslant n} \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_s=n \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_s \geqslant 0}} \frac{n!}{\alpha_1! \ldots \alpha_s!} \sum_{p_1<\ldots<p_s \leqslant x} \left(p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}\right)^{-1} = \frac{1}{n!} \left(\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p}\right)^n = \frac{\mathfrak{S}_1^n}{n!}.$$

В случаях $n = 0$ и $n = 1$ утверждение очевидно. Лемма доказана.

Лемма 1.12. *Для любого n с условием $2 \leqslant n \leqslant x$ справедливо неравенство:*

$$|\Phi_n| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{n!} \left(\log\log n + 1\right)^n.$$

Доказательство. Из определения $\varphi(z)$ и $H(z)$ следует, что $(-1)^n\Phi_n$ совпадает с коэффициентом при v^{2n} в разложении в ряд функции $\Psi(v) = \Phi(-v^2)$. Следовательно,

$$(-1)^n\Phi_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\Psi(v)}{v^{2n+1}}\, dv,$$

где в качестве контура интегрирования берётся произвольная окружность радиуса $r > 0$ с центром в начале координат. Положим $r = \Delta\sqrt{n}$, причём величину Δ, точное значение которой будет выбрано ниже, будем считать удовлетворяющей условию $0 < \Delta \leqslant \frac{4}{5}$. Итак, имеем:

$$|\Phi_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\Delta\sqrt{n})^{2n}} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\Psi(\Delta\sqrt{n}\, e^{i\,\vartheta})\right| d\,\vartheta \leqslant \frac{\Psi}{(\Delta\sqrt{n})^{2n}},$$

где

$$\Psi = \max_{0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2} \left|\Psi(\Delta\sqrt{n}\, e^{i\,\vartheta})\right|.$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга, запишем последнее неравенство в виде

$$|\Phi_n| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi n}}{n!} \exp\left\{-n + \frac{1}{12n}\right\} \Delta^{-2n}\Psi =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{n!} \exp\left\{-n + \frac{\log n}{2} + \frac{1}{12n} + 2n\log\frac{1}{\Delta}\right\}\Psi.$$

Чтобы оценить сверху величину Ψ, представим функцию $\Psi(v)$ в виде:

$$\Psi(v) = \Phi(-v^2) = \prod_{p \leqslant x} \varphi\left(-\frac{v^2}{p}\right) = \prod_{p \leqslant x} e^{\frac{v^2}{p}} \left\{\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{v}{\sqrt{p}}\right)^{2m}\right\} =$$

$$= \prod_{p \leqslant x} e^{\frac{v^2}{p}}\, J_0\left(\frac{2v}{\sqrt{p}}\right) = \left\{\prod_{p \leqslant n} \cdot \prod_{n<p \leqslant x}\right\} e^{\frac{v^2}{p}}\, J_0\left(\frac{2v}{\sqrt{p}}\right) = \Psi_1(v) \cdot \Psi_2(v).$$

Полагая $R = 2\Delta\sqrt{\frac{n}{p}}$ в лемме 2.П, будем иметь:

$$\left|J_0\left(\frac{2v}{\sqrt{p}}\right)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi\Delta}}\left(1 + \frac{1}{4\Delta\sqrt{2}}\sqrt{\frac{p}{n}}\right)\sqrt[4]{\frac{p}{n}}\,\exp\left\{2\Delta\sqrt{\frac{n}{p}}\,\sin\vartheta\right\},$$

и, следовательно,

$$|\Psi_1(v)| \leqslant \left\{\prod_{p\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{\pi\Delta}}\left(1 + \frac{1}{4\Delta\sqrt{2}}\sqrt{\frac{p}{n}}\right)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\Delta^2 n\left(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\right)\cos 2\,\vartheta + 2\Delta\sqrt{n}\left(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{p}}\right)\sin\vartheta\right\}. \quad (1.28)$$

Применяя соотношения (2) и (3) леммы 3.П и замечая, что

$$A\cos 2\,\vartheta + 2B\sin\vartheta \leqslant A + \frac{B^2}{2A} \quad (1.29)$$

при любом $A > 0$, убеждаемся, что для всех рассматриваемых ϑ показатель экспоненты в (1.28) не превосходит

$$\Delta^2 n\left(L_n + \frac{\theta}{(\log n)^2}\right)\cos 2\,\vartheta + \frac{2a\Delta n}{\log n}\sin\vartheta \leqslant \Delta^2 n L_n + \frac{a^2}{2}\,\frac{n}{(\log n)^2 L_n} + \frac{\Delta^2 n}{(\log n)^2},$$

где $L_n = \log\log n + c$ (a, c – постоянные леммы 3.П).

Поскольку при $0 < \Delta \leqslant \frac{4}{5}$ сомножитель произведения по $p \leqslant n$ в (1.28) не превосходит

$$\frac{\Delta^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{\frac{p}{n}}\right)\sqrt[4]{\frac{p}{n}} \leqslant d\Delta^{-\frac{3}{2}}\sqrt[4]{\frac{p}{n}},$$

где

$$d = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right),$$

то окончательно находим:

$$|\Psi_1(v)| \leqslant \left(d\Delta^{-\frac{3}{2}}\right)^{\pi(n)}\left\{\prod_{p\leqslant n}\frac{p}{n}\right\}^{\frac{1}{4}}\exp\left\{\Delta^2 n L_n + \frac{a^2}{2}\,\frac{n}{(\log n)^2 L_n} + \frac{\Delta^2 n}{(\log n)^2}\right\}. \quad (1.30)$$

Оценим теперь величину $|\Psi_2(v)|$. Для этого положим

$$r = r_p(v) = \frac{1}{(3!)^2}\,\frac{v^6}{p^3} - \frac{1}{(4!)^2}\,\frac{v^8}{p^4} + \frac{1}{(5!)^2}\,\frac{v^{10}}{p^5} - \ldots,$$
$$q = q_p(v) = \frac{v^2}{p} - \frac{v^4}{4p^2} + r_p(v),$$

так что

$$J_0\left(\frac{2v}{\sqrt{p}}\right) = 1 - q_p(v).$$

При любом $p > n$ имеем, очевидно: $\left|\frac{v}{\sqrt{p}}\right| = \Delta\sqrt{\frac{n}{p}} < \Delta$. Следовательно,

$$|r| \leqslant \frac{1}{36}\,\frac{|v|^6}{p^3}\left(1 + \frac{1}{4^2}\,\frac{|v|^2}{p} + \frac{1}{(4\cdot 5)^2}\,\frac{|v|^4}{p^2} + \ldots\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{36}\,\frac{|v|^6}{p^3}\left(1 + \left(\frac{\Delta}{4}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{4}\right)^4 + \ldots\right) = \lambda_1\,\frac{|v|^6}{p^3},$$

где

$$\lambda_1 = \lambda_1(\Delta) = \frac{4}{9(16-\Delta^2)},$$

и вместе с тем

$$|q| \leqslant \frac{|v|^2}{p} + \frac{|v|^4}{4p^2} + |r| \leqslant \lambda_2\,\frac{|v|^2}{p} \leqslant \lambda_3,$$
$$\lambda_2 = \lambda_2(\Delta) = 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \lambda_1\Delta^4, \quad \lambda_3 = \lambda_3(\Delta) = \lambda_2\Delta^2.$$

Далее, поскольку

$$\left|-\frac{v^4}{4p^2} + r\right| \leqslant \frac{|v|^4}{4p^2} + \lambda_1\,\frac{|v|^6}{p^3} \leqslant \lambda_4\,\frac{|v|^4}{p^2}, \quad \lambda_4 = \lambda_4(\Delta) = \frac{1}{4} + \lambda_1\Delta^2,$$

то

$$q^2 = \left(\frac{v^2}{p} - \frac{v^4}{4p^2} + r\right)^2 = \left(\frac{v^2}{p} + \lambda_4\theta\,\frac{|v|^4}{p^2}\right)^2 = \frac{v^4}{p^2} + \lambda_5\theta_1\frac{|v|^6}{p^3},$$

где

$$\lambda_5 = \lambda_5(\Delta) = 2\lambda_4 + \big(\lambda_4\Delta\big)^2.$$

Наконец, для рассматриваемых v имеем неравенства:

$$\left|\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{q^k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{3}\,|q|^3 + \frac{1}{4}\,|q|^4 + \frac{1}{5}\sum_{k=5}^{+\infty}|q|^k \leqslant$$
$$\leqslant |q|^3\left(\frac{1}{3} + \frac{\lambda_3}{4} + \frac{\lambda_3^2}{5}\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_3^k\right) = |q|^3\left(\frac{1}{3} + \frac{\lambda_3}{4} + \frac{\lambda_3^2}{5(1-\lambda_3)}\right) \leqslant \lambda_6\,\frac{|v|^6}{p^3},$$

где

$$\lambda_6 = \lambda_6(\Delta) = \lambda_2^3\left(\frac{1}{3} + \frac{\lambda_3}{4} + \frac{\lambda_3^2}{5(1-\lambda_3)}\right).$$

Таким образом,

$$\log J_0\left(\frac{2v}{\sqrt{p}}\right) = \log(1-q) = -q - \frac{1}{2}\,q^2 - \sum_{k=3}^{+\infty}\frac{q^k}{k} =$$
$$= -\frac{v^2}{p} + \frac{v^4}{4p^2} - r - \frac{1}{2}\left(\frac{v^4}{p^2} + \lambda_5\theta_1\,\frac{|v|^6}{p^3}\right) + \lambda_6\theta_2\,\frac{|v|^6}{p^3} =$$
$$= -\frac{v^2}{p} - \frac{v^4}{4p^2} + \lambda\theta\,\frac{|v|^6}{p^3},$$

где

$$\lambda = \lambda(\Delta) = \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_5 + \lambda_6 = \sum_{k=0}^{2} \frac{P_k}{Q_k}\left(16 - \Delta^2\right)^{-k},$$

а через P_k, Q_k, $k = 0, 1, 2$, обозначены следующие многочлены:

$$P_0(\Delta) \equiv 2^2, \quad Q_0(\Delta) \equiv 3^2;$$
$$P_1(\Delta) = 2^{11}\cdot 3^4 + 2^{11}\cdot 3^2\Delta^2 + 2^3\cdot 3^3\cdot 7\Delta^4 + 7^2\Delta^6; \quad Q_1(\Delta) \equiv 2^5\cdot 3^4;$$
$$P_2(\Delta) = \left(2^6\cdot 3^2 + 2^2\cdot 3^3\Delta^2 + 7\Delta^4\right)^3 \times \left(-2^{14}\cdot 3^3\cdot 5 + 2^{11}\cdot 3^4\cdot 5\Delta^2 + 2^6\cdot 3^3\cdot 227\Delta^4 + \right.$$
$$\left. + 2^4\cdot 3\cdot 7^2\cdot 53\Delta^6 + 2^2\cdot 3\cdot 1609\Delta^8 + 2^3\cdot 3^3\cdot 7\Delta^{10} + 7^2\Delta^{12}\right);$$
$$Q_2(\Delta) = -2^6\cdot 3^2 + 2^2\cdot 3^2\cdot 17\Delta^2 + 2^2\cdot 3^3\Delta^4 + 7\Delta^6.$$

Таким образом,

$$e^{\frac{v^2}{p}} J_0\left(\frac{2v}{\sqrt{p}}\right) = \exp\left\{\frac{v^2}{p} - \frac{v^2}{p} - \frac{v^4}{4p^2} + \lambda\theta\frac{|v|^6}{p^3}\right\} = \exp\left\{-\frac{v^4}{4p^2} + \lambda\theta\frac{|v|^6}{p^3}\right\},$$

откуда

$$|\Psi_2(v)| \leqslant \exp\left\{\frac{|v|^4}{4}\sum_{p>n}\frac{1}{p^2} + \lambda|v|^6\sum_{p>n}\frac{1}{p^3}\right\} =$$
$$= \exp\left\{\frac{\Delta^4 n^2}{4}\sum_{p>n}\frac{1}{p^2} + \lambda\Delta^6 n^3\sum_{p>n}\frac{1}{p^3}\right\}. \quad (1.31)$$

Перемножив оценки (1.30) и (1.31), находим:

$$\Psi \leqslant \left(d\Delta^{-\frac{3}{2}}\right)^{\pi(n)}\left\{\prod_{p\leqslant n}\frac{p}{n}\right\}^{\frac{1}{4}} \times$$
$$\times \exp\left\{\Delta^2 n L_n + \frac{\Delta^4 n^2}{4}\sum_{p>n}\frac{1}{p^2} + \lambda\Delta^6 n^3\sum_{p>n}\frac{1}{p^3} + \frac{a^2}{2}\frac{n}{(\log n)^2 L_n} + \frac{\Delta^2 n}{(\log n)^2}\right\}. \quad (1.32)$$

Положим, наконец, $\Delta = \frac{1}{\sqrt{L_n}}$ (условие $\Delta \leqslant \frac{4}{5}$ выполнено, как несложно проверить, при всех $n \geqslant 40$). Будем иметь:

$$\Psi \leqslant \left\{\prod_{p\leqslant n}\frac{p}{n}\right\}^{\frac{1}{4}} \times \exp\left\{n + \pi(n)\left(\frac{3}{4}\log L_n + \log d\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{n^2}{4L_n^2}\sum_{p>n}\frac{1}{p^2} + \frac{\lambda n^3}{L_n^3}\sum_{p>n}\frac{1}{p^3} + \left(\frac{a^2}{2}+1\right)\frac{n}{(\log n)^2 L_n}\right\},$$

$$|\Phi_n| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}\left\{\prod_{p\leqslant n}\frac{p}{n}\right\}^{\frac{1}{4}} \exp\left\{n\log L_n + \pi(n)\left(\frac{3}{4}\log L_n + \log d\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{n^2}{4L_n^2}\sum_{p>n}\frac{1}{p^2} + \frac{\lambda n^3}{L_n^3}\sum_{p>n}\frac{1}{p^3} + \left(\frac{a^2}{2}+1\right)\frac{n}{(\log n)^2 L_n} + \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{12n}\right\}. \quad (1.33)$$

Пусть сначала $n \geqslant n_1 = 1143$. Несложно проверить, что для таких n выражение $\frac{3}{4}\log L_n + \log d$ положительно и для величины $\pi(n)$, входящей в показатель экспоненты (1.33), можно воспользоваться оценкой (4) леммы 3.П. Кроме того, применяя то же неравенство, находим:

$$\sum_{p>n} \frac{1}{p^2} = 2\int\limits_n^{+\infty} \big(\pi(u) - \pi(n)\big)\,\frac{du}{u^3} \leqslant 2b\int\limits_n^{+\infty} \frac{du}{u^2\log u} \leqslant \frac{2b}{\log n}\int\limits_n^{+\infty}\frac{du}{u^2} = \frac{2b}{n\log n},$$
$$\sum_{p>n} \frac{1}{p^3} \leqslant \frac{3b}{2n^2\log n}.$$

Наконец, произведение по $p \leqslant n$ оценим сверху единицей. Тогда неравенство (1.33) принимает вид

$$|\Phi_n| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}\,\exp\big\{n(\log L_n + Q(n))\big\}, \tag{1.34}$$

где

$$Q(n) = \frac{b}{\log n}\left(\frac{3}{4}\log L_n + \log d\right) + \frac{b}{2}\,\frac{1}{(\log n)L_n^2} + \frac{3\lambda_0 b}{2}\,\frac{1}{(\log n)L_n^3} + \\ + \left(\frac{a^2}{2}+1\right)\frac{1}{(\log n)^2 L_n} + \frac{\log n}{2n} + \frac{1}{12n^2},$$

а через λ_0 обозначено наибольшее при $n \geqslant n_1$ из значений $\lambda(\Delta)$, т.е.

$$\lambda_0 = \max_{n\geqslant n_1}\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{L_n}}\right) = \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{L_{n_1}}}\right) = 1.09559\ldots.$$

Функция $f(n) = L_n\big(e^{Q(n)}-1\big) + c$ имеет порядок $\frac{L_n\log L_n}{\log n}$ и монотонно убывает с ростом n на рассматриваемом промежутке. Следовательно, для всех таких n имеем:

$$f(n) \leqslant f(n_1) = 0.47652\ldots < 1, \quad L_n e^{Q(n)} < L_n - c + 1 = \log\log n + 1$$

и, наконец,

$$|\Phi_n| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}\big(L_n e^{Q(n)}\big)^n < \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}\,\big(\log\log n + 1\big)^n.$$

Пусть теперь $43 \leqslant n \leqslant 1142$. Запишем (1.33) в виде (1.34), где роль $Q(n)$ играет функция

$$\frac{\pi(n)}{n}\left(\frac{3}{4}\log L_n + \log d\right) + \frac{1}{4n}\left(\sum_{p\leqslant n}\log p - \pi(n)\log n\right) + \frac{n}{4L_n^2}\left(\zeta_P(2) - \sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p^2}\right) + \\ + \frac{\lambda n^3}{L_n^3}\left(\zeta_P(3) - \sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p^3}\right) + \left(\frac{a^2}{2}+1\right)\frac{1}{(\log n)^2 L_n} + \frac{\log n}{2n} + \frac{1}{12n^2},$$
$$\zeta_P(s) = \sum_p \frac{1}{p^s}, \quad \lambda = \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{L_n}}\right).$$

Вычисление значений $Q(n)$, произведённое с помощью программного пакета «Wolfram Mathematica 7.0.0» показывает, что для всех n с условием $43 \leqslant n \leqslant 1142$ выполняется неравенство

$$f(n) \,=\, L_n\bigl(e^{Q(n)} - 1\bigr) + c \leqslant f(43) \,=\, 0.999\,985 \,<\, 1,$$

из которого следует искомая оценка $|\Phi_n|$. В случае $6 \leqslant n \leqslant 42$ из неравенств (1.28), (1.29) при любом $0 < \Delta \leqslant \frac{4}{5}$ получаем оценку:

$$|\Psi_1(v)| \leqslant \exp\biggl\{\Delta^2 n\Bigl(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\Bigr) \,+\, \frac{1}{2}\Bigl(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{p}}\Bigr)^2\Bigl(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\Bigr)^{-1} + \\ +\, \frac{\pi(n)}{2}\log\frac{1}{\pi\Delta} \,+\, \frac{1}{4}\Bigl(\sum_{p\leqslant n}\log p \,-\, \pi(n)\log n\Bigr) \,+\, \sum_{p\leqslant n}\log\biggl(1 \,+\, \frac{1}{4\Delta\sqrt{2}}\sqrt{\frac{p}{n}}\biggr)\biggr\},$$

из которой с помощью (1.31) получаем неравенство (1.34) с

$$Q(n) \,=\, -\log L_n - 1 + 2\log\frac{1}{\Delta} \,+\, \Delta^2\Bigl(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\Bigr) \,+\, \frac{1}{2n}\Bigl(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{p}}\Bigr)^2\Bigl(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\Bigr)^{-1} + \\ +\, \frac{\pi(n)}{2n}\log\frac{1}{\pi\Delta} \,+\, \frac{1}{4n}\Bigl(\sum_{p\leqslant n}\log p \,-\, \pi(n)\log n\Bigr) \,+\, \frac{1}{n}\sum_{p\leqslant n}\log\biggl(1 \,+\, \frac{1}{4\Delta\sqrt{2}}\sqrt{\frac{p}{n}}\biggr) + \\ +\, \frac{n}{4L_n^2}\biggl(\zeta_P(2) \,-\, \sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p^2}\biggr) \,+\, \frac{\lambda n^2}{L_n^3}\biggl(\zeta_P(3) \,-\, \sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p^3}\biggr) \,+\, \frac{\log n}{2n} \,+\, \frac{1}{12n^2}, \quad \lambda = \lambda(\Delta).$$

Положив $\Delta = \frac{4}{5}$, для всех n из промежутка $6 \leqslant n \leqslant 42$ будем иметь:

$$L_n\bigl(e^{Q(n)} - 1\bigr) \,+\, c \leqslant 0.923\,714 \,<\, 1,$$

что и доказывает искомое неравенство.

Наконец, из явных формул леммы 1.7 для величин Φ_n, $2 \leqslant n \leqslant 5$, следуют неравенства

$$|\Phi_2| \leqslant \frac{1}{4}\,\zeta_P(2), \quad |\Phi_3| \leqslant \frac{1}{9}\,\zeta_P(3), \\ -\,\frac{11}{192}\,\zeta_P(4) \,<\, \Phi_4 \,<\, \frac{1}{32}\,\zeta_P^2(2), \\ -\,\frac{1}{36}\,\zeta_P(2)\zeta_P(3) \,<\, \Phi_5 \,<\, \frac{19}{600}\,\zeta_P(5),$$

из которых, в свою очередь, получаются оценки вида $|\Phi_n| < \phi_n$, где

$$\phi_2 \,=\, \frac{1}{4}\,\zeta_P(2) \,=\, 0.113\,061\,855\ldots\,, \\ \phi_3 \,=\, \frac{1}{9}\,\zeta_P(3) \,=\, 0.019\,418\,071\ldots\,, \\ \phi_4 \,=\, \frac{1}{32}\,\zeta_P^2(2) \,=\, 0.006\,391\,491\ldots\,, \\ \phi_5 \,=\, \frac{1}{36}\,\zeta_P(2)\zeta_P(3) \,=\, 0.001\,132\,242\ldots\,.$$

Полагая

$$\psi_n \;=\; \left(\frac{n!\,\phi_n}{\sqrt{2\pi}}\right)^{\frac{1}{n}} \;-\; \log\log n,$$

получим:

$$\begin{aligned}
\psi_2 &= 0.666\,863\,230\,3\ldots\,,\\
\psi_3 &= 0.265\,499\,281\,0\ldots\,,\\
\psi_4 &= 0.170\,737\,224\,5\ldots\,,\\
\psi_5 &= 0.161\,383\,869\,7\ldots\,.
\end{aligned}$$

Итак, $\psi_n < 1$ для рассматриваемых n, откуда

$$|\Phi_n| \;<\; \phi_n \;=\; \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}\,\bigl(\log\log n + \psi_n\bigr)^n \;<\; \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}\,\bigl(\log\log n + 1\bigr)^n.$$

Лемма доказана.

§4. Дробные моменты величины $V(t_n)$

В ряде случаев дробная степень $|z|^a$ некоторой величины z может быть достаточно хорошо приближена линейной комбинацией её чётных степеней z^{2k}, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Именно это обстоятельство, впервые отмеченное, по-видимому, А. Гошем в [31],[32], и позволяет получить асимптотические формулы для дробных моментов величин $V(t_n)$ и, в конечном итоге, величин Δ_n. Построение указанного приближения опирается на следующие три леммы.[2)]

Лемма 1.13. *Пусть $a > 0$, s - целое число с условием $2s > a$. Тогда при любом z имеет место тождество*

$$|z|^a \;=\; \kappa^{-1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\sin u|z|)^{2s}}{u^{1+a}}\,du,$$

где

$$\kappa \;=\; \kappa(a;s) \;=\; \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\sin u)^{2s}}{u^{1+a}}\,du.$$

Лемма 1.14. *При любом целом $s \geqslant 1$ имеем:*

$$(\sin y)^{2s} \;=\; 2^{1-2s} \sum_{m=1}^{s} (-1)^m \binom{2s}{s-m} \cos(2my) \;+\; 2^{-2s}\binom{2s}{s}.$$

[2)] Первое применение тождества леммы 1.13 в общем виде (т.е. при произвольных допустимых значениях параметров a и s) к задаче нахождения дробных моментов принадлежит Р.Н. Бояринову (см.: R.N. Boyarinov, V.N. Chubarikov, I.S. Ngongo, "Asymptotic formulas for fractional moments of special sums", *Чебышевский сборник*, **4**:4(2003), 173–183).

Лемма 1.15. *Для целого $s \geqslant 1$ и неотрицательного a определим числа $B(a;s)$ равенствами*

$$B(a;s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\binom{2s}{s} + \sum\limits_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}, & \text{если } a=0; \\ \sum\limits_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}m^a, & \text{если } a>0. \end{cases}$$

Тогда

1) $|B(a;s)| \leqslant 2^{2s-1}s^a$;

2) $B(2k;s) = 0$ *при целом* k, $0 \leqslant k < s$;

3) *при любых целых* s *и* K *справедливо равенство*

$$(\sin y)^{2s} = 2^{1-2s}\sum_{k=s}^{K}\frac{(-1)^k B(2k;s)(2y)^{2k}}{(2k)!} + \frac{\theta\,(2ys)^{2K+2}}{(2K+2)!},$$

Лемма 1.13 устанавливается заменой переменной в интеграле; лемма 1.14 является следствием формул Эйлера

$$\sin u = \frac{e^{iu}-e^{-iu}}{2i}, \quad \cos u = \frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2};$$

первое утверждение леммы 1.15 получается из равенства

$$\sum_{m=1}^{s}\binom{2s}{s-m} = 2^{2s-1};$$

второе и третье утверждения леммы 1.15 получаются из леммы 1.14, формулы Тейлора для функции $\cos(2my)$ с остаточным членом в форме Лагранжа, и подсчётом коэффициентов при степенях y^{2k}, $k = 0, 1, \ldots, s-1$ в разложении $(\sin y)^{2s}$.

Замечание. Имеют место равенства:

$$\begin{aligned} B(a;1) &= -1, \\ B(a;2) &= 2^a - 4; \\ B(a;3) &= -15 + 6\cdot 2^a - 3^a; \\ B(a;4) &= -56 + 28\cdot 2^a - 8\cdot 3^a + 4^a; \\ B(a;5) &= -210 + 120\cdot 2^a - 45\cdot 3^a + 10\cdot 4^a - 5^a. \end{aligned}$$

Лемма 1.16. *Пусть $s \geqslant 1$ - целое, и пусть a - произвольное число с условием $0 < a < 2s$, $a \neq 2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда для интеграла $\kappa(a;s)$ справедлива следующая формула:*

$$\kappa(a;s) = -\frac{2^{a-2s}\pi B(a;s)}{\Gamma(a+1)\sin\frac{\pi a}{2}}.$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$\kappa(a;s) \geqslant \frac{1}{2s-a}\left(\frac{2}{\pi}\right)^a.$$

Доказательство. Предположим сперва, что $0 < a < 2$. Тогда, пользуясь формулой леммы 1.14, с помощью интегрирования по частям находим:

$$\kappa(a;s) \;=\; -\,2^{1-2s}\int\limits_0^{+\infty}\Biggl\{\;\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}\cos(2mu)\;+\;\frac{1}{2}\binom{2s}{s}\Biggr\}d\,\frac{u^{-\,a}}{a}\;=$$

$$=\;-\,\frac{2^{1-2s}}{a}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{u^a}\Biggl\{\;\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}2m\sin(2mu)\Biggr\}du. \quad (1.35)$$

Ввиду того, что $0 < a < 2$, сумму по m можно проинтегрировать почленно:

$$\kappa(a;s) \;=\; -\,\frac{2^{1-2s}}{a}\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(2mu)}{u^a}\,du\;=$$

$$=\;\frac{2^{1-2s}}{a}\,j(a)\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}(2m)^a\;=\;-\,\frac{2^{a+1-2s}}{a}\,j(a)B(a;s),$$

где обозначено:

$$j(a)\;=\;\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u^a}\,du.$$

Если $2 < a < 4$, то двукратным интегрированием по частям из (1.35) получаем:

$$\kappa(a;s) \;=\; -\,\frac{2^{1-2s}}{a(a-1)}\int\limits_0^{+\infty}\Biggl\{\;\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}(2m)^2\cos(2mu)\Biggr\}\frac{du}{u^{a-1}}\;=$$

$$=\;\frac{2^{1-2s}}{a(a-1)(a-2)}\int\limits_0^{+\infty}\Biggl\{\;\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}(2m)^3\sin(2mu)\Biggr\}\frac{du}{u^{a-2}}. \quad (1.36)$$

Вновь интегрируя почленно (что допустимо, т.к. $0 < a-2 < 2$), из (1.36) находим:

$$\kappa(a;s) \;=\; \frac{2^{1-2s}}{a(a-1)(a-2)}\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}(2m)^3\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(2mu)}{u^{a-2}}\,du\;=$$

$$=\;\frac{2^{1-2s}}{a(a-1)(a-2)}\,j(a-2)\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}(2m)^3\cdot(2m)^{a-3}\;=$$

$$=\;\frac{2^{a+1-2s}j(a-2)B(a;s)}{a(a-1)(a-2)}.$$

Вообще, если $2k < a < 2(k+1)$, где $k \geqslant 0$ - некоторое целое число, то из (1.35) путём $2(k+1)$-кратного интегрирования по частям получаем:

$$\kappa(a;s) \;=\; \frac{(-1)^{k-1}2^{a+1-2s}j(a-2k)B(a;s)}{a(a-1)(a-2)\ldots(a-2k+1)(a-2k)}.$$

Наконец, замечая, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(\sin u)^2}{u^{1+a}}\,du \;=\; \frac{2^a j(a)}{2a}$$

и пользуясь формулой п. 3.823 книги [33], находим:

$$j(a) \;=\; \frac{\pi}{4\Gamma(a+1)\sin\dfrac{\pi a}{2}}.$$

Следовательно,

$$\kappa(a;s) \;=\; \frac{(-1)^{k-1}\,2^{a+1-2s}(-1)^k\pi B(a;s)}{2\,a(a-1)\ldots(a-2k)\Gamma(a-2k)\sin\dfrac{\pi a}{2}} \;=\; -\,\frac{2^{a-2s}\pi B(a;s)}{\Gamma(a+1)\sin\dfrac{\pi a}{2}}.$$

Нижняя оценка $\kappa(a;s)$ получается из неравенств

$$\kappa(a;s) > \int\limits_0^{\pi/2} \frac{(\sin u)^{2s}}{u^{1+a}}\,du \geqslant \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{2u}{\pi}\right)^{2s} \frac{du}{u^{1+a}} \;=\; \frac{1}{2s-a}\left(\frac{2}{\pi}\right)^a.$$

Лемма доказана.

Для доказательства основного утверждения этого параграфа нам понадобится следующая лемма, которая устанавливает простейшие свойства функции $H(z)$, определённой в §1.

Лемма 1.17. *Имеют место следующие соотношения:*
1) $H(0) = 1$;
2) $0 < H^{(k)}(0) \leqslant \mathfrak{S}_1^k$;
3) $|H(-u)| \leqslant 1$ *при любом* $u \geqslant 0$.

Доказательство. Первое соотношение следует из равенства $H(0) = \Phi(0)$ и определения функции $\Phi(z)$. Для доказательства второго соотношения воспользуемся равенством

$$H^{(k)}(0) \;=\; \frac{1}{k!} \sum_{\substack{p_1\ldots p_k = q_1\ldots q_k \\ p_1,\ldots q_k \leqslant x}} \big(p_1\ldots p_k\big)^{-1},$$

установленным леммой 1.5. При фиксированных $p_1, \ldots, p_k$ число решений уравнения $p_1\ldots p_k = q_1\ldots q_k$ в простых числах $q_1, \ldots, q_k$ не превосходит $k!$. Следовательно,

$$0 \;<\; H^{(k)}(0) \leqslant \frac{1}{k!}\,k! \sum_{p_1,\ldots,p_k \leqslant x} \big(p_1\ldots p_k\big)^{-1} \;=\; \left(\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\right)^k \;=\; \mathfrak{S}_1^k.$$

Чтобы доказать последнее неравенство леммы, положим $u = v^2$. Тогда

$$H(-u) \;=\; H(-v^2) \;=\; \prod_{p\leqslant x} J_0\left(2i\sqrt{-\frac{v^2}{p}}\right) \;=\; \prod_{p\leqslant x} J_0\left(\frac{2v}{\sqrt{p}}\right).$$

Применяя равенство

$$J_0(z) \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos\left(z\sin t\right) dt$$

(см., например, [34, II, §17.23]), для вещественных z находим: $|J_0(z)|\leqslant 1$. Таким образом,

$$|H(-u)| \,=\, \prod_{p\leqslant x}\left|J_0\left(\frac{2v}{\sqrt{p}}\right)\right| \leqslant 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.18. *Пусть* $x_0 < x \leqslant N^{\delta}$, $400\delta = 1$, $V(t) = V_x(t)$, a - *произвольное вещественное число, отличное от чётного целого и удовлетворяющее условиям*

$$0 \,<\, a \,<\, \frac{1}{3e}\sqrt{\frac{\log N}{\log x}}.$$

Пусть, наконец, $s = \left[\dfrac{a+1}{2}\right] + 1$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sum_n |V(t_n)|^a \,=\, \frac{M\mathfrak{S}_1^{\frac{a}{2}}}{\kappa(a;s)}\big(I(a) \,+\, r(a)\big),$$

в котором

$$I(a) \,=\, 2^{1-2s}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\psi(u)}{u^{1+a}}\,du,$$

$$\psi(u) \,=\, \psi(u;x,s) \,=\, \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}H\left(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\right) \,+\, \frac{1}{2}\binom{2s}{s},$$

$$|r(a)| \leqslant 2.006a^{-1}\left(5es\sqrt{\frac{\log x}{\log N}}\right)^a.$$

Доказательство. Положим $v_n = V(t_n)/\sqrt{\mathfrak{S}_1}$ и определим величины λ и K равенствами

$$\lambda \,=\, \frac{1}{5es}\sqrt{\frac{\log N}{\log x}}, \quad K \,=\, \left[\frac{1}{22}\,\frac{\log N}{\log x}\right].$$

Тогда несложно убедиться, что при $x\leqslant N^{\delta}$ выполнены следующие соотношения:

$$K \geqslant s, \quad \lambda \,>\, 1, \quad \frac{e(\lambda s)^2}{K} \,<\, \frac{1}{e}, \quad 1 \,<\, 2s-a \leqslant 3. \tag{1.37}$$

Далее, в силу леммы 1.13 справедливо равенство

$$|v_n|^a \,=\, \kappa^{-1}\int\limits_0^{+\infty}\frac{(\sin(uv_n))^{2s}}{u^{1+a}}\,du, \quad \kappa \,=\, \kappa(a;s).$$

Суммируя обе его части по n, находим:

$$\sum_n |v_n|^a \,=\, \kappa^{-1}\sum_n\left(\int\limits_0^{\lambda} \,+\, \int\limits_{\lambda}^{+\infty}\right)\frac{(\sin(uv_n))^{2s}}{u^{1+a}}\,du \,=\, W_1 + R_1,$$

где

$$|R_1| \leqslant \kappa^{-1} \sum_n \int\limits_{\lambda}^{+\infty} \frac{du}{u^{1+a}} \,=\, \frac{M\kappa^{-1}}{a\lambda^a}, \quad W_1 \,=\, \kappa^{-1} \sum_n \int\limits_0^{\lambda} \frac{(\sin{(uv_n)})^{2s}}{u^{1+a}}\, du.$$

Преобразуем сумму W_1 с помощью равенства леммы 1.15; получим:

$$W_1 \,=\, \kappa^{-1} \int\limits_0^{\lambda} \frac{1}{u^{1+a}} \left\{ 2^{1-2s} \sum_{k\,=\,s}^{K} \frac{(-1)^k B(2k;\,s)}{(2k)!}\, (2u)^{2k} \sum_n v_n^{2k} + \right.$$
$$\left. +\, \theta_1\, \frac{(2us)^{2K+2}}{(2K+2)!} \sum_n v_n^{2K+2} \right\} du.$$

Параметры x, M, N и K таковы, что $x_0 < x \leqslant M^{1/(2k)}$ при $1 \leqslant k \leqslant K+1$. Поэтому, применив к суммам по n формулы лемм 1.4 и 1.5, будем иметь:

$$\sum_n v_n^{2k} \,=\, \frac{(2k)!}{k!}\, \frac{M}{2^{2k}}\, \frac{H^{(k)}(0)}{\mathfrak{S}_1^k} \,+\, \theta_k\, \frac{x^{2k}}{\mathfrak{S}_1^k}\, \log N, \quad k = s, \ldots, K+1,$$

$$W_1 \,=\, \kappa^{-1} \int\limits_0^{\lambda} \frac{1}{u^{1+a}} \left\{ 2^{1-2s} \sum_{k\,=\,s}^{K} \frac{(-1)^k B(2k;\,s)}{(2k)!}\, (2u)^{2k} \left(\frac{(2k)!}{k!}\, \frac{M}{2^{2k}}\, \frac{H^{(k)}(0)}{\mathfrak{S}_1^k} \,+\, \theta_k\, \frac{x^{2k}}{\mathfrak{S}_1^k} \right) + \right.$$
$$\left. +\, \theta_{K+1}\, \frac{(2us)^{2K+2}}{(2K+2)!} \left(\frac{(2K+2)!}{(K+1)!}\, \frac{M}{2^{2K+2)}}\, \frac{H^{(K+1)}(0)}{\mathfrak{S}_1^{K+1}} \,+\, \frac{x^{2K+2}}{\mathfrak{S}_1^{K+1}} \right) \right\} du \,=\, W_2 + R_2,$$

где R_2 - вклад от слагаемых вида $x^{2k}\mathfrak{S}_1^{-k} \log N$, $s \leqslant k \leqslant K+1$. Пользуясь первым неравенством леммы 1.15, находим:

$$|R_2| \leqslant$$
$$\leqslant \kappa^{-1} \int\limits_0^{\lambda} \frac{1}{u^{1+a}} \left\{ \sum_{k\,=\,s}^{K} \frac{2^{1-2s}|B(2k;\,s)|}{(2k)!}\, (2u)^{2k}\, \frac{x^{2k}}{\mathfrak{S}_1^k}\, \log N \,+\, \frac{(2us)^{2K+2}}{(2K+2)!}\, \frac{x^{2K+2}}{\mathfrak{S}_1^{K+1}} \log N \right\} du \leqslant$$
$$\leqslant \kappa^{-1} x^{2K+2} (\log N) \int\limits_0^{\lambda} \frac{1}{u^{1+a}} \sum_{k\,=\,s}^{K+1} \frac{(2us)^{2k}}{(2k)!}\, \mathfrak{S}_1^{-\,k}\, du \,=$$
$$= \kappa^{-1} x^{2K+2} (\log N) \sum_{k\,=\,s}^{K+1} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{2s}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}} \right)^{2k} \frac{\lambda^{2k-a}}{2k-a} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\kappa^{-1} x^{2K+2} (\log N)}{\lambda^a (2s-a)} \sum_{k\,=\,s}^{K+1} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{2s\lambda}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}} \right)^{2k} <$$
$$< \kappa^{-1} x^{2K+2} (\log N)\, \lambda^{-\,a}\, \exp\left\{ \frac{2s\lambda}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}} \right\}.$$

Из определения величин λ, K, s и неравенства $x \leqslant N^{\delta}$ заключаем, что

$$|R_2| \leqslant \kappa^{-1}\lambda^{-a}\exp\left\{3\left(\frac{1}{22}\,\frac{\log N}{\log x}+1\right)\log x \,+\, \frac{2}{5e}\sqrt{\frac{\log N}{\mathfrak{S}_1 \log x}} \,+\, \log\log N\right\} <$$

$$< \kappa^{-1}\lambda^{-a}\exp\left\{\frac{5}{33}\,\log N\right\} < \kappa^{-1}\lambda^{-a}MN^{-\frac{1}{6}-\varepsilon} \leqslant \kappa^{-1}\frac{MN^{-\frac{1}{6}}}{a\lambda^a}.$$

Преобразуем теперь величину

$$W_2 \,=\, M\kappa^{-1}\int\limits_0^{\lambda}\left\{2^{1-2s}\sum_{k=s}^{K}\frac{B(2k;s)}{k!}\left(-\frac{u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)^k H^{(k)}(0) \,+\, \theta\,\frac{(us)^{2K+2}}{(K+1)!}\,\frac{H^{(K+1)}(0)}{\mathfrak{S}_1^{K+1}}\right\}\frac{du}{u^{1+a}}.$$

Для этого сумму по k, $s \leqslant k \leqslant K$, заменим бесконечной, воспользовавшись явным выражением и оценкой чисел $B(2k;s)$ из леммы 1.15. Так получим:

$$W_2 \,=\, M\kappa^{-1}\int\limits_0^{\lambda}\left\{2^{1-2s}\sum_{k=s}^{+\infty}\frac{B(2k;s)}{k!}\left(-\frac{u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)^k H^{(k)}(0) -\right.$$

$$\left. -\, 2^{1-2s}\sum_{k>K}\frac{B(2k;s)}{k!}\left(-\frac{u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)^k H^{(k)}(0) \,+\, \theta\,\frac{(us)^{2K+2}}{(K+1)!}\,\frac{H^{(K+1)}(0)}{\mathfrak{S}_1^{K+1}}\right\}\frac{du}{u^{1+a}} \,=$$

$$= M\kappa^{-1}\int\limits_0^{\lambda}\left\{2^{1-2s}\sum_{k=s}^{+\infty}\frac{B(2k;s)}{k!}\left(-\frac{u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)^k H^{(k)}(0) \,+\, 2\theta\sum_{k>K}\frac{(us)^k}{k!}\,\frac{H^{(k)}(0)}{\mathfrak{S}_1^k}\right\}\frac{du}{u^{1+a}} \,=$$

$$= W_3 + R_3,$$

причём

$$|R_3| \leqslant 2M\kappa^{-1}\int\limits_0^{\lambda}\sum_{k>K}\frac{(us)^{2k}}{k!}\,\frac{du}{u^{1+a}} \,=$$

$$= \frac{2M\kappa^{-1}}{\lambda^a}\sum_{k>K}\frac{(\lambda s)^{2k}}{k!}\,\frac{1}{2k-a} \leqslant \frac{2M\kappa^{-1}}{\lambda^a(2K+2-a)}\sum_{k>K}\frac{(\lambda s)^{2k}}{k!}.$$

В силу формулы Стирлинга, при $k > K$ имеем:

$$\frac{(\lambda s)^{2k}}{k!} \,=\, \frac{(\lambda s)^{2k}}{\sqrt{2\pi k}}\left(\frac{e}{2k}\right)^k e^{-\frac{\theta}{12k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\left(\frac{e(\lambda s)^2}{k}\right)^k \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi K}}\left(\frac{e(\lambda s)^2}{K}\right)^k.$$

Воспользовавшись третьим из неравенств (1.37), найдём:

$$|R_3| \leqslant \frac{2M\kappa^{-1}}{\lambda^a K}\sum_{k>K}\frac{e^{-k}}{\sqrt{2\pi K}} \,<\, \frac{3}{2}\,\frac{M\kappa^{-1}}{\lambda^a K\sqrt{K}}\,e^{-(K+1)}.$$

Заметим теперь, что

$$\frac{\log N}{\log x} \,>\, (3ea)^2 \quad \text{и} \quad K+1 \geqslant \frac{1}{22}\,\frac{\log N}{\log x} \,>\, \beta a^2,$$

где $\beta = \dfrac{(3e)^2}{22}$. Поэтому, применяя при $u > 0$ очевидное неравенство $e^{-u} < \dfrac{1}{u+1}$, будем иметь:

$$e^{-(K+1)} < e^{-\beta a^2} < \frac{1}{1+\beta a^2} = \frac{1}{a}\,\frac{a}{1+\beta a^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{a}\max_{z\geqslant 0}\frac{z}{1+\beta z^2} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{2\sqrt{\beta}} = \frac{1}{a}\,\frac{\sqrt{22}}{6e}.$$

Наконец, принимая во внимание неравенство $K \geqslant 18$, получим:

$$|R_3| \leqslant \frac{3}{2}\,\frac{M\kappa^{-1}}{a\lambda^a}\,\frac{\sqrt{22}}{6e}\,\frac{1}{K\sqrt{K}} \leqslant \frac{\sqrt{11}}{216e}\,\frac{M\kappa^{-1}}{a\lambda^a} < \frac{1}{177}\,\frac{M\kappa^{-1}}{a\lambda^a}.$$

Далее, согласно лемме 1.15, $B(2k;s) = 0$ при $0 \leqslant k \leqslant s-1$. Поэтому при замене в сумме W_3 области изменения k промежутком $k \geqslant 1$ её значение не изменится:

$$W_3 = M\kappa^{-1}\int_0^\lambda \left\{2^{1-2s}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{B(2k;s)}{k!}\left(-\frac{u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)^k H^{(k)}(0)\right\}\frac{du}{u^{1+a}} =$$
$$= 2^{1-2s}M\kappa^{-1}\int_0^\lambda \left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{H^{(k)}(0)}{k!}\left(-\frac{u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)^k \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}m^{2k}\right\}\frac{du}{u^{1+a}} =$$
$$= 2^{1-2s}M\kappa^{-1}\int_0^\lambda \left\{\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)^k\frac{H^{(k)}(0)}{k!}\right\}\frac{du}{u^{1+a}} =$$
$$= 2^{1-2s}M\kappa^{-1}\int_0^\lambda \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}\left\{H\left(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\right) - H(0)\right\}\frac{du}{u^{1+a}}.$$

Применяя первое равенство леммы 1.17 наряду с тождеством

$$B(0;s) = \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m} + \frac{1}{2}\binom{2s}{s} = 0$$

из леммы 1.15, находим:

$$W_3 = M\kappa^{-1}\cdot 2^{1-2s}\int_0^\lambda \frac{\psi(u)}{u^{1+a}}\,du,$$

где

$$\psi(u) = \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}H\left(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\right) + \frac{1}{2}\binom{2s}{s}.$$

В силу последнего соотношения леммы 1.17 имеем оценку:

$$|\psi(u)| \leqslant \sum_{m=1}^{s}\binom{2s}{s-m} + \frac{1}{2}\binom{2s}{s} = 2^{2s-1}.$$

Поэтому, заменяя в выражении для W_3 интеграл по u несобственным, получим:

$$W_3 \,=\, M\kappa^{-1}\,2^{1-2s}\biggl(\int\limits_0^{+\infty} - \int\limits_\lambda^{+\infty}\biggr)\frac{\psi(u)}{u^{1+a}}\,du \,=\, M\kappa^{-1}\biggl(I(a) \,+\, \frac{\theta}{a\lambda^a}\biggr).$$

Сложив вместе найденные выше оценки величин R_k, $k = 1, 2, 3$, придём к равенству

$$\sum_n |v_n|^a \,=\, M\kappa^{-1}\bigl(I(a) \,+\, r(a)\bigr),$$

в котором

$$|r(a)| \leqslant \frac{2}{a\lambda^a} \,+\, \frac{N^{-\frac{1}{6}}}{a\lambda^a} \,+\, \frac{1}{177}\,\frac{1}{a\lambda^a} \,<\, \frac{2.006}{a\lambda^a} \,=\, 2.006a^{-1}\biggl(5es\sqrt{\frac{\log x}{\log N}}\,\biggr)^a.$$

Лемма доказана.

Трудности в работе с $I(a)$ объясняются следующим. Функции $H\bigl(-m^2u^2/\mathfrak{S}_1\bigr)$, $m \,=\, 1, 2, \ldots, s$, линейной комбинацией которых является подынтегральное выражение $\psi(u)$ в $I(a)$, разлагаются в бесконечные ряды по степеням $\mathfrak{S}_1^{-1}$. Эти ряды сходятся равномерно на всяком конечном отрезке $0 \leqslant u \leqslant U$, но не являются таковыми на всей полупрямой $u \geqslant 0$. Возможно ли почленное интегрирование выражений, которые получаются при подстановке этих рядов в $I(a)$?

Примеры показывают, что в некоторых случаях такой приём приводит к правильному результату. Известно, например, следующее утверждение Харди (см. [35], а также [36, п. 1.79]), согласно которому степенной ряд $\sum\limits_n a_n u^n$, сходящийся при $u > 0$, можно умножить на e^{-u} и интегрировать почленно в интервале $(0, +\infty)$, если только полученный в результате ряд сходится.

Кроме того, замена в выражении

$$0 \,=\, \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-1}{u^{1+a}}\,du \,=\, \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}e^u}{u^{1+a}}\,du, \quad 0 < a < 1,$$

величины e^u рядом и его дальнейшее почленное интегрирование приводят к верному тождеству

$$0 \,=\, \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u^{1+a}}\,du \,-\, \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} u^{n-1-a}e^{-u}\,du \,=$$

$$= \,\frac{1}{a}\,\Gamma(1-a) \,-\, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(n-a)}{n!} \,=\, -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n-a)}{n!}.$$

Приводимые ниже леммы 1.19 и 1.20 обосновывают законность почленного интегрирования в $I(a)$.

Лемма 1.19. *Пусть*

$$r_N(u) \,=\, \sum_{n>N} \frac{u^n}{n!}, \quad R_N(a) \,=\, \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-u}r_N(u)}{u^{1+a}}\,du,$$

где $0 < a < N$. *Тогда*

$$0 \leqslant R_N(a) \leqslant \frac{\Gamma(N+1-a)}{aN!}.$$

Доказательство. Воспользуемся следующим вариантом формулы Тейлора (см. [34, I, §5.41]): если функция $f(u)$ ν раз непрерывно дифференцируема на отрезке $a \leqslant u \leqslant a+h$, то

$$f(a+h) \;=\; \sum_{m=0}^{\nu-1} \frac{h^m}{m!}\, f^{(m)}(a) \;+\; \frac{h^\nu}{(\nu-1)!} \int_0^h (1-t)^{\nu-1} f^{(\nu)}(a+th)\, dt.$$

Полагая $f(u) = e^u$, $a = 0, h = u, \nu = N+1$, получим:

$$r_N(u) \;=\; e^u \;-\; \sum_{m=0}^{N} \frac{u^m}{m!} \;=\; \frac{u^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1-t)^N e^{tu} dt.$$

Предполагая, что $N > a$, будем, следовательно, иметь:

$$R_N(a) \;=\; \lim_{Y \to +\infty} R_N(a; Y),$$

где

$$R_N(a;Y) \;=\; \int_0^Y \frac{e^{-u} r_N(u)}{u^{1+a}}\, du \;=\; \frac{1}{N!} \int_0^Y u^{N-a} e^{-u} \int_0^1 (1-t)^N e^{tu}\, dt du. \tag{1.38}$$

Так как функция двух переменных $u^{N-a}e^{-u} \cdot (1-t)^N e^{tu}$ интегрируема по Риману в прямоугольнике $0 \leqslant u \leqslant Y$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то по теореме Фубини в (1.38) можно изменить порядок интегрирования. Так получим:

$$R_N(a;Y) \;=\; \frac{1}{N!} \int_0^1 (1-t)^N \int_0^Y e^{-(1-t)u} u^{N-a}\, du\, dt \;=$$

$$= \;\frac{1}{N!} \int_0^1 (1-t)^{-1+a} \left(\int_0^{(1-t)Y} e^{-y} y^{N-a} dy \right) dt.$$

Так как при любых t и Y внутренний интеграл не превосходит $\Gamma(N+1-a)$, то

$$0 \leqslant R_N(a;Y) \leqslant \frac{\Gamma(N+1-a)}{N!} \int_0^1 (1-t)^{-1+a} dt \;=\; \frac{\Gamma(N+1-a)}{a\,N!}.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant R_N(a) \leqslant \frac{\Gamma(N+1-a)}{a\,N!}.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.20. *Пусть* $a > 0, a \neq 2, 4, 6, \ldots$, *и пусть* $s = \left[\frac{a+1}{2}\right] + 1$. *Тогда для интеграла* $I(a)$ *справедливо равенство*

$$I(a) \,=\, 2^{-2s} B(a;s) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\, \Gamma\Big(n - \frac{a}{2}\Big).$$

Доказательство. Пусть N - достаточно большое целое число, $N \geqslant 2s$. Представим

$$\Phi(z) \,=\, \Big\{\sum_{n=0}^{N} + \sum_{n>N}\Big\}\Phi_n z^n \,=\, \Phi_N(z) \,+\, \varphi_N(z).$$

Тогда при любом m с условием $1 \leqslant m \leqslant s$ имеем:

$$H\Big(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\Big) \,=\, e^{-\,m^2u^2}\Big\{\Phi_N\Big(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\Big) \,+\, \varphi_N\Big(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\Big)\Big\}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для $\psi(u)$, получим:

$$\psi(u) \,=\, \frac{1}{2}\binom{2s}{s} \,+\, \sum_{m=1}^{s}(-1)^m \binom{2s}{s-m} e^{-\,m^2u^2}\Big\{\Phi_N\Big(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\Big) \,+\, \varphi_N\Big(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\Big)\Big\} \,=$$
$$=\, \Psi_N(u) \,+\, \psi_N(u),$$

где смысл обозначений $\Psi_N(u)$ и $\psi_N(u)$ очевиден. Так интеграл $I(a)$ представляется суммою

$$2^{1-2s} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\Psi_N(u) + \psi_N(u)}{u^{1+a}}\, du \,=\, J_N(a) \,+\, j_N(a).$$

Оценим сверху величину $|j_N(a)|$. Имеем, прежде всего:

$$j_N(a) \,=\, 2^{1-2s} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\psi_N(u)}{u^{1+a}}\, du \,=\, 2^{1-2s} \sum_{m=1}^{s}(-1)^m \binom{2s}{s-m} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-m^2u^2}}{u^{1+a}}\, \varphi_N\Big(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\Big)\, du.$$

Полагая в интеграле $v = (mu)^2$, приводим его к виду

$$\frac{m^a}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\,v}}{v^{1+\frac{a}{2}}}\, \varphi_N\Big(-\frac{v}{\mathfrak{S}_1}\Big)\, dv.$$

Следовательно,

$$j_N(a) \,=\, 2^{2s}\Big\{\sum_{m=1}^{s}(-1)^m \binom{2s}{s-m} m^a\Big\} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\,v}}{v^{1+\frac{a}{2}}}\, \varphi_N\Big(-\frac{v}{\mathfrak{S}_1}\Big)\, dv \,=$$
$$=\, 2^{-2s} B(a;s) \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\,v}}{v^{1+\frac{a}{2}}}\, \varphi_N\Big(-\frac{v}{\mathfrak{S}_1}\Big)\, dv.$$

В силу леммы 1.11 имеют место следующие неравенства:

$$\Big|\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-v}}{v^{1+\frac{a}{2}}}\,\varphi_N\Big(-\frac{v}{\mathfrak{S}_1}\Big)\,dv\Big| \leqslant \int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-v}r_N(v)}{v^{1+\frac{a}{2}}}\,dv \,=\, R_N\Big(\frac{a}{2}\Big) \leqslant \frac{2\Gamma\Big(N+1-\frac{a}{2}\Big)}{aN!}.$$

Займёмся теперь вычислением интеграла $J_N(a)$. Для этого представим подынтегральную функцию $\Psi_N(u)$ в виде

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\binom{2s}{s} \,+\, \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}e^{-m^2u^2}\Phi_N\Big(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\Big) \,=\\ =\, \frac{1}{2}\binom{2s}{s} \,+\, \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}e^{-m^2u^2}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\Phi_n\Big(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\Big)^n \,=\\ =\, \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,A_n(u)u^{2n},\end{aligned}$$

где

$$A_n(u) \,=\, \begin{cases}\dfrac{1}{2}\dbinom{2s}{s} \,+\, \displaystyle\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}e^{-m^2u^2}, & \text{если } n=0;\\ \displaystyle\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}m^{2n}e^{-m^2u^2}, & \text{если } n\geqslant 1.\end{cases}$$

Тогда $J_N(a)$ представится суммою

$$2^{1-2s}\int\limits_0^{+\infty}\Big\{\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,A_n(u)u^{2n}\Big\}\frac{du}{u^{1+a}} \,=\, 2^{1-2s}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,I_n,$$

где через I_n обозначен интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}A_n(u)u^{2n}\,\frac{du}{u^{1+a}}.$$

Все интегралы I_n сходятся. Действительно, сходимость на всяком бесконечном промежутке вида $(\delta;+\infty)$, $\delta>0$, следует из оценки

$$|A_n(u)| \leqslant e^{-u^2}s^{2n}\sum_{m=1}^{s}\binom{2s}{s-m} \,=\, 2^{2s-1}s^{2n}e^{-u^2},$$

а сходимость на промежутке $(0;\delta)$ следует из того, что подынтегральная функция $A_n(u)u^{2n-1-a}$ не имеет особенностей в точке $u=0$. Если $n\geqslant s$, то это легко заключить из неравенств

$$2n-1-a \geqslant 2s-1-a \,=\, 2\Big(1\,-\,\Big\{\frac{a+1}{2}\Big\}\Big) \,=\, \gamma \,>\, 0.$$

Если же $0 \leqslant n \leqslant s-1$, то, обозначая через $a_k^{(n)}$ коэффициент при u^{2k} в разложении $A_n(u)$ в ряд по степеням u, найдём:

$$a_0^{(0)} = \frac{1}{2}\binom{2s}{s} + \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m} = B(0;s),$$
$$a_n^{(k)} = \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}m^{2n}\frac{(-m^2)^k}{k!} = \frac{(-1)^k}{k!}B(2(n+k);s), \text{ если } (k,n)\neq(0,0).$$

Из леммы 1.15 следует, что разложение $A_n(u)$ начинается с члена, содержащего $u^{2(s-n)}$. Поэтому вблизи точки $u=0$ подынтегральная функция имеет порядок $u^{2(s-n)}\cdot u^{2n}\,u^{-1-a} = u^{\gamma}$, где, как и выше,

$$\gamma = 2\left(1 - \left\{\frac{a+1}{2}\right\}\right).$$

Отсюда следует сходимость I_n.

Вычислим теперь каждый из интегралов I_n. Пусть сперва $n \geqslant s$. Выше мы нашли, что $2n-1-a \geqslant \gamma > 0$. Поэтому I_n допускает почленное интегрирование:

$$I_n = \int_0^{+\infty} A_n(u)u^{2n}\frac{du}{u^{1+a}} = \int_0^{+\infty}\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}m^{2n}e^{-m^2u^2}u^{2n-1-a}\,du =$$
$$= \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}m^{2n}\int_0^{+\infty}e^{-m^2u^2}u^{2n-1-a}\,du =$$
$$= \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}m^{2n}\frac{m^a}{2m^{2n}}\Gamma\left(n-\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}B(a;s)\Gamma\left(n-\frac{a}{2}\right). \quad (1.39)$$

Пусть теперь $0 \leqslant n \leqslant s-1$. Поскольку $\frac{a}{2}$ не является целым числом, проинтегрируем в I_n по частям; получим:

$$I_n = \int_0^{+\infty} A_n(u)\frac{du^{2n-a}}{2n-a} = \frac{1}{2n-a}\left(A_n(u)u^{2n-a}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}A_n'(u)u^{2n-a}\,du\right).$$

Выше было установлено, что $A_n(u) = O\big(u^{2(s-n)}\big)$ для рассматриваемых n. Поэтому

$$A_n(u)u^{2n-a}\Big|_0 = 0$$

и, следовательно,

$$I_n = -\frac{1}{2n-a}\int_0^{+\infty}A_n'(u)u^{2n-a}\,du.$$

Замечая теперь, что

$$A_n'(u) \,=\, \frac{d}{du}\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}m^{2n}e^{-\,m^2u^2} \,=$$

$$=\,\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}m^{2n}(-2m^2u)e^{-\,m^2u^2} \,=$$

$$=\,-2u\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}m^{2(n+1)}e^{-\,m^2u^2} \,=\, -2uA_{n+1}(u),$$

приходим к следующей рекуррентной формуле:

$$I_n \,=\, \frac{2}{2n-a}\int\limits_0^{+\infty}A_{n+1}(u)u^{2(n+1)}\,\frac{du}{u^{1+a}} \,=\, \frac{I_{n+1}}{n-\frac{a}{2}}. \tag{1.40}$$

Если $n+1\geqslant s$, то в силу (1.39) имеем равенства:

$$I_{n+1} \,=\, \frac{1}{2}\,B(a;s)\Gamma\Big(n+1-\frac{a}{2}\Big) \,=\, \frac{1}{2}\,B(a;s)\Big(n-\frac{a}{2}\Big)\Gamma\Big(n-\frac{a}{2}\Big),$$
$$I_n \,=\, \frac{1}{2}\,B(a;s)\Gamma\Big(n-\frac{a}{2}\Big).$$

Если же $n+1<s$, то для получения искомого равенства соотношение (1.40) необходимо применить несколько раз. Именно, пусть $s-k\leqslant n<s+1-k$, где $2\leqslant k\leqslant s$ - некоторое целое число. Тогда, воспользовавшись (1.39) и (1.40), получим: $n+k\geqslant s$, так что

$$I_n \,=\, \frac{1}{n-\frac{a}{2}}\cdot\frac{1}{n+1-\frac{a}{2}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n+k-1-\frac{a}{2}}\,I_{n+k} \,=$$

$$=\,\frac{1}{2}\,B(a;s)\,\frac{\Gamma\Big(n+k-\frac{a}{2}\Big)}{\prod\limits_{\nu=0}^{k-1}\Big(n+\nu-\frac{a}{2}\Big)} \,=\, \frac{1}{2}\,B(a;s)\Gamma\Big(n-\frac{a}{2}\Big),$$

что и требовалось.

Возвращаясь к вычислению $J_N(a)$ и собирая вместе полученные результаты, найдём:

$$J_N(a) \,=\, \sum_{n=0}^{N}2^{1-2s}\,(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,\frac{1}{2}\,B(a;s)\Gamma\Big(n-\frac{a}{2}\Big) \,=$$

$$=\,\frac{1}{2}\,B(a;s)\,2^{1-2s}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\Gamma\Big(n-\frac{a}{2}\Big),$$

$$I(a) \,=\, 2^{-2s}B(a;s)\Big\{\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\Gamma\Big(n-\frac{a}{2}\Big) \,+\, \frac{2\theta}{a}\,\frac{\Gamma\Big(N+1-\frac{a}{2}\Big)}{\Gamma(N+1)}\Big\}.$$

Устремляя N к бесконечности, получим требуемое.

Замечание 1. Отметим некоторые частные случаи леммы 1.20. Пользуясь равенством

$$\Gamma\Big(\nu+\frac{1}{2}\Big) \;=\; \frac{(2\nu)!}{\nu!}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\nu}},$$

несложно получить следующие разложения:

$$I(1) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{4}\Big\{1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\,\frac{(2n)!}{n!}\,\frac{\Phi_{n+1}}{\mathfrak{S}_1^{n+1}}\Big\} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\Big\{1-\frac{1}{4}\,\frac{\Phi_2}{\mathfrak{S}_1^2}+\frac{3}{8}\,\frac{\Phi_3}{\mathfrak{S}_1^3}-\frac{15}{16}\,\frac{\Phi_4}{\mathfrak{S}_1^4}+\frac{105}{32}\,\frac{\Phi_5}{\mathfrak{S}_1^5}-\frac{945}{64}\,\frac{\Phi_6}{\mathfrak{S}_1^6}+\ldots\Big\}, \quad (1.41)$$

$$I(3) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{8}\Big\{1+\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\,\frac{(2n)!}{n!}\,\frac{\Phi_{n+2}}{\mathfrak{S}_1^{n+2}}\Big\} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{8}\Big\{1+\frac{3}{4}\,\frac{\Phi_2}{\mathfrak{S}_1^2}-\frac{3}{8}\,\frac{\Phi_3}{\mathfrak{S}_1^3}+\frac{9}{16}\,\frac{\Phi_4}{\mathfrak{S}_1^4}-\frac{45}{32}\,\frac{\Phi_5}{\mathfrak{S}_1^5}+\frac{315}{64}\,\frac{\Phi_6}{\mathfrak{S}_1^6}-\frac{2\,835}{128}\,\frac{\Phi_7}{\mathfrak{S}_1^7}+\frac{31\,185}{256}\,\frac{\Phi_8}{\mathfrak{S}_1^8}-\ldots\Big\}.$$

Замечание 2. Пользуясь формулой дополнения в виде

$$\Gamma\Big(n-\frac{a}{2}\Big) \;=\; \frac{(-1)^{n+1}\pi}{\sin\dfrac{\pi a}{2}}\,\frac{1}{\Gamma\Big(1-n+\dfrac{a}{2}\Big)},$$

выражению для $I(a)$ можно придать следующий вид:

$$I(a) \;=\; 2^{2s-a-1}\pi\kappa(a;s)\Gamma(a+1)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Phi_n\mathfrak{S}_1^{-\,n}}{\Gamma\Big(1-n+\dfrac{a}{2}\Big)} \;=$$

$$= -\,\frac{\pi}{2}B(a;s)\Big(\sin\frac{\pi a}{2}\Big)^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Phi_n\mathfrak{S}_1^{-\,n}}{\Gamma\Big(1-n+\dfrac{a}{2}\Big)}.$$

Теорема 1.2. *Пусть $x_0 < x \leqslant N^{\,0.0001}$, a - произвольное вещественное число, отличное от чётного целого и удовлетворяющее условиям*

$$0 \;<\; a \;<\; \frac{1}{3e}\sqrt{\frac{\log N}{\log x}}.$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$\sum_n |V(t_n)|^a \;=\; \frac{M}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\Big(\frac{a+1}{2}\Big)\Big\{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^{\,n-\frac{a}{2}}}\,\frac{\Gamma\Big(n-\dfrac{a}{2}\Big)}{\Gamma\Big(-\dfrac{a}{2}\Big)}+$$

$$+\;\theta b\Big(5ec\sqrt{\frac{\log x}{\log N}\cdot\frac{\max(a,1)}{\mathfrak{S}_1}}\;\Big)^a\Big\},$$

где

$$b = \begin{cases} 4.01, & \textit{если} \quad 0 < a < 1, \\ 10.67, & \textit{если} \quad a \geqslant 1, \end{cases} \qquad c = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad 0 < a < 1, \\ \pi, & \textit{если} \quad a \geqslant 1. \end{cases}$$

Доказательство. Согласно лемме 1.18, имеет место равенство

$$\sum_n |V(t_n)|^a \;=\; M\mathfrak{S}_1^{\frac{a}{2}} \left\{ \frac{I(a)}{\kappa(a;s)} \;+\; \theta\, \frac{r(a)}{\kappa(a;s)} \right\},$$

в котором

$$s \;=\; \left[\frac{a+1}{2}\right] + 1, \quad \kappa(a;s) \;=\; \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\sin u)^{2s}}{u^{1+a}}\, du, \quad r(a) \;=\; 2.006 a^{-1} \left(5es \sqrt{\frac{\log x}{\log N}} \right)^a,$$

а $I(a)$ - некоторый интеграл, для которого в лемме 1.20 было найдено следующее выражение:

$$I(a) \;=\; 2^{-2s} B(a;s) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\, \Gamma\Big(n - \frac{a}{2}\Big).$$

В силу леммы 1.16 имеем:

$$\frac{B(a;s)}{\kappa(a;s)} \;=\; -\,\frac{2^{2s-a}}{\pi}\, \Gamma(a+1) \sin\frac{\pi a}{2}.$$

Далее, воспользовавшись формулами удвоения и дополнения для гамма-функции, получим:

$$\Gamma(a+1) \;=\; \frac{2^a}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right), \quad \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right) \;=\; -\,\frac{\pi}{\Gamma\Big(-\frac{a}{2}\Big)} \left(\sin\frac{\pi a}{2}\right)^{-1},$$

откуда

$$\frac{1}{\pi}\, \Gamma(a+1) \sin\frac{\pi a}{2} \;=\; -\,\frac{2^a}{\sqrt{\pi}}\, \frac{\Gamma\Big(\frac{a+1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(-\frac{a}{2}\Big)}.$$

Таким образом,

$$2^{-2s}\, \frac{B(a;s)}{\kappa(a;s)} \;=\; 2^{-2s} \cdot \big(-\,2^{2s-a}\big) \cdot \frac{\big(-\,2^a\big)}{\sqrt{\pi}}\, \frac{\Gamma\Big(\frac{a+1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(-\frac{a}{2}\Big)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \frac{\Gamma\Big(\frac{a+1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(-\frac{a}{2}\Big)},$$

и, следовательно,

$$\sum_n |V(t_n)|^a \;=\; \frac{M}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^{\,n-\frac{a}{2}}}\, \frac{\Gamma\Big(n - \frac{a}{2}\Big)}{\Gamma\Big(-\frac{a}{2}\Big)} \;+\; \theta\, R(a) \right\},$$

где

$$R(a) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\Big(\dfrac{a+1}{2}\Big)}\,\frac{\mathfrak{S}_1^{\,-\frac{a}{2}}r(a)}{\kappa(a;s)}.$$

Пусть сперва $0<a<1$. Тогда

$$s=1,\quad B(a;s)=-1,\quad \kappa(a;s) \;=\; \frac{2^a\pi}{4\Gamma(a+1)\sin\dfrac{\pi a}{2}},$$

так что

$$R(a) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\Big(\dfrac{a+1}{2}\Big)}\cdot\frac{4\Gamma(a+1)\sin\dfrac{\pi a}{2}}{2^a\pi}\cdot\mathfrak{S}_1^{\,-\frac{a}{2}}\cdot\frac{2.006}{a}\left(\frac{5e}{2}\sqrt{\frac{\log x}{\log N}}\right)^a \;=$$

$$=\; 1.003\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi a}{2}}{\dfrac{\pi a}{2}}\cdot\frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(a+1)}{\Gamma\Big(\dfrac{a+1}{2}\Big)}\left(\frac{5e}{2}\sqrt{\frac{\log x}{\mathfrak{S}_1\log N}}\right)^a.$$

Поскольку

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\Big(\dfrac{a+1}{2}\Big)} \;=\; -\,\frac{2^a\sqrt{\pi}}{\Gamma\Big(-\dfrac{a}{2}\Big)}\Big(\sin\frac{\pi a}{2}\Big)^{-1} \;=\; \frac{a}{2}\,\frac{2^a\sqrt{\pi}}{\Gamma\Big(1-\dfrac{a}{2}\Big)}\Big(\sin\frac{\pi a}{2}\Big)^{-1},$$

то окончательно находим:

$$R(a) \;=\; 1.003\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi a}{2}}{\dfrac{\pi a}{2}}\cdot 4\sqrt{\pi}\cdot\frac{a}{2}\,\frac{2^a\sqrt{\pi}}{\Gamma\Big(1-\dfrac{a}{2}\Big)}\Big(\sin\frac{\pi a}{2}\Big)^{-1}\left(\frac{5e}{2}\sqrt{\frac{\log x}{\mathfrak{S}_1\log N}}\right)^a \;=$$

$$=\; \frac{4.012}{\Gamma\Big(1-\dfrac{a}{2}\Big)}\left(\frac{5e}{2}\sqrt{\frac{\log x}{\mathfrak{S}_1\log N}}\right)^a \;<\; 4.012\left(5e\sqrt{\frac{\log x}{\mathfrak{S}_1\log N}}\right)^a.$$

Рассмотрим теперь случай $a\geqslant 1$. Пользуясь нижней оценкой величин $\kappa(a;s)$, установленной в лемме 1.16, будем иметь:

$$|R(a)| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\Big(\dfrac{a+1}{2}\Big)}\cdot 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^a\cdot\frac{2.006}{a}\left(5es\sqrt{\frac{\log x}{\mathfrak{S}_1\log N}}\,\right)^a \;=$$

$$=\; \frac{6.018\sqrt{\pi}}{\Gamma\Big(\dfrac{a+1}{2}\Big)}\left\{\frac{5\pi e}{2}\,s\sqrt{\frac{\log x}{\mathfrak{S}_1\log N}}\,\right\}^a \leqslant \frac{10.67}{a}\left\{\frac{5\pi e}{2}\,\varrho(a)\sqrt{\frac{a\log x}{\mathfrak{S}_1\log N}}\,\right\}^a,$$

где

$$\varrho(a) \,=\, \frac{1 \,+\, \left[\dfrac{a+1}{2}\right]}{\sqrt{a}\Big\{\Gamma\Big(\dfrac{a+1}{2}\Big)\Big\}^{1/a}}.$$

Несложно проверить, что $\varrho(a) \leqslant \varrho(1) = 2$ при $a \geqslant 1$. Поэтому окончательно получаем:

$$|R(a)| \leqslant \frac{10.67}{a}\left\{5\pi e\sqrt{\frac{a\log x}{\mathfrak{S}_1 \log N}}\,\right\}^a.$$

Теорема доказана.

В завершение параграфа покажем, что бесконечный ряд, фигурирующий в формуле теоремы 1.2, является асимптотическим. Доказательство этого факта мы предварим следующим вспомогательным утверждением.

Лемма 1.21. *Пусть x настолько велико, что $\mathfrak{S}_1 = \sum\limits_{p \leqslant x} \dfrac{1}{p} \geqslant 5$. Тогда последовательность чисел*

$$g(n) \,=\, \left(\frac{\log\log n + 1}{\mathfrak{S}_1}\right)^n, \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

убывает на промежутке $2 \leqslant n \leqslant x^{2/5}$.

Доказательство. Из неравенств

$$g(2) \,>\, \frac{0.40}{\mathfrak{S}_1^2}, \quad \frac{1.30}{\mathfrak{S}_1^3} \,<\, g(3) \,<\, \frac{1.31}{\mathfrak{S}_1^3}, \quad \frac{3.09}{\mathfrak{S}_1^4} \,<\, g(3) \,<\, \frac{3.10}{\mathfrak{S}_1^4},$$

$$\frac{7.00}{\mathfrak{S}_1^5} \,<\, g(5) \,<\, \frac{7.01}{\mathfrak{S}_1^5}, \quad \frac{15.74}{\mathfrak{S}_1^6} \,<\, g(6) \,<\, \frac{15.75}{\mathfrak{S}_1^6}$$

следует, что каждое из неравенств $g(n) \geqslant g(n+1)$, $n = 2, 3, 4, 5$, выполняется уже при $\mathfrak{S}_1 > \dfrac{1.31}{0.40} = 3.275$. Поэтому утверждение леммы получим, если докажем, что функция $f(u) = \log g(u)$ монотонно убывает на промежутке $6 \leqslant u \leqslant x^{2/5}$. В свою очередь, для этого достаточно показать, что производная

$$f'(u) \,=\, \log\big(\log\log u + 1\big) \,+\, \frac{1}{(\log u)(\log\log u + 1)} \,-\, \mathfrak{S}_1$$

отрицательна для указанных значений u. Запишем её в виде $h(\log\log u + 1)$, где

$$h(v) \,=\, \log v \,+\, \frac{e}{ve^v} \,-\, \log\mathfrak{S}_1,$$

и покажем, что $h(v) < 0$ при $w_1 < v < w_2$, где

$$w_1 \,=\, \log\log 6 + 1 \quad w_2 \,=\, \log\log\big(x^{2/5}\big) + 1.$$

Функция $e^{v-1} - 1 - v^{-1}$ монотонно возрастает при положительных v. Обозначая через v_0 её единственный нуль, приближённое значение которого равно $1.508\,55\ldots$, заключаем, что при $v > v_0$ производная

$$h'(v) = \frac{e}{ve^v}\left(e^{v-1} - 1 - \frac{1}{v}\right)$$

положительна, а сама функция $h(v)$ монотонно возрастает.

Положим теперь $v_1 = \mathfrak{S}_1 - 3e^{-\mathfrak{S}_1}$, $v_2 = \mathfrak{S}_1$. Тогда

$$h(v_2) = \frac{3}{\mathfrak{S}_1 e^{\mathfrak{S}_1}} > 0.$$

Вместе с тем,

$$h(v_1) = \log\frac{v_1}{\mathfrak{S}_1} + \frac{e}{v_1 e^{v_1}} = \log\left(1 - \frac{3}{\mathfrak{S}_1 e^{\mathfrak{S}_1}}\right) + \frac{e}{v_1 e^{v_1}} < -\frac{3}{\mathfrak{S}_1 e^{\mathfrak{S}_1}} + \frac{e}{v_1 e^{v_1}}.$$

Пользуясь неравенством $e^{-u} > 1 - u$, получим:

$$v_1 e^{v_1} = \mathfrak{S}_1 e^{\mathfrak{S}_1}\left(1 - \frac{3}{\mathfrak{S}_1 e^{\mathfrak{S}_1}}\right)\exp\left\{-\frac{3}{e^{\mathfrak{S}_1}}\right\} > \mathfrak{S}_1 e^{\mathfrak{S}_1}\left(1 - \frac{3}{\mathfrak{S}_1 e^{\mathfrak{S}_1}}\right)^2 > \\ > \mathfrak{S}_1 e^{\mathfrak{S}_1}\left(1 - \frac{3}{e^5}\right)^2 > 0.95\mathfrak{S}_1 e^{\mathfrak{S}_1},$$

откуда

$$h(v_1) < \left(-3 + \frac{e}{0.95}\right)\frac{1}{\mathfrak{S}_1 e^{\mathfrak{S}_1}} < -\frac{0.1}{\mathfrak{S}_1 e^{\mathfrak{S}_1}} < 0.$$

В силу сказанного выше, функция $h(v)$ имеет между v_1 и v_2 единственный нуль. Поэтому $h(v) < 0$ при всех v, $v_0 < v < v_1$.

Заметим теперь, что из условия $\mathfrak{S}_1 \geqslant 5$ следует, что $\log\log x \geqslant 4.5$ и $\log x \geqslant e^{4.5}$. Но тогда, в силу формулы (2) леммы 3.П,

$$v_1 = \mathfrak{S}_1 - 3e^{-\mathfrak{S}_1} \geqslant \mathfrak{S}_1 - 3e^{-5} > \log\log x + 0.2614 - \frac{0.5}{\log^2 x} - \frac{3}{e^5} \geqslant \\ \geqslant \log\log x + 0.2614 - \frac{0.5}{4.5^2} - \frac{3}{e^5} > \log\log x + 0.2 > \\ > \log\log x + 1 - \log\frac{5}{2} = \log\log\left(x^{2/5}\right) + 1 = w_2.$$

Кроме того, очевидно, что $w_1 = \log\log 6 + 1 = 1.583\,198\ldots > v_0$. Таким образом, интервал (w_1, w_2) целиком содержится в интервале (v_0, v_1), на котором $h(v)$ отрицательна. Следовательно, $f'(u) < 0$ при $6 \leqslant u \leqslant x^{2/5}$. Лемма доказана.

Лемма 1.22. *Пусть a - положительное число, отличное от целого чётного, $m \geqslant 0$ - целое число, не превосходящее наименьшего из чисел $\sqrt[3]{x}$ и $\dfrac{a}{30}\dfrac{\log x}{\log\mathfrak{S}_1} - 1$. Тогда имеет место оценка:*

$$\left|\sum_{n>m}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\frac{\Gamma\left(n - \frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{a}{2}\right)}\right| < c\Gamma\left(1 + \frac{a}{2}\right)g(m+d+1),$$

где, как и выше,

$$g(u) \,=\, \left(\frac{\log\log u + 1}{\mathfrak{S}_1}\right)^u,$$

а величины c и d определяются равенствами

$$c \,=\, \begin{cases} 0.32, & \text{если } m = 0 \text{ или } m = 1, \\ 4.56, & \text{если } m \geqslant 2, \end{cases} \qquad d \,=\, \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ 0, & \text{если } m \geqslant 1, \end{cases}$$

Доказательство. Докажем сперва справедливость утверждения леммы для всех $m \geqslant 2$. Положим

$$S_m \,=\, \sum_{n>m} (-1)^n \,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,\Gamma\Big(n \,-\, \frac{a}{2}\Big)$$

и рассмотрим два случая.

Случай 1: $m \,>\, 1 + \dfrac{a}{2}$. Воспользовавшись формулой Стирлинга, при любом $n > m$ получим:

$$\Gamma\Big(n - \frac{a}{2}\Big) \,=\, \frac{\Gamma\Big(n \,-\, \dfrac{a}{2}\Big)}{n \,-\, \dfrac{a}{2}} \,=\, \frac{\sqrt{2\pi\Big(n \,-\, \frac{1}{2}\,a\Big)}}{n \,-\, \frac{1}{2}\,a} \cdot \left(\frac{n \,-\, \frac{1}{2}\,a}{e}\right)^{n-\frac{a}{2}} \exp\left\{\frac{\theta}{12\big(n \,-\, \frac{1}{2}\,a\big)}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{n \,-\, \frac{1}{2}\,a}} \left(\frac{e}{n \,-\, \frac{1}{2}\,a}\right)^{\frac{a}{2}} \left(\frac{n \,-\, \frac{1}{2}\,a}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12}} \,=\, \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{1}{12}}}{\Big(n \,-\, \frac{1}{2}\,a\Big)^{\frac{1+a}{2}}} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{a}{2}} \left(1 \,-\, \frac{a}{2n}\right)^n \,<$$

$$<\, \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{1}{12}}}{\Big(n \,-\, \frac{1}{2}\,a\Big)^{\frac{1+a}{2}}} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Замечая, что при $n \geqslant m + 1 > 2 + \dfrac{a}{2}$ справедливы оценки

$$n \,-\, \frac{a}{2} \,=\, n\Big(1 \,-\, \frac{a}{2n}\Big) \,>\, n\Big(1 \,-\, \frac{a}{a+4}\Big) \,=\, \frac{4n}{a+4},$$

окончательно найдём:

$$\Gamma\Big(1 \,-\, \frac{a}{2}\Big) \,<\, \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{1}{12}}}{\Big(\dfrac{n}{a+4}\,a\Big)^{\frac{1+a}{2}}} \left(\frac{n}{e}\right)^n \,=\, \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{1}{12}}}{n^{\frac{1+a}{2}}} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 \,+\, \frac{a}{4}\right)^{\frac{1+a}{2}},$$

$$\frac{1}{n!}\,\Gamma\Big(1 \,-\, \frac{a}{2}\Big) \,<\, \frac{e^{\frac{1}{12}}}{n^{1+\frac{a}{2}}} \left(1 \,+\, \frac{a}{4}\right)^{\frac{1+a}{2}}. \tag{1.42}$$

Представим S_m суммою

$$\left\{ \sum_{m<n\leqslant x^{2/5}} + \sum_{n>x^{2/5}} \right\} (-1)^n \,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n} \Gamma\Big(1 \,-\, \frac{a}{2}\Big) \,=\, S_m^{(1)} \,+\, S_m^{(2)}.$$

Тогда, воспользовавшись оценкой леммы 1.12, будем иметь

$$|S_m^{(1)}| \leqslant \sqrt{2\pi} \sum_{m<n\leqslant x^{2/5}} \frac{g(n)}{n!}\Gamma\left(1 - \frac{a}{2}\right), \quad g(n) = \left(\frac{\log\log n + 1}{\mathfrak{S}_1}\right)^n.$$

Согласно лемме 1.21 наибольшее значение дроби $g(n)$ на рассматриваемом промежутке отвечает $n = m + 1$. Применив (1.42), будем, следовательно, иметь:

$$|S_m^{(1)}| \leqslant \sqrt{2\pi} g(m+1) e^{\frac{1}{12}} \left(1 + \frac{a}{4}\right)^{\frac{1+a}{2}} \sum_{n>m} n^{-1-\frac{a}{2}} < \\ < 2\sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{12}} \frac{g(m+1)}{a m^{\frac{a}{2}}} \left(1 + \frac{a}{4}\right)^{\frac{1+a}{2}}.$$

Так как $m > 1 + \dfrac{a}{2}$, то величина $m^{-\frac{a}{2}} \left(1 + \dfrac{a}{4}\right)^{\frac{1+a}{2}}$ не превосходит максимума функции

$$\frac{\left(1 + \dfrac{a}{4}\right)^{\frac{1+a}{2}}}{\left(1 + \dfrac{a}{2}\right)^{\frac{a}{2}}} = \sqrt{1 + \frac{a}{4}} \left(\frac{1 + \frac{1}{4}a}{1 + \frac{1}{2}a}\right)^{\frac{a}{2}}$$

на промежутке $a \geqslant 0$, который равен $b_0 = 1.033\,68\ldots$. Следовательно,

$$|S_m^{(2)}| < \frac{b_1}{a} g(m+1), \quad b_1 = 2b_0\sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{12}} = 5.63245\ldots.$$

Далее, применив лемму 1.11 наряду с неравенством (1.42), находим:

$$|S_m^{(2)}| < \sum_{n>x^{2/5}} \frac{1}{n!}\Gamma\left(n - \frac{a}{2}\right) < e^{\frac{1}{12}} \left(1 + \frac{a}{4}\right)^{\frac{1+a}{2}} \sum_{n>x^{2/5}} n^{-1-\frac{a}{2}} < \\ < \frac{2e^{\frac{1}{12}}}{a} \left(1 + \frac{a}{4}\right)^{\frac{1+a}{2}} x^{-\frac{a}{2}}.$$

Так как $m + 1 < \dfrac{a}{30} \dfrac{\log x}{\log \mathfrak{S}_1}$, то

$$\frac{1}{g(m+1)} = \left(\frac{\mathfrak{S}_1}{\log\log(m+1) + 1}\right)^{m+1} < \mathfrak{S}_1^{m+1} < x^{\frac{a}{30}}.$$

Поскольку $m \leqslant \sqrt[3]{x}$, то $x^{\frac{a}{30}} = x^{\frac{a}{5}} \cdot x^{-\frac{a}{6}} \leqslant x^{\frac{a}{5}} m^{-\frac{a}{2}}$, так что окончательно имеем:

$$\frac{1}{g(m+1)} < \frac{x^{\frac{a}{5}}}{m^{\frac{a}{2}}}, \quad x^{-\frac{a}{5}} < \frac{g(m+1)}{m^{\frac{a}{2}}}.$$

Таким образом,

$$|S_m^{(2)}| \,<\, \frac{2e^{\frac{1}{12}}}{a}\left(1+\frac{a}{4}\right)^{\frac{1+a}{2}}\frac{g(m+1)}{m^{\frac{a}{2}}} \,<\, \frac{b_2}{a}\,g(m+1), \quad b_2 \,=\, 2e^{\frac{1}{12}}b_0 \,=\, 2.24702\ldots,$$

поэтому в случае $m > 1+\dfrac{a}{2}$ имеем:

$$|S_m| \,<\, |S_m^{(1)}| \,+\, |S_m^{(2)}| \,<\, \frac{(b_1+b_2)}{a}\,g(m+1). \tag{1.43}$$

Случай 2: $m \,<\, 1+\dfrac{a}{2}$ (одновременное выполнение условия $m \geqslant 2$ возможно, очевидно, лишь при $a > 2$). Полагая $\nu = \left[\dfrac{a}{2}\right] + 2$, представим S_m в виде

$$\left\{\sum_{m<n\leqslant\nu} + \sum_{n>\nu}\right\}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,\Gamma\left(n\,-\,\frac{a}{2}\right) \,=\, S_1^{(1)} \,+\, S_1^{(2)}.$$

В силу (1.43) имеем:

$$|S_m^{(2)}| \,<\, \frac{(b_1+b_2)}{a}\,g(\nu+1) \leqslant \frac{(b_1+b_2)}{a}\,g(m+1). \tag{1.44}$$

Далее, вновь применяя леммы 1.12 и 1.21, находим:

$$\begin{aligned}|S_m^{(1)}| \leqslant \sqrt{2\pi}\sum_{m<n\leqslant\nu}\frac{g(n)}{n!}\left|\Gamma\left(n\,-\,\frac{a}{2}\right)\right| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{2\pi}\,g(m+1)\max_{m<n\leqslant\nu}\left|\Gamma\left(n\,-\,\frac{a}{2}\right)\right|\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n!} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{2\pi}\left(e-\frac{5}{2}\right)g(m+1)\max_{2\leqslant n\leqslant\frac{a}{2}+2}\left|\Gamma\left(n\,-\,\frac{a}{2}\right)\right|.\end{aligned}$$

Согласно формуле дополнения,

$$\left|\Gamma\left(n\,-\,\frac{a}{2}\right)\right| \,=\, \frac{\pi}{\left|\sin\dfrac{\pi a}{2}\right|}\left|\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-n\right)\right|^{-1}.$$

Так как наибольшее значение дроби $\left|\Gamma\left(1+\dfrac{a}{2}-n\right)\right|^{-1}$ на промежутке $1\leqslant n\leqslant\dfrac{a}{2}+2$ не превосходит Γ_0^{-1}, где

$$\Gamma_0 \,=\, \min_{u>0}\Gamma(u) \,=\, 0.885\,603\ldots,$$

то окончательно находим:

$$|S_m^{(1)}| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma_0}\left(e-\frac{5}{2}\right)g(m+1)\,\pi\left|\sin\frac{\pi a}{2}\right|^{-1} \tag{1.45}$$

Сложив (1.44) и (1.45), получим:

$$|S_m| \,<\, \left\{\frac{b_1+b_2}{a} \,+\, \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma_0}\left(e-\frac{5}{2}\right)\pi\left|\sin\frac{\pi a}{2}\right|^{-1}\right\} g(m+1). \tag{1.46}$$

Очевидно, оценка (1.46) остаётся справедливой и в случае $m \geqslant 1+\dfrac{a}{2}$. Огрубляя (1.46), для всех $m \geqslant 2$ будем, следовательно, иметь:

$$|S_m| \,<\, \frac{\pi g(m+1)}{\left|\sin\dfrac{\pi a}{2}\right|}\left\{\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma_0}\left(e-\frac{5}{2}\right) \,+\, \frac{1}{2}\,(b_1+b_2)\,\frac{\left|\sin\dfrac{\pi a}{2}\right|}{\dfrac{\pi a}{2}}\right\} \leqslant \frac{\pi b g(m+1)}{\left|\sin\dfrac{\pi a}{2}\right|},$$

где

$$b \,=\, \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma_0}\left(e-\frac{5}{2}\right) \,+\, \frac{1}{2}\,(b_1+b_2) \,<\, 4.56.$$

Таким образом, сумма из условия леммы не превосходит по абсолютной величине числа

$$\frac{|S_m|}{\left|\Gamma\left(-\dfrac{a}{2}\right)\right|} \,<\, \frac{\pi b g(m+1)}{\left|\Gamma\left(-\dfrac{a}{2}\right)\sin\dfrac{\pi a}{2}\right|} \,=\, b g(m+1)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right),$$

что и требовалось.

Докажем теперь утверждение леммы для $m = 0, 1$. Если $m = 1$, то в силу доказанного выше имеем:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n>1}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,\frac{\Gamma\left(n\,-\,\dfrac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(-\dfrac{a}{2}\right)}\right| &\leqslant \frac{|\Phi_2|}{\mathfrak{S}_1^2}\,\frac{\left|\Gamma\left(2\,-\,\dfrac{a}{2}\right)\right|}{\left|\Gamma\left(-\dfrac{a}{2}\right)\right|} \,+\, b\,g(3)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right) \leqslant \\ &\leqslant \frac{\zeta_P(2)}{4\mathfrak{S}_1^2}\,\frac{a}{2}\left|1\,-\,\frac{a}{2}\right| \,+\, b\,g(3)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right) \,= \\ &= g(2)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\left\{\,b\,\frac{g(3)}{g(2)} \,+\, \frac{\zeta_P(2)}{4(\log\log 2+1)^2}\,\frac{\dfrac{a}{2}\left|1-\dfrac{a}{2}\right|}{\Gamma\left(1+\dfrac{a}{2}\right)}\,\right\}. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Замечая, что макисмум функции

$$\frac{\dfrac{a}{2}\left|1-\dfrac{a}{2}\right|}{\Gamma\left(1+\dfrac{a}{2}\right)} \,=\, \frac{\left|1-\dfrac{a}{2}\right|}{\Gamma\left(\dfrac{a}{2}\right)}$$

при $a \geqslant 0$ не превосходит $1.12918\ldots$, заключаем, что правая часть (1.47) ограничена величиной

$$g(2)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(\frac{15}{\mathfrak{S}_1} \,+\, 0.319\right) \,<\, 0.32 g(2)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right). \tag{1.48}$$

Так как $\Phi_1 = 0$, то оценка (1.48) справедлива и в случае $m = 0$. Лемма доказана.

Следствие. *Ряд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\Phi_n\,\frac{\Gamma\Big(n-\dfrac{a}{2}\Big)}{\Gamma\Big(-\dfrac{a}{2}\Big)}\,\mathfrak{S}_1^{\frac{a}{2}-n}$$

является асимптотическим. Иначе говоря, при любом фиксированном целом $m\geqslant 0$ *справедливо равенство*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\Phi_n\,\frac{\Gamma\Big(n-\dfrac{a}{2}\Big)}{\Gamma\Big(-\dfrac{a}{2}\Big)}\,\mathfrak{S}_1^{\frac{a}{2}-n}\;=\;\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\,\Phi_n\,\frac{\Gamma\Big(n-\dfrac{a}{2}\Big)}{\Gamma\Big(-\dfrac{a}{2}\Big)}\,\mathfrak{S}_1^{\frac{a}{2}-n}\;+\;O_{m,a}\Big(\mathfrak{S}_1^{\frac{a}{2}-(m+1)}\Big).$$

Пример 1.9. Выше было отмечено, что большинство результатов настоящей главы практически без изменения переносится на «непрерывный» случай, т.е. на случай, когда суммирование по дискретному множеству точек Грама заменяется интегрированием по непрерывному параметру t. В частности, для интегрального первого момента полинома $V(t)$ имеют место следующие соотношения:

$$I(T)\;=\;\int\limits_0^T\Big|\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}\Big|dt\;=\;I^*(T)\;+\;O\big(T\sqrt{(\log x)/\log T}\big),$$

$$I^*(T)\;=\;\frac{T}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\Phi_n\,\frac{\Gamma\big(n-\frac{1}{2}\big)}{\Gamma\big(-\frac{1}{2}\big)}\,\mathfrak{S}_1^{\frac{1}{2}-n}\;=$$

$$=\;\frac{T}{\sqrt{\pi}}\Big\{\mathfrak{S}_1^{\frac{1}{2}}\;+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n-1}}\,\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\,\Phi_{n+1}\,\mathfrak{S}_1^{-\frac{1}{2}-n}\Big\}\;=$$

$$=\;\frac{T}{\sqrt{\pi}}\Big\{\mathfrak{S}_1^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{4}\,\Phi_2\,\mathfrak{S}_1^{-\frac{3}{2}}+\tfrac{3}{8}\,\Phi_3\,\mathfrak{S}_1^{-\frac{5}{2}}-\tfrac{15}{16}\,\Phi_4\,\mathfrak{S}_1^{-\frac{7}{2}}+\tfrac{105}{32}\,\Phi_5\,\mathfrak{S}_1^{-\frac{9}{2}}-\tfrac{945}{64}\,\Phi_6\,\mathfrak{S}_1^{-\frac{11}{2}}+\ldots\Big\}.$$

Полагая $T=10^4, x=10^2$, с помощью программного пакета «Wolfram Mathematica 7.0.0» с точностью до 10^{-9} находим: $I=7645.924\,933\,515$. Подсчитывая вклад первых семи членов асимптотического ряда I^*, получим значение

$$\begin{array}{rl}
7575\,. & 318\,726\,470\\
65\,. & 615\,082\,789\\
9\,. & 413\,648\,855\\
-\,1\,. & 296\,960\,483\\
-\,1\,. & 376\,016\,060\\
-\,0\,. & 442\,231\,162\\
-\,0\,. & 004\,219\,519\\
\hline
7647\,. & 228\,030\,890,
\end{array}$$

что отличается от истинного не более чем на 1.456, т.е. менее чем на 0.02%. Также отметим, что дальнейшее увеличение числа слагаемых, принимаемых в расчёт, не приведёт к увеличению точности приближения к величине I. Слагаемые ряда достаточно быстро убывают, и его сумма не более чем на 10^{-6} отличается от величины $7647.368\,143\,7$.

Значение того же интеграла, отвечающего параметрам $T = 10^5$ и $x = 10^2$, равно 76 463.353 421 946 . . ., в то время как первые 9 членов ряда в сумме дают

75 753 .	187 264 698
656 .	150 827 892
94 .	136 485 470
-12 .	969 604 826
-13 .	760 160 599
-4 .	422 311 618
-0 .	042 195 191
0 .	822 280 202
0 .	167 703 383
-0 .	015 333 537
76 473 .	786 823 421.

Разность между этими значениями не превышает 10.434, т.е. менее 0.014%. ⊠

§5. Уточнение оценки остатка в формуле для первого момента

Тождество

$$|z| \;=\; \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin|z|u}{u}\right)^2 du \tag{1.49}$$

позволяет приблизить первую степень величины $|z|$ линейной комбинацией её чётных степеней $|z|^2, |z|^4, |z|^6, \ldots$. Именно это обстоятельство наряду с явными формулами теоремы 1.1 и позволяет в конечном итоге получить асимптотику первого момента величин $V(t_n)$, т.е. суммы

$$\sum_n \bigl|V(t_n)\bigr|. \tag{1.50}$$

Между тем, формула (1.49) обладает следующим недостатком. Так, погрешность, возникающая при замене в (1.49) луча интегрирования конечным промежутком $0 \leqslant u \leqslant \lambda$, совпадает с

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_\lambda^{+\infty}\left(\frac{\sin|z|u}{u}\right)^2 du. \tag{1.51}$$

Ввиду того, что в роли z выступает величина $V(t_n)/\sqrt{\mathfrak{S}_1}$, функция $\sin^2|z|u$ может, вообще говоря, для сколь угодно больших u принимать значения, равные единице. Поэтому мы не имеем возможности дать оценку интеграла (1.51) лучшую тривиальной:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_\lambda^{+\infty}\left(\frac{\sin|z|u}{u}\right)^2 du \leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_\lambda^{+\infty}\frac{du}{u^2} \;=\; \frac{2}{\pi\lambda}.$$

Это обстоятельство объясняет тот факт, что остаточный член в формуле для первого момента $V(t_n)$ имеет порядок

$$\lambda^{-1} \asymp \sqrt{\frac{\log x}{\log N}}. \tag{1.52}$$

Между тем, в статье Р.Н. Бояринова [37] были приведены новые формулы, сводящие, как и (1.49), вычисление первого (и вообще любого положительного) момента заданной величины к вычислению её чётных моментов, а также предложен метод, позволяющий преодолеть перечисленные выше трудности.

Соединение метода Бояринова с техникой §§1-4 настоящей работы позволяет существенно уточнить остаточный член в асимптотической формуле дробного момента теоремы 1.2. В частности, в случае первого момента мы оцениваем остаток величиной порядка

$$\frac{\log x}{\log N}\,\log\!\left(\frac{\log N}{\log x}\right),$$

что превосходит по точности оценку (1.52) при $\dfrac{\log x}{\log N} \to 0$.

Сразу отметим, что применение уточнённой таким образом асимптотической формулы для суммы (1.50) к вопросам, связанным с законом Грама и, в частности, с задачей вычисления дробных моментов величин $\Delta(n)$ и Δ_n, не приводит к принципиальному уточнению тех результатов, которые получаются с использованием менее точных формул теоремы 1.2.

Тем не менее, асимптотические разложения дробных моментов тригонометрических полиномов могут представлять и самостоятельный интерес. По этой причине мы сочли возможным уделить этому вопросу дополнительный параграф.

Ввиду того, что метод Бояринова требует большего числа выкладок, здесь мы ограничиваемся частным случаем и рассматриваем лишь первый момент. В общем случае все вычисления проводятся аналогично, без внесения принципиальных изменений.

Подобно теоремам 1.1 и 1.2, все результаты предыдущих параграфов практически без изменений переносятся на «непрерывный» случай моментов

$$\int_T^{T+H} \bigl|V(t)\bigr|\,dt, \quad H = T^{\alpha+\varepsilon}.$$

Как и выше, доказательство основного результата (теоремы 1.3) мы предварим леммой технического характера.

Лемма 1.23. *Пусть $n \geqslant 0$ - целое число, $\Lambda, V > 0$, $0 < \beta \leqslant 1$. Тогда для интеграла*

$$j_n(\Lambda) \;=\; \int\limits_0^V e^{-(\Lambda t)^2} t^{2n} dt \tag{1.53}$$

справедливы неравенства:

$$j_0(\Lambda) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\Lambda}, \quad j_n(\Lambda) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\Lambda}\,\frac{1}{\Lambda^{2n}}\,\frac{n!}{\sqrt{n}}\,\min\left(\frac{1}{2}, \left(\frac{\Lambda V}{\sqrt{n}}\right)^{2\beta}\right) \quad (n \geqslant 1).$$

Доказательство. Прежде всего, при любом $n \geqslant 0$ имеем:

$$j_n(\Lambda) \leqslant \int\limits_0^{+\infty} e^{-(\Lambda t)^2} t^{2n} dt \,=\, \frac{\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big)}{2\Lambda^{2n+1}}.$$

Далее, если $n \geqslant 1$, то множитель t^{2n} в (1.53) не превосходит на всём промежутке интегрирования величины $V^{2\beta} t^{2(n-\beta)}$. Поэтому

$$j_n(\Lambda) \leqslant V^{2\beta} \int\limits_0^{+\infty} e^{-(\Lambda t)^2} t^{2(n-\beta)} dt \,=\, \frac{(\Lambda V)^{2\beta}}{2\Lambda^{2n+1}}\,\Gamma\biggl(n+\frac{1}{2}-\beta\biggr).$$

Утверждение леммы теперь получим, воспользовавшись оценками

$$\frac{n^{\frac{1}{2}+\beta}}{n!}\,\Gamma\biggl(n+\frac{1}{2}-\beta\biggr) \leqslant \sqrt{\pi}, \quad \frac{\sqrt{n}}{n!}\,\Gamma\biggl(n+\frac{1}{2}\biggr) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

которые справедливы при любых $n \geqslant 1$ и $0 < \beta \leqslant 1$. Лемма доказана.

Теорема 1.3. *Пусть $x_0 < x \leqslant N^\delta$, где $0 < \delta < 0.01$ - достаточно маленькая абсолютная постоянная. Тогда имеет место равенство*

$$\sum_n \bigl|V(t_n)\bigr| \,=\, \frac{M}{\sqrt{\pi}}\,\sqrt{\mathfrak{S}_1}\,\biggl\{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,\frac{\Gamma\big(n-\frac{1}{2}\big)}{\Gamma\big(-\frac{1}{2}\big)} \,+\, \theta R\biggr\}, \tag{1.54}$$

где

$$R \,=\, c(\log r)\biggl(\frac{1}{r} \,+\, \frac{x^{-0.1}}{20\,\sqrt[4]{r}}\biggr), \quad r \,=\, \frac{\log N}{\log x}, \quad c = 5.5\cdot 10^3.$$

В частности, при $(\log N)^{7.5} \leqslant x \leqslant N^\delta$ величина R удовлетворяет неравенству

$$R \leqslant c_1\,\frac{\log r}{r}, \quad c_1 \,=\, 5765.$$

Ряд по отрицательным степеням $\mathfrak{S}_1$, стоящий в правой части (1.54), *является асимптотическим.*

Доказательство. Вывод формулы (1.54) проводится в три этапа.

Этап 1: выделение главного члена асимптотики. Как и выше, положим $v_n = V(t_n)/\sqrt{\mathfrak{S}_1}$ и определим числа K, λ и V равенствами:

$$K \,=\, \biggl[\frac{r}{22}\biggr], \quad \lambda \,=\, \frac{1}{10e}\sqrt{\frac{r}{\log r}}, \quad V \,=\, \sqrt{8\log r},$$

в которых $r = \dfrac{\log N}{\log x}$. Далее, в тождестве

$$|z| \,=\, \kappa^{-1}\int\limits_0^{+\infty} e^{-(zu)^2}\bigl(1 \,-\, e^{-(zu)^2}\bigr)\,\frac{du}{u^2}, \quad \kappa \,=\, \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}\bigl(1 \,-\, e^{-u^2}\bigr)\,\frac{du}{u^2} \,=\, \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}+1}$$

из работы [37] положим $z = v_n$. Так получим:

$$S \,=\, \sum_n |v_n| \,=\, \kappa^{-1} \sum_n \Big(\int\limits_0^{\lambda} + \int\limits_{\lambda}^{+\infty} \Big) \big(e^{-\,(uv_n)^2} \,-\, e^{-\,2(uv_n)^2} \big)\, \frac{du}{u^2} \,=\, S_1 + R_1.$$

Вновь следуя работе Бояринова [37] и применяя тождество

$$e^{-\,v^2} \,=\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\,\frac{t^2}{4}} \cos{(vt)} dt, \tag{1.55}$$

будем иметь:

$$S_1 \,=\, \kappa^{-1} \sum_n \int\limits_0^{\lambda} \frac{1}{u^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\,\frac{t^2}{4}} \cos{(utv_n)} dt \,-\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\,\frac{t^2}{4}} \cos{(utv_n\sqrt{2})} dt \right\} du \,=$$

$$= \,\frac{\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \sum_n \int\limits_0^{\lambda} \frac{1}{u^2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\,\frac{t^2}{4}} \big\{ \cos{(utv_n)} \,-\, \cos{(utv_n\sqrt{2})} \big\}\, dtdu \,=$$

$$= \,\frac{\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \sum_n \int\limits_0^{\lambda} \frac{1}{u^2} \Big(\int\limits_0^{V} + \int\limits_V^{+\infty} \Big) e^{-\,\frac{t^2}{4}} \big\{ \cos{(utv_n)} \,-\, \cos{(utv_n\sqrt{2})} \big\}\, dtdu \,=\, S_2 + R_2.$$

Далее, разлагая косинусы в ряды Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, найдём:

$$S_2 \,=\, \frac{\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \sum_n \int\limits_0^{\lambda} \frac{1}{u^2} \int\limits_0^{V} e^{-\,\frac{t^2}{4}} \left\{ \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(uv_nt\right)^{2k} \,+\, \theta_1 \frac{(uv_nt)^{2(K+1)}}{(2K+2)!} \,-\right.$$

$$\left. -\, \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(uv_nt\sqrt{2}\right)^{2k} \,+\, \theta_1 \frac{(uv_nt\sqrt{2})^{2(K+1)}}{(2K+2)!} \right\} dtdu \,=$$

$$= \,\frac{\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\lambda} \frac{1}{u^2} \int\limits_0^{V} e^{-\,\frac{t^2}{4}} \left\{ \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} \left(2^k - 1\right) (ut)^k \sum_n v_n^{2k} + \right.$$

$$\left. +\, \theta_3 \frac{(2^{K+1}+1)}{(2K+2)!} (ut)^{2K+2} \sum_n v_n^{2(K+1)} \right\} dtdu.$$

Заменяя суммы по n по формулам лемм 1.4 и 1.5, получим:

$$S_2 = \frac{\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\lambda} \frac{1}{u^2} \int\limits_0^{V} e^{-\,\frac{t^2}{4}} \left\{ \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} (2^k - 1) \frac{(ut)^{\,2k}}{\mathfrak{S}_1^k} \left(M \,\frac{(2k)!}{k!}\, \frac{H^{(k)}(0)}{2^{2k}} + \theta\, x^{2k}\, \log N \right) + \right.$$

$$\left. +\, \theta_4 \frac{(2^{K+1}+1)}{(2K+2)!} \frac{(ut)^{2K+2}}{\mathfrak{S}_1^{K+1}} \left(M \,\frac{(2K+2)!}{(K+1)!}\, \frac{H^{(K+1)}(0)}{2^{2(K+1)}} \,+ x^{2(K+1)}\, \log N \right) \right\} dtdu.$$

Обозначим через R_3 вклад в S_2 от слагаемых, содержащих множитель x^{2k}. Преобразуя S_2 далее, будем иметь:

$$S_2 = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\lambda \frac{1}{u^2} \int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}} \Bigg\{ \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} \frac{(2^k-1)}{2^{2k}} (ut)^{2k} \frac{(2k)!}{k!} \frac{H^{(k)}(0)}{\mathfrak{S}_1^k} + \\ + \theta_5 \frac{(ut)^{2K+2}}{(2K+2)!} \frac{(2^{K+1}+1)}{2^{2(K+1)}} \frac{(2K+2)!}{(K+1)!} \frac{H^{(K+1)}(0)}{\mathfrak{S}_1^{K+1}} \Bigg\} dtdu + R_3 = S_3 + R_3.$$

Далее, сумму по k в выражении для S_3 заменим бесконечной:

$$S_3 = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\lambda \frac{1}{u^2} \int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \frac{(2^k-1)}{2^{2k}} \left(\frac{ut}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}} \right)^{2k} H^{(k)}(0) + \\ + \frac{\theta_6}{(K+1)!} \frac{(2^{K+1}+1)}{2^{2(K+1)}} \left(\frac{ut}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}} \right)^{2(K+1)} H^{(K+1)}(0) - \\ - \sum_{k>K} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \frac{(2^k-1)}{2^{2k}} \left(\frac{ut}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}} \right)^{2k} H^{(k)}(0) \Bigg\} dtdu = S_4 + R_4,$$

где S_4 обозначает вклад в S_3 от суммы по всем $k \geqslant 0$. Замечая, что эта сумма по k является разностью двух рядов Тейлора, находим:

$$S_4 = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\lambda \frac{1}{u^2} \int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{(ut)^2}{\mathfrak{S}_1} \right)^k H^{(k)}(0) - \\ - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{(ut)^2}{2\mathfrak{S}_1} \right)^k H^{(k)}(0) \Bigg\} dtdu = \\ = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\lambda \frac{1}{u^2} \int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}} \left\{ H\left(-\frac{(ut)^2}{4\mathfrak{S}_1} \right) - H\left(-\frac{(ut)^2}{2\mathfrak{S}_1} \right) \right\} dtdu.$$

Заменив интеграл по u несобственным, получим:

$$S_4 = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}} \left(\int\limits_0^{+\infty} - \int\limits_\lambda^{+\infty} \right) \frac{1}{u^2} \left\{ H\left(-\frac{(ut)^2}{4\mathfrak{S}_1} \right) - H\left(-\frac{(ut)^2}{2\mathfrak{S}_1} \right) \right\} dtdu = \\ = S_5 - R_5.$$

Наконец, положим $u = \dfrac{2v}{t}$ в интеграле по u; будем иметь:

$$S_5 = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}} \cdot \frac{t}{2} \int\limits_0^{+\infty} \left\{ H\left(-\frac{v^2}{\mathfrak{S}_1} \right) - H\left(-\frac{2v^2}{\mathfrak{S}_1} \right) \right\} \frac{du}{u^2} dt = \\ = \frac{Mj\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^V \frac{t}{2} e^{-\frac{t^2}{4}} dt = \frac{Mj\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \left(1 - e^{-\frac{V^2}{4}} \right),$$

где

$$j \,=\, \int\limits_0^{+\infty}\!\left\{H\Big(-\frac{v^2}{\mathfrak{S}_1}\Big) \,-\, H\Big(-\frac{2v^2}{\mathfrak{S}_1}\Big)\right\}\frac{dv}{v^2}.$$

Этап 2: вычисление интеграла j. Представим этот интеграл в виде разности

$$\int\limits_0^{+\infty}\!\left\{1 \,-\, H\Big(-\frac{2v^2}{\mathfrak{S}_1}\Big)\right\}\frac{dv}{v^2} \,-\, \int\limits_0^{+\infty}\!\left\{1 \,-\, H\Big(-\frac{v^2}{\mathfrak{S}_1}\Big)\right\}\frac{dv}{v^2} \,=\, j_1 \,-\, j_2.$$

Замечая, что

$$j_1 \,=\, \sqrt{2}\int\limits_0^{+\infty}\!\left\{1 \,-\, H\Big(-\frac{v^2}{\mathfrak{S}_1}\Big)\right\}\frac{dv}{v^2} \,=\, \sqrt{2}j_2,$$

находим: $j = (\sqrt{2}-1)j_2$. Интегрируя j_2 почленно (законность этого приёма обоснована в леммах 1.19 и 1.20) и замечая, что $\Phi_1 = 0$, приходим к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} j_2 \,&=\, \int\limits_0^{+\infty}\!\left(1 \,-\, e^{-\,v^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,v^{2n}\right)\frac{dv}{v^2} \,= \\ &=\, \int\limits_0^{+\infty}\big(1-e^{-\,v^2}\big)\frac{dv}{v^2} \,-\, \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\,v^2}v^{2n}dv \,= \\ &=\, \sqrt{\pi} \,-\, \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\Big(n-\frac{1}{2}\Big) \,=\, \sqrt{\pi}\left(1 \,-\, \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,\frac{\Gamma\big(n-\frac{1}{2}\big)}{2\sqrt{\pi}}\right). \end{aligned}$$

Поскольку $\Gamma\big(-\frac{1}{2}\big) = -2\sqrt{\pi}$, окончательно находим:

$$\begin{aligned} j_2 \,&=\, \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,\frac{\Gamma\big(n-\frac{1}{2}\big)}{\Gamma\big(-\frac{1}{2}\big)}, \\ j \,&=\, (\sqrt{2}-1)\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,\frac{\Gamma\big(n-\frac{1}{2}\big)}{\Gamma\big(-\frac{1}{2}\big)} \,=\, \kappa\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,\frac{\Gamma\big(n-\frac{1}{2}\big)}{\Gamma\big(-\frac{1}{2}\big)} \end{aligned}$$

Все эти ряды, как было установлено в лемме 1.22, являются асимптотическими.

Этап 3: оценка величин R_k, $1 \leqslant k \leqslant 5$. Докажем сперва одно вспомогательное неравенство для интеграла

$$j(u) \,=\, \int\limits_0^{V} e^{-\,\frac{t^2}{4}}\,H\Big(-\frac{(ut)^2}{4\mathfrak{S}_1}\Big)\,dt, \quad u \geqslant \lambda.$$

Интегрируя почленно ряд, который получается при замене H выражением

$$e^{-\,\frac{u^2t^2}{4}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Phi_n\Big(\frac{u^2t^2}{4\mathfrak{S}_1}\Big)^n,$$

находим:

$$j(u) \,=\, \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Phi_n\left(\frac{u^2}{4\mathfrak{S}_1}\right)^n j_n(\Lambda),$$

где

$$j_n(\Lambda) \,=\, \int\limits_0^V e^{-(\Lambda t)^2}t^{2n}dt, \quad \Lambda \,=\, \frac{1}{2}\sqrt{u^2+1}.$$

Получившуюся сумму разобьём на три части, отвечающие, соответственно, значениям $n=0$, $2\leqslant n\leqslant x^{2/5}$ и $n>x^{2/5}$. Применив оценки лемм 1.12 (для $2\leqslant n\leqslant x^{2/5}$) и 1.11 (для $n>x^{2/5}$), будем иметь:

$$|j(u)| \leqslant j_0(\Lambda) \,+\, \sqrt{2\pi}\sum_{2\leqslant n\leqslant x^{2/5}} g(n)\left(\frac{u}{2}\right)^{2n}\frac{|j_n(\Lambda)|}{n!} \,+\, \sum_{n>x^{2/5}}\left(\frac{u}{2}\right)^{2n}\frac{|j_n(\Lambda)|}{n!},$$

где, как и выше,

$$g(n) \,=\, \left(\frac{\log\log n+1}{\mathfrak{S}_1}\right)^n.$$

Для оценки интегралов $j_n(\Lambda)$ воспользуемся леммой 1.23 с $\beta=\dfrac{3}{4}$; получим:

$$|j(u)| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\Lambda} \,+\, \sqrt{2\pi}\sum_{2\leqslant n\leqslant x^{2/5}} g(n)\left(\frac{u}{2\Lambda}\right)^{2n}\frac{\sqrt{\pi}}{2\Lambda}\,\frac{1}{2\sqrt{n}} \,+\, \sum_{n>x^{2/5}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Lambda^{1/2}V^{3/2}}{n^{5/4}}\left(\frac{u}{2\Lambda}\right)^{2n}.$$

Принимая во внимание неравенство $2\Lambda>u$, находим:

$$|j(u)| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\Lambda}\left\{1 \,+\, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{2\leqslant n\leqslant x^{2/5}}\frac{g(n)}{\sqrt{n}}\right\} \,+\, \frac{5\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Lambda^{1/2}V^{3/2}}{x^{1/10}}.$$

Сумму по n в последнем выражении разобьём на три части, отвечающие, соответственно, промежуткам $2\leqslant n\leqslant\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_1<n\leqslant e^{\mathfrak{S}_1}$ и $e^{\mathfrak{S}_1}<n\leqslant x^{2/5}$. По лемме 1.21 функция $g(n)$ монотонно убывает на каждом из этих промежутков, так что

$$\begin{aligned}
\sum_{2\leqslant n\leqslant x^{2/5}}\frac{g(n)}{\sqrt{n}} &\leqslant g(2)\sum_{2\leqslant n\leqslant\mathfrak{S}_1}\frac{1}{\sqrt{n}} \,+\, g(\mathfrak{S}_1)\sum_{\mathfrak{S}_1\leqslant n\leqslant e^{\mathfrak{S}_1}}\frac{1}{\sqrt{n}} \,+\, g\big(e^{\mathfrak{S}_1}\big)\sum_{e^{\mathfrak{S}_1}\leqslant n\leqslant x^{2/5}}\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant\\
&\leqslant \left(\frac{\log\log 2+1}{\mathfrak{S}_1}\right)^2\cdot 2\sqrt{\mathfrak{S}_1} \,+\, \left(\frac{\log\log\mathfrak{S}_1+1}{\mathfrak{S}_1}\right)^{\mathfrak{S}_1}\cdot 2e^{\mathfrak{S}_1/2} \,+\, \left(\frac{\log\mathfrak{S}_1+1}{\mathfrak{S}_1}\right)^{e^{\mathfrak{S}_1}}\cdot x^{1/5} <\\
&< \frac{0.9}{\mathfrak{S}_1\sqrt{\mathfrak{S}_1}} \,+\, \frac{2}{\mathfrak{S}_1^2} \,+\, 2\left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\right)^{\mathfrak{S}_1} \,+\, 2\left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\right)^{e^{\mathfrak{S}_1}} x^{1/5} <\\
&< \frac{0.9}{\mathfrak{S}_1\sqrt{\mathfrak{S}_1}} \,+\, \frac{2}{\mathfrak{S}_1^2} \,+\, 2\exp\left\{\tfrac{1}{5}\log x \,-\, \tfrac{1}{2}(\log x)\log\log x\right\} \,<\, \frac{1}{\mathfrak{S}_1\sqrt{\mathfrak{S}_1}}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$|j(u)| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\Lambda}\left(1 \,+\, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\mathfrak{S}_1\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\right) \,+\, \frac{5\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Lambda^{1/2}\,V^{3/2}}{x^{1/10}}. \tag{1.56}$$

Оценка R_1. Прежде всего, имеем:

$$0 \leqslant R_1 \;=\; \kappa^{-1} \sum_n \int\limits_\lambda^{+\infty} e^{-\,(uv_n)^2} \bigl(1 \,-\, e^{-\,(uv_n)^2}\bigr)\, \frac{du}{u^2} \leqslant$$

$$\leqslant \kappa^{-1} \sum_n \int\limits_\lambda^{+\infty} e^{-\,(uv_n)^2}\, \frac{du}{u^2} \leqslant \kappa^{-1} \sum_n e^{-\,(\lambda v_n)^2} \int\limits_\lambda^{+\infty} \frac{du}{u^2} \;=\; \frac{\kappa^{-1}}{\lambda} \sum_n e^{-\,(\lambda v_n)^2}.$$

Преобразуем последнюю сумму, вновь применяя тождество (1.55). Так получим:

$$0 \leqslant R_1 \leqslant \frac{\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} \sum_n \int\limits_0^{+\infty} e^{-\,\frac{t^2}{4}} \cos{(\lambda v_n t)}\, dt \;=$$

$$= \frac{\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} \sum_n \biggl(\int\limits_0^V + \int\limits_V^{+\infty} \biggr) e^{-\,\frac{t^2}{4}} \cos{(\lambda v_n t)}\, dt \;=\; R_1^{(2)} \,+\, R_1^{(1)}.$$

Последнее слагаемое оценим тривиально:

$$\bigl|R_1^{(1)}\bigr| \leqslant \frac{\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} \sum_n \int\limits_V^{+\infty} e^{-\,\frac{t^2}{4}} dt \;=\; \frac{M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} \int\limits_{V^2/4}^{+\infty} \frac{e^{-\,v}}{\sqrt{v}}\, dv \leqslant \frac{2M\kappa^{-1}}{\lambda V\sqrt{\pi}}\, \exp\Bigl(-\,\frac{V^2}{4}\Bigr).$$

Пользуясь обозначением $r = \dfrac{\log N}{\log x}$, окончательно находим:

$$\bigl|R_1^{(1)}\bigr| \leqslant 20e\, \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\, \frac{\sqrt{\log r}}{r^2\sqrt{r}}.$$

Для оценки $R_1^{(2)}$ косинус в подынтегральном выражении заменим конечным рядом Тейлора:

$$R_1^{(2)} \;=\; \frac{\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} \sum_n \int\limits_0^V e^{-\,\frac{t^2}{4}} \biggl\{ \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, (\lambda t)^{2k} v_n^{2k} \,+\, \theta_1\, \frac{(\lambda t)^{2K+2}}{(2K+2)!}\, v_n^{2K+2} \biggr\}\, dt \;=$$

$$= \frac{\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} \int\limits_0^V e^{-\,\frac{t^2}{4}} \biggl\{ \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, (\lambda t)^{2k} \sum_n v_n^{2k} \,+\, \theta_2\, \frac{(\lambda t)^{2K+2}}{(2K+2)!} \sum_n v_n^{2K+2} \biggr\}\, dt.$$

Воспользовавшись формулами лемм 1.4 и 1.5, преобразуем последнее выражение к следующему виду:

$$R_1^{(2)} \;=\; \frac{\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} \int\limits_0^V e^{-\,\frac{t^2}{4}} \biggl\{ \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, (\lambda t)^{2k} \biggl(\frac{(2k)!}{k!}\, \frac{M}{2^{2k}}\, \frac{H^{(k)}(0)}{\mathfrak{S}_1^k} \,+\, \theta_3\, \frac{x^{2k}}{\mathfrak{S}_1^k}\, \log N \biggr) +$$

$$+\ \theta_4\,\frac{(\lambda t)^{2K+2}}{(2K+2)!}\Big(\ \frac{(2K+2)!}{(K+1)!}\,\frac{M}{2^{2K+2}}\,\frac{H^{(K+1)}(0)}{\mathfrak{S}_1^{K+1}}\ +\ \frac{x^{2K+2}}{\mathfrak{S}_1^{K+1}}\,\log N\ \Big)\ \Big\}\,dt\ =$$

$$=\ \frac{M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}}\Big\{\sum_{k=0}^{K}\frac{(-1)^k}{k!}\Big(\frac{\lambda t}{2}\Big)^{2k}\frac{H^{(k)}(0)}{\mathfrak{S}_1^k}\ +\ \frac{\theta_5}{(K+1)!}\Big(\frac{\lambda t}{2}\Big)^{2K+2}\frac{H^{(K+1)}(0)}{\mathfrak{S}_1^{K+1}}\ \Big\}\,dt\ +$$

$$+\ \frac{\theta_6\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}}\Big\{\ \sum_{k=0}^{K+1}\frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!}\,\frac{x^{2k}}{\mathfrak{S}_1^k}\,\log N\ \Big\}.$$

Заменяя в первом интеграле сумму по k бесконечной, обозначим получившееся при этом слагаемое через $R_1^{(3)}$; ошибку, возникающую в ходе такой замены, обозначим через $R_1^{(4)}$; наконец, вклад от слагаемых, содержащих множитель x^{2k}, обозначим через $R_1^{(5)}$. Так получим: $R_1^{(2)} = R_1^{(3)} + R_1^{(4)} + R_1^{(5)}$.

Оценим сперва величину $R_1^{(5)}$. Имеем:

$$\big|R_1^{(5)}\big| \leqslant \frac{x^{2(K+1)}\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\,(\log N)\int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}\Big(\frac{\lambda t}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\Big)^{2k}dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x^{2(K+1)}\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\,(\log N)\int\limits_0^V \exp\Big\{-\frac{t^2}{4}\ +\ \frac{\lambda t}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\Big\}dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x^{2(K+1)}\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\,(\log N)\exp\Big\{\frac{\lambda t}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\Big\}\int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt \leqslant \frac{x^{2(K+1)}\kappa^{-1}}{\lambda}\,(\log N)\exp\Big\{\frac{\lambda t}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\Big\}.$$

Пользуясь определением величин K, λ и V, находим:

$$\big|R_1^{(5)}\big| \leqslant 10e\kappa^{-1}\sqrt{\frac{\log r}{r}}\,\exp\Big\{\,3\Big(\frac{1}{22}\,\frac{\log N}{\log x}+1\Big)\log x\ +\ \log\log N\ +\ \frac{1}{5e}\sqrt{\frac{2\log N}{\mathfrak{S}_1\log x}}\ \Big\}.$$

Поскольку

$$\frac{3}{22}\ =\ \Big(\frac{27}{82}\ +\ \varepsilon\Big)\ -\ \frac{147}{451}\ -\ \varepsilon\ <\ \Big(\frac{27}{82}\ +\ \varepsilon\Big)\ -\ \frac{5}{13}\ -\ \varepsilon,$$

то

$$\big|R_1^{(5)}\big| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{\log r}{r}}\exp\Big\{\Big(\frac{27}{82}+\varepsilon\Big)\log N-\Big(\frac{5}{13}+\varepsilon\Big)\log N+3\log x+\log\log N+\sqrt{\log N}\ \Big\}\ <$$

$$<\ M\sqrt{\frac{\log r}{r}}\ \exp\big\{-\tfrac{5}{13}\log N\ +\ 3\log x\big\}.$$

Замечая, наконец, что $x \leqslant N^{\frac{1}{60}}$, окончательно получим:

$$\big|R_1^{(5)}\big| \leqslant M\sqrt{\frac{\log r}{r}}\ \exp\big\{-\tfrac{1}{3}\log N\big\}\ =\ M\sqrt{\frac{\log r}{r}}\,N^{-\frac{1}{3}}.$$

Переходя к оценке $R_1^{(4)}$, заметим следующее: при $0 \leqslant t \leqslant V$ и $k > K$ второе соотношение леммы 1.17 даёт:

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{(\lambda t)^2}{4\mathfrak{S}_1}\right)^k H^{(k)}(0) \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{2k} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda V}{2}\right)^{2k} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi K}}\left(\frac{e}{k}\,\frac{(\lambda V)^2}{4}\right)^k \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi K}}\left(\frac{e(\lambda V)^2}{4K}\right)^k.$$

Но несложно видеть, что

$$\frac{e(\lambda V)^2}{4K} \;=\; \frac{r}{50eK} \leqslant \frac{r}{50e}\,\frac{25}{r} \;=\; \frac{1}{2e}.$$

Следовательно,

$$\left|R_1^{(4)}\right| \leqslant \frac{2M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} \int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}} \sum_{k>K} \frac{H^{(k)}(0)}{k!}\left(\frac{(\lambda t)^2}{4\mathfrak{S}_1}\right)^k dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi K}}\left(\sum_{k>K}(2e)^{-k}\right)\int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt \;<$$
$$< \frac{2M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-(K+1)}}{\sqrt{2K}} \;<\; \frac{2M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\,20e\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{\log r}}{r}\,e^{-\frac{r}{22}} \;<\; \frac{M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\,\frac{190\sqrt{\log r}}{r}\,e^{-\frac{r}{22}}.$$

Оценим, наконец, величину $R_1^{(3)}$,

$$R_1^{(3)} \;=\; \frac{M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} \int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{H^{(k)}(0)}{k!}\left(-\frac{(\lambda t)^2}{4\mathfrak{S}_1}\right)^k\right\}dt \;=\; \frac{M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} \int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}} H\left(-\frac{(\lambda t)^2}{4\mathfrak{S}_1}\right)dt.$$

Полагая $u = \lambda$ в неравенстве (1.56) и замечая, что

$$2\Lambda = \sqrt{\lambda^2+1} > \lambda, \quad \sqrt{\Lambda} \;=\; \frac{\sqrt[4]{\lambda^2+1}}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt[4]{2}},$$

найдём:

$$\left|R_1^{(3)}\right| \leqslant \frac{M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\lambda}\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{S}_1^{-3/2}\right) + \frac{5\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\,\frac{\lambda^{1/2}V^{3/2}}{x^{0.1}}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M\kappa^{-1}}{\lambda^2}\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{S}_1^{-3/2}\right) + \frac{5M\kappa^{-1}}{2\sqrt[4]{2}}\,\frac{V^{3/2}}{\lambda^{1/2}x^{0.1}} \leqslant$$
$$\leqslant (10e)^2\,M\kappa^{-1}\,\frac{\log r}{r}\left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{S}_1^{-3/2}\right) + 5\sqrt{10e}\,\frac{M\kappa^{-1}}{x^{0.1}}\,\frac{\log r}{\sqrt[4]{r}}.$$

Теперь искомая оценка величины $R_1^{(2)}$ принимает вид:

$$\left|R_1^{(2)}\right| \leqslant M\kappa^{-1}\,\frac{\log r}{r}\left\{(10e)^2\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{S}_1^{-3/2}\right) + \frac{190}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{q}{22}}}{\sqrt{\log q}} + \kappa N^{-\frac{1}{3}}\right\} +$$
$$+\; M\kappa^{-1}\,\frac{5\sqrt{10e}}{x^{0.1}}\,\frac{\log q}{\sqrt[4]{q}} \;<\; M\kappa^{-1}\left(739.9\,\frac{\log r}{r} + \frac{26.1}{x^{0.1}}\,\frac{\log r}{\sqrt[4]{r}}\right).$$

Таким образом,

$$\left|R_1\right| \leqslant \left|R_1^{(1)}\right| + \left|R_1^{(2)}\right| \leqslant M\kappa^{-1}\left(\frac{20e}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{\log r}}{r^2\sqrt{r}} + 739.9\,\frac{\log r}{r} + \frac{26.1}{x^{0.1}}\,\frac{\log r}{\sqrt[4]{r}}\right) < \\ < M\kappa^{-1}\left(740\,\frac{\log r}{r} + \frac{26.1}{x^{0.1}}\,\frac{\log r}{\sqrt[4]{r}}\right).$$

Оценка R_2. Полагая при фиксированном t

$$f_n(u) = \cos(utv_n) - \cos(utv_n\sqrt{2}),$$

представим R_2 в виде

$$\frac{\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_V^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4}}\left\{\sum_n \int\limits_0^{\lambda} \frac{f_n(u)}{u^2}\,du\right\}dt. \tag{1.57}$$

Зададимся произвольным числом $t \geqslant V$ и разобьём сумму по n в (1.57) на две, относя к первой те слагаемые, для которых выполнено неравенство $|v_n| > (\lambda t)^{-1}$, а ко второй - все остальные. Обозначим вклады от этих сумм в R_2 через $R_2^{(1)}$ и $R_2^{(2)}$ соответственно.

Рассмотрим теперь произвольное число n, для которого справедливо неравенство $|v_n| > (\lambda t)^{-1}$. В этом случае $\lambda > (t|v_n|)^{-1}$, так что промежуток интегрирования по u можно разбить на два:

$$\int\limits_0^{\lambda} \frac{f_n(u)}{u^2}\,du = \left\{\int\limits_0^{(t|v_n|)^{-1}} + \int\limits_{(t|v_n|)^{-1}}^{\lambda}\right\}\frac{f_n(u)}{u^2}\,du. \tag{1.58}$$

Так как, очевидно, $|f_n(u)| \leqslant 2$ при всех u, то второй интеграл в (1.58) не превосходит по абсолютной величине

$$2\int\limits_{(t|v_n|)^{-1}}^{+\infty} \frac{du}{u^2} = 2t|v_n|.$$

С другой стороны, пользуясь неравенством $|\sin w| \leqslant |w|$, находим:

$$|f_n(u)| \leqslant 2\left|\sin\left(uv_nt\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\sin\left(uv_nt\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\,(uv_nt)^2.$$

Следовательно, модуль первого интеграла в правой части (1.58) не превосходит

$$\int\limits_0^{(t|v_n|)^{-1}} \frac{1}{2}\,(uv_nt)^2du = \frac{1}{2}\,t|v_n|.$$

Таким образом,

$$\left|\int\limits_0^{\lambda} \frac{f_n(u)}{u^2}\,du\right| \leqslant \frac{5}{2}\,t|v_n|,$$

$$\left|R_2^{(1)}\right| \leqslant \frac{\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_V^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4}}\,\frac{5t}{2}\left(\sum_n |v_n|\right)dt = \frac{5\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\,\exp\left\{-\frac{V^2}{4}\right\}\left(\sum_n |v_n|\right).$$

Применив к последней сумме неравенство Коши наряду с формулой теоремы 1.1, находим:

$$\sum_n |v_n| \leqslant \left(M \sum_n v_n^2\right)^{\frac{1}{2}} < \left(M\left\{\frac{M}{2\mathfrak{S}_1} + \frac{x^2}{\mathfrak{S}_1}\log N\right\}\right)^{\frac{1}{2}} < M,$$
$$\left|R_2^{(1)}\right| \leqslant \frac{5M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{V^2}{4}\right\} = \frac{5M\kappa^{-1}}{r^2\sqrt{\pi}}.$$

Рассмотрим теперь те n, для которых $0 < |v_n| \leqslant (\lambda t)^{-1}$. Для них $\lambda \leqslant (t|v_n|)^{-1}$, так что

$$\left|\int_0^\lambda \frac{f_n(u)}{u^2}\,du\right| \leqslant \int_0^\lambda \frac{1}{2}(uv_nt)^2\,\frac{du}{u^2} = \frac{\lambda}{2}(v_nt)^2 \leqslant \frac{1}{2\lambda}.$$

Таким образом,

$$\left|R_2^{(2)}\right| \leqslant \frac{\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_V^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4}} \sum_n (2\lambda)^{-1}\,dt \leqslant \frac{M\kappa^{-1}}{2\lambda\sqrt{\pi}} \int_V^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M\kappa^{-1}}{2\lambda\sqrt{\pi}}\,\frac{2}{V} \exp\left\{-\frac{V^2}{4}\right\} \leqslant \frac{5eM\kappa^{-1}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{r^2\sqrt{r}}.$$

Следовательно,

$$|R_2| \leqslant \left|R_2^{(1)}\right| + \left|R_2^{(2)}\right| \leqslant \frac{5M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{r^2} + \frac{5eM\kappa^{-1}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{r^2\sqrt{r}} < \frac{10M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{r^2}.$$

Оценка R_3 и R_4. Замечая, что

$$|R_3| \leqslant \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda \frac{1}{u^2} \int_0^V e^{-\frac{t^2}{4}}\,\frac{(2^{K+1}+1)}{(K+1)!2^{2K+2}}\,\frac{(ut)^{2K+2}}{\mathfrak{S}_1^{K+1}}\,H^{(K+1)}(0)\,dt\,du,$$
$$R_4 \leqslant \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda \frac{1}{u^2} \int_0^V e^{-\frac{t^2}{4}} \sum_{k>K} \frac{H^{(k)}(0)}{k!}\,\frac{2^k-1}{2^{2k}}\,\frac{(ut)^{2k}}{\mathfrak{S}_1^k}\,dt\,du,$$

находим:

$$|R_3| + |R_4| \leqslant \frac{2M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda \frac{1}{u^2} \int_0^V e^{-\frac{t^2}{4}} \sum_{k>K} \frac{\mathfrak{S}_1^k}{k!}\,\frac{2^k+1}{2^{2k}}\,\frac{(ut)^{2k}}{\mathfrak{S}_1^k}\,dt\,du \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda \frac{1}{u^2} \int_0^V e^{-\frac{t^2}{4}} \sum_{k>K} \frac{1}{k!}\left(\frac{ut}{\sqrt{2}}\right)^{2k} dt\,du =$$
$$= \frac{3M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^V e^{-\frac{t^2}{4}} \sum_{k>K} \frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^{2k} \frac{\lambda^{2k-1}}{2k-1}\,dt < \frac{3M\kappa^{-1}}{\lambda K\sqrt{\pi}} \int_0^V e^{-\frac{t^2}{4}} \sum_{k>K} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{2}}\right)^{2k} dt.$$

При любом t с условием $0 \leqslant t \leqslant V$ сумма под знаком интеграла не превосходит

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi K}} \sum_{k>K} \left(\frac{e}{k}\right)^k \left(\frac{\lambda V}{\sqrt{2}}\right)^{2k} < \frac{1}{\sqrt{2\pi K}} \sum_{k>K} \left(\frac{e(\lambda V)^2}{2K}\right)^k.$$

Поскольку $\dfrac{e(\lambda V)^2}{2K} \leqslant \dfrac{1}{e}$, то окончательно находим:

$$|R_3| + |R_4| \leqslant \frac{3M\kappa^{-1}}{\lambda K\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi K}} \Big(\sum_{k>K} e^{-k} \Big) \int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3M\kappa^{-1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\lambda K\sqrt{K}} \frac{e^{-K}}{e-1} \leqslant \frac{6(25e)^2}{e-1} \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\log r}}{r^2}\, e^{-\frac{r}{22}} < 6434 M\kappa^{-1} \frac{\sqrt{\log r}}{r^2}\, e^{-\frac{r}{22}}.$$

Оценка R_5. Разобьём в выражении

$$R_5 = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}} \int\limits_\lambda^{+\infty} \frac{1}{u^2} \Big\{ H\Big(-\frac{(ut)^2}{4\mathfrak{S}_1}\Big) - H\Big(-\frac{(ut)^2}{2\mathfrak{S}_1}\Big) \Big\} du\, dt$$

интеграл по u на два, отвечающие промежуткам $\lambda \leqslant u \leqslant \lambda^2$ и $u > \lambda^2$. Соответственно, величина R_5 представится суммою $R_5^{(1)} + R_5^{(2)}$, где смысл обозначений очевиден. Тогда, пользуясь леммой 1.17, приходим к неравенствам:

$$\big|R_5^{(2)}\big| \leqslant \frac{2M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}} \int\limits_{\lambda^2}^{+\infty} \frac{du\, dt}{u^2} \leqslant \frac{2M\kappa^{-1}}{\lambda^2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4}}\, dt = \frac{2M\kappa^{-1}}{\lambda^2}.$$

Для оценки $R_5^{(1)}$ вновь воспользуемся полученным выше неравенством для интеграла $j(u)$. Имеем:

$$R_5^{(1)} = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_\lambda^{\lambda^2} \frac{1}{u^2} \int\limits_0^V e^{-\frac{t^2}{4}} \Big\{ H\Big(-\frac{(ut)^2}{4\mathfrak{S}_1}\Big) - H\Big(-\frac{(ut)^2}{2\mathfrak{S}_1}\Big) \Big\} du =$$

$$= \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_\lambda^{\lambda^2} \frac{1}{u^2} \big(j(u) - j(u\sqrt{2})\big) \frac{du}{u^2} = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int\limits_\lambda^{\lambda^2} \frac{j(u)}{u^2}\, du - \sqrt{2} \int\limits_{\lambda\sqrt{2}}^{\lambda^2\sqrt{2}} \frac{j(u)}{u^2}\, du \right\}.$$

Применяя оценку (1.56) наряду с неравенствами $2\Lambda > u$, $\sqrt{\Lambda} \leqslant \dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt[4]{2}}$, находим:

$$\left| \int\limits_\lambda^{\lambda^2} \frac{j(u)}{u^2}\, du \right| \leqslant \int\limits_\lambda^{\lambda^2} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{u} \Big(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \mathfrak{S}_1^{-3/2}\Big) + \frac{5\sqrt{\pi}}{2} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt[4]{2}} \frac{V^{3/2}}{x^{0.1}} \right\} \frac{du}{u^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^2} \Big(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \mathfrak{S}_1^{-3/2}\Big) + \frac{5\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{2}} \frac{V^{3/2}}{x^{0.1}\sqrt{\lambda}}$$

и, аналогично,

$$\left|\int\limits_{\lambda\sqrt{2}}^{\lambda^2\sqrt{2}} \frac{j(u)}{u^2}\,du\right| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{4\lambda^2}\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{S}_1^{-3/2}\right) + \frac{5\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\,\frac{V^{3/2}}{x^{0.1}\sqrt{\lambda}}.$$

Сложив полученные оценки, приходим к следующим неравенствам:

$$\left|R_5^{(1)}\right| \leqslant M\kappa^{-1}\left(\frac{3}{4\lambda^2}\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{S}_1^{-3/2}\right) + \frac{5}{\sqrt[4]{2}}\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\frac{V^{3/2}}{x^{0.1}\sqrt{\lambda}}\right),$$

$$|R_5| \leqslant \left|R_5^{(1)}\right| + \left|R_5^{(2)}\right| \leqslant M\kappa^{-1}\left(\frac{11}{4\lambda^2}\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{S}_1^{-3/2}\right) + \frac{5}{\sqrt[4]{2}}\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\frac{V^{3/2}}{x^{0.1}\sqrt{\lambda}}\right)\right) <$$

$$< M\kappa^{-1}\left(2032\,\frac{\log r}{r} + 84.1\,\frac{\log r}{x^{0.1}\sqrt[4]{r}}\right).$$

Складывая полученные выше оценки величин R_j, $1 \leqslant j \leqslant 5$, находим:

$$\sum_{j=1}^{5}|R_5| \leqslant M\kappa^{-1}\left\{740\,\frac{\log r}{r} + \frac{26.1}{x^{0.1}}\,\frac{\log r}{\sqrt[4]{r}} + \frac{10}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{r^2} + \right.$$

$$\left. + 6434\,\frac{\sqrt{\log r}}{r^2}\,e^{-\frac{r}{22}} + 2032\,\frac{\log r}{r} + \frac{84.1}{x^{0.1}}\,\frac{\log r}{\sqrt[4]{r}}\right\} < M\kappa^{-1}\left\{2273\,\frac{\log r}{r} + \frac{110.2}{x^{0.1}}\,\frac{\log r}{\sqrt[4]{r}}\right\}.$$

Следовательно,

$$\sum_n |v_n| = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\,j\left(1 - e^{-\frac{V^2}{4}}\right) + \theta\sum_{j=1}^{5}|R_j| =$$

$$= \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\,j + M\theta\kappa^{-1}\left(\frac{a\log r}{r} + \frac{b\log r}{x^{0.1}\sqrt[4]{r}}\right) =$$

$$= \frac{M}{\sqrt{\pi}}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,\frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} + \theta c\,(\log r)\left(\frac{1}{r} + \frac{x^{-0.1}}{20\sqrt[4]{r}}\right)\right\},$$

где $a = 2274, b = 110.2, c = 2274(\sqrt{2}+1) < 5.49\cdot 10^3$. Несложно теперь заметить, что при $x \geqslant (\log N)^{7.5}$ будут выполнены неравенства

$$x \geqslant r^{7.5}, \quad \frac{x^{-0.1}}{\sqrt[4]{r}} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Поэтому для таких x остаточный член в полученной формуле не превзойдёт по модулю

$$\frac{21}{20}\,c\,\frac{\log r}{r} < 5765\,\frac{\log r}{r}.$$

Теорема доказана.

Глава 2

Поведение аргумента дзета-функции Римана в точках Грама

Как уже отмечалось выше, основные задачи, связанные с числами Δ_n, т.е. вычисление моментов Δ_n и построение для них функции распределения, сводятся к аналогичным задачам для последовательности чисел $\Delta(n) = S(t_n + 0)$. По этой причине доказательство формул Сельберга мы предваряем исследованием свойств величин $\Delta(n)$, которому и посвящена настоящая глава.

Вполне удовлетворительные, хотя и не самые точные результаты в указанных задачах получаются прямым применением методов работ [38],[31]: переход от «непрерывного» параметра t, $T < t \leqslant T + H$, к «дискретному» параметру t_n, $N < n \leqslant N + M$, не представляет затруднений. Перечислим эти результаты, чтобы иметь в дальнейшем возможность сравнить их с теми, что будут получены ниже.

Прежде всего, в случае целого $k \geqslant 1$ может быть установлена асимптотика вида

$$\sum_n \Delta^{2k}(n) \;=\; \frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M}{(2\pi)^{2k}}\,(\log\log N)^k\big(1 \,+\, r_{2k}\big), \tag{2.1}$$

где

$$|r_{2k}| \leqslant \frac{4^k\sqrt{k}}{\sqrt{\log\log N}}. \tag{2.2}$$

Несложно видеть, что формула (2.1) будет содержательной лишь при $1 \leqslant k \leqslant (b_1 - \delta)\log\log\log N$, где $4b_1\log 2 = 1$.

Далее, при нецелом a с условием $0 < a < b_2\log\log\log N$ восходящая к А. Гошу [31] техника работы с дробными моментами приводит к равенству

$$\sum_n |\Delta(n)|^{2a} \;=\; \frac{\Gamma\big(a + \frac{1}{2}\big)}{\sqrt{\pi}}\,\frac{M}{\pi^{2a}}(\log\log N)^a\big(1 \,+\, r_{2a}\big), \tag{2.3}$$

в котором

$$|r_{2a}| \leqslant (\log\log\log N)^{-\,b_3}, \quad b_3 = b_3(a) > 0 \tag{2.4}$$

(ср. с [39, гл. II, §3, теорема 2]). Дополнительные усовершенствования этой техники, принадлежащие Р.Н. Бояринову [37], позволяют в ряде случаев заменить оценку r_{2a} следующей, более точной:

$$|r_{2a}| \leqslant \exp\big\{-\,b_4\sqrt{\log\log\log N}\big\}, \quad b_4 = b_4(a) > 0. \tag{2.5}$$

Стандартная схема получения асимптотики для функции распределения основана на хорошем приближении характеристической функции исследуемой случайной величины и дальнейшем применении неравенства Берри-Эссеена. Её первое применение к задаче распределения значений $S(t)$ и связанных с ней функций также принадлежит Гошу.

Метод Гоша, будучи применён к функции

$$\Phi(u) \,=\, \frac{1}{M}\,\#\biggl\{n\,|\,N<n\leqslant N+M, \Delta(n)\leqslant\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}}\biggr\},$$

приводит к равенству

$$\Phi(u) \,=\, M\bigl(G(u)\,+\,r(u)\bigr), \tag{2.6}$$

в котором

$$G(u) \,=\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{u} e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv, \quad |r(u)|\,\leqslant\,\frac{b_5}{\sqrt{\log\log\log N}}, \quad b_5>0, \tag{2.7}$$

и которое, ввиду соотношений

$$G(-u) \,=\, 1-G(u) \,\asymp\, \bigl(ue^{\frac{u^2}{2}}\bigr)^{-1}, \quad u\to+\infty,$$

является содержательным лишь при

$$|u|\,\leqslant\bigl(\tfrac{1}{2}-\delta\bigr)\log\log\log\log N.$$

Более совершенный метод нахождения функций распределения, созданный Сельбергом и реализованный (применительно к «непрерывному» случаю) в работе K.-M. Тсанга [40][1)] позволяет заменить оценку $r(u)$ в (2.7) неравенством

$$|r(u)|\,\leqslant\,\frac{b_6\log\log\log N}{\sqrt{\log\log N}};$$

соответственно, диапазон применимости такой формулы для $\Phi(u)$ расширяется до области

$$|u|\,\leqslant\bigl(\tfrac{1}{2}-\delta\bigr)\log\log\log N.$$

В настоящей главе мы, используя технику работ [38],[31],[32] наряду с некоторыми дополнительными соображениями (включающими теоремы главы 1), получаем ряд новых результатов, уточняющих перечисленные выше.

Во-первых, оценка (2.2) заменяется неравенством

$$|r_{2k}|\,\leqslant\,\frac{b_7k\sqrt{k}}{\sqrt{\log\log N}}. \tag{2.8}$$

Соответственно, область применения формулы (2.1) расширяется до промежутка

$$1\leqslant k\leqslant b_8\,\sqrt[3]{\log\log N}.$$

[1)] См. также теорему 5 из работы: Р.Н. Бояринов, “О распределении значений дзета-функции Римана”, *Доклады РАН*, **438**:1(2011), 14-16.

Далее, оценки (2.4), (2.5) остаточного члена r_{2a} заменяются общим неравенством

$$|r_{2a}| \leqslant \frac{b_9(a\sqrt{a} + a\log\log\log N)}{\sqrt{\log\log N}},$$

справедливым при $1 \leqslant a \leqslant b_{10}\sqrt[3]{\log\log N}$. Таким образом практически ликвидируется «разрыв» в точности оценок r_{2a} в случаях целого и нецелого a.

Наконец, при некотором ограничении на величину u (именно, при выполнении неравенства $u \geqslant \frac{3}{2}$) формулу (2.7) удаётся заменить равенствами

$$\frac{\Phi(-u)}{G(-u)} = 1 + O\big(r(u)\big), \quad \frac{1-\Phi(u)}{1-G(u)} = 1 + O\big(r(u)\big),$$

где величина

$$r(u) = \frac{u(u^2 + \log\log\log N)}{\sqrt{\log\log N}}$$

остаётся бесконечно малой при $u = o(\sqrt[6]{\log\log N})$.

Укажем теперь основные соображения, которые легли в основу перечисленных уточнённых результатов.

Появление множителя 4^k в (2.2) объясняется применением неравенства Гёльдера. Именно, если u и v - произвольные вещественные числа, то это неравенство наряду с формулой конечных приращений Лагранжа приводят к оценкам

$$\big|(u+v)^{2k} - u^{2k}\big| = 2k|v| \cdot |u+\theta v|^{2k-1} \leqslant$$
$$\leqslant 2k|v| \cdot 2^{2k-2}\big(|u|^{2k-1} + |v|^{2k-1}\big) \leqslant 4^k k\big(|u|^{2k-1}|v| + v^{2k}\big).$$

Если число $|v|$ слишком мало по сравнению с $|u|$, то такие оценки являются слишком грубыми и их целесообразно заменить более точным неравенством

$$\big|(u+v)^{2k} - u^{2k}\big| \leqslant \sum_{\nu=1}^{2k} \binom{2k}{\nu} |u|^{2k-\nu}|v|^{\nu}.$$

Именно это соображение лежит в основе доказательства (2.8).

Далее, в методе Гоша дробный момент исследуемой функции приближается линейной комбинацией очень большого числа её чётных моментов. Соответственно, остаточный член r_{2a} оказывается линейной комбинацией очень большого количества остаточных членов r_{2k}, $k = 1, 2, \ldots$. Такое «накопление» ошибки и служит главной причиной снижения точности в оценке r_{2a} (по сравнению с r_{2k}).

В настоящей работе мы придерживаемся иного порядка действий. Так, в методе Гоша функция $S(t)$ сперва приближалась тригонометрическим полиномом вида

$$W_x(t) = -\frac{1}{\pi}\sum_{p \leqslant x} \frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}},$$

потом вычислялись чётные моменты $S(t)$, которые использовались затем для отыскания дробного момента $S(t)$. Теперь же мы сперва вычисляем дробный момент $W_x(t)$ (что и было сделано в главе 1), а затем оцениваем разность между ним и

дробным моментом $S(t)$. Таким образом, мы избегаем того «накопления» ошибки, о котором говорилось выше.

Поясним сказанное на примере вычисления первого момента. Представляя $S(t)$ в виде

$$W_y(t) \,+\, \big(W_x(t) - W_y(t)\big) \,+\, R(t),$$

где $R(t) = S(t) - W_x(t)$, $y < x$, несложно заключить, что суммы

$$\sum_n |S(t_n + 0)| = \sum_n |\Delta(n)| \quad \text{и} \quad \sum_n |W_y(t_n)|$$

отличаются друг от друга не более чем на

$$\sum_n \big|W_x(t_n) \,-\, W_y(t_n)\big| \,+\, \sum_n \big|R(t_n + 0)\big| \,=\, \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Восходящая к Сельбергу оценка $\Sigma_1 \ll M$ и цепочка очевидных неравенств

$$\Sigma_2^2 \leqslant M \sum_n \left| \sum_{y<p\leqslant x} \frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}} \right|^2 \ll M \sum_{y<p\leqslant x} \frac{1}{p} \ll M \log\left(\frac{\log x}{\log y}\right)$$

при выборе $y = \exp\left(\dfrac{c \log x}{\log\log N}\right)$ дают:

$$\sum_n |\Delta(n)| \,=\, \sum_n \big|W_y(t_n)\big| \,+\, O\big(M\sqrt{\log\log\log N}\big).$$

Теоремы первой главы позволяют вычислить сумму по n в правой части, грубо говоря, с любой степенью точности. Ограничиваясь первыми двумя членами асимптотического разложения теоремы 1.2, находим:

$$\sum_n \big|W_y(t_n)\big| \,=\, \frac{M}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\log\log N} \,+\, O\left(\frac{M}{(\log\log N)^{3/2}}\right),$$

$$\sum_n |\Delta(n)| \,=\, \frac{M}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\log\log N} \left(1 \,+\, O\left(\sqrt{\frac{\log\log\log N}{\log\log N}}\right)\right).$$

Наконец, получение асимптотики функции распределения $\Phi(u)$ для достаточно больших значений u сделалось возможным благодаря недавней работе М. Радзивилла [30], который применил к $S(t)$ вероятностные методы, позволяющие исследовать т.н. «большие уклонения» для распределений, близких к нормальному.

Поясним сказанное подробнее. Рассмотрим для простоты классическую схему Бернулли. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_N$ - независимые случайные величины, принимающие с одинаковыми вероятностями (равными $\frac{1}{2}$) значения 0 и 1. Центральная предельная теорема утверждает, что при любом фиксированном x функция

$$F(x) \,=\, \mathbf{P}\left\{ \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_N \,-\, \frac{1}{2}N}{\frac{1}{2}\sqrt{N}} \leqslant x \right\}$$

стремится к $G(x)$ при неограниченном возрастании N или, что то же,

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{F(x)}{G(x)}\ =\ 1. \tag{2.9}$$

В 1930-е гг. появился ряд работ, в которых исследовался вопрос о том, насколько большим может быть x (как функция N), чтобы соотношение (2.9) по-прежнему имело место (см. [41] и перечисленные в этой работе статьи). В 1938 г. Г. Крамер [41] создал общий метод, который, будучи применён к указанному частному случаю схемы Бернулли, позволил доказать, что (2.9) выполняется вплоть до $x = O\left(\frac{\sqrt{N}}{\log N}\right)$. Этот результат Крамера впоследствии неоднократно обобщался и уточнялся многими авторами. Одно из таких обобщений, принадлежащее Х.-К. Хвангу [56] и применённое к исследованию функции $S(t)$ Радзивиллом [30], используется и в настоящей работе.

С помощью теоремы Хванга удаётся доказать, что «большие» уклонения $\Delta(n)$ от среднего значения также подчинены нормальному закону, а также установить наличие очень большого числа номеров n, для которых $\Delta(n)$ составляет величину порядка $(\log\log n)^{1-\varepsilon}$ (что отвечает превышению среднего значения $\Delta(n)$, имеющего порядок $\sqrt{\log\log n}$, в $(\log\log n)^{0.5-\varepsilon}$ раз).

Первый параграф настоящей главы посвящён оценке среднего значения разности между функцией $S(t)$ и приближающим её полиномом $W_x(t)$. Все утверждения этого параграфа восходят к работе Сельберга [38]. Их доказательства приводятся здесь для того, чтобы, во-первых, учесть некоторые особенности, присущие «дискретному» случаю и «короткому» промежутку суммирования и, во-вторых, вычислить значения постоянных в каждом из используемых неравенств. Основным утверждением параграфа является лемма 2.7.

Во втором параграфе устанавливается связь между числами $\Delta(n)$ и функцией $S(t)$, выводится асимптотика чётного и оценка нечётного моментов этих величин (теоремы 2.1 и 2.2).

Третий параграф содержит доказательство асимптотики дробного момента $\Delta(n)$ (теорема 2.3), которое опирается на оценку точности приближения суммы $|x+y|^a$ величиной $|x|^a$ при нецелом a (лемма 2.11).

В последнем, четвёртом параграфе, приведены две теоремы о функции распределения $\Phi(u)$. Первая опирается на метод Гоша и охватывает область «малых» $|u|$ (теорема 2.4); вторая использует упомянутый выше результат Хванга о «больших» уклонениях от нормального закона (теорема 2.5).

§1. Приближение функции $S(t)$ специальными тригонометрическими полиномами

Цель настоящего параграфа состоит в верхней оценке среднего значения разности между величиной $\Delta(n)$ и приближающим её полиномом

$$W_x(t_n)\ =\ -\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin\left(t_n\log p\right)}{\sqrt{p}}.$$

Все приводимые здесь утверждения являются «дискретными» аналогами лемм 12,13 и теорем 2,4 из работы Сельберга [38]; ему же принадлежат и методы их доказательства.

Лемма 2.1. *Пусть p пробегает простые числа промежутка $(1, x]$, где $2 \leqslant x \leqslant (N/\log N)^{1/(4k)}$, и пусть a_p - произвольная последовательность вещественных чисел. Пусть, далее,*

$$U_0(t) \,=\, \sum_{p \leqslant x} a_p\, p^{it}, \quad U_1(t) \,=\, \operatorname{Re} U_0(t), \quad U_2(t) \,=\, \operatorname{Im} U_0(t).$$

Тогда, полагая

$$S_j \,=\, S_{j,k} \,=\, \sum_n \bigl|U_j(t_n)\bigr|^{2k},$$

при любом целом $k \geqslant 1$ будем иметь

$$S_0 \leqslant k! M\, \mathfrak{s}_2^k \,+\, x^k \mathfrak{s}_1^{2k} \log N, \quad S_1, S_2 \leqslant \frac{(2k)!}{k!}\, \frac{M}{2^{2k}}\, \mathfrak{s}_2^k \,+\, x^k \mathfrak{s}_1^{2k} \log N,$$

где

$$\mathfrak{s}_r \,=\, \sum_{p \leqslant x} |a_p|^r.$$

Доказательство. Оценивая S_0, получим:

$$S_0 \,=\, \sum_n \sum_{\substack{p_1, \ldots, p_k \leqslant x \\ q_1, \ldots, q_k \leqslant x}} a_{p_1} \ldots a_{q_k} \left(\frac{p_1 \ldots p_k}{q_1 \ldots q_k}\right)^{it_n} \,=\, M\Sigma_1 \,+\, \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 \,=\, \sum_{\substack{p_1 \ldots p_k = q_1 \ldots q_k \\ p_1, \ldots, q_k \leqslant x}} a_{p_1} \ldots a_{q_k} \,=\, \sum_{\substack{p_1 \ldots p_k = q_1 \ldots q_k \\ p_1, \ldots, q_k \leqslant x}} a_{p_1}^2 \ldots a_{p_k}^2,$$

$$\Sigma_2 \,=\, \sum_{\substack{p_1 \ldots p_k \neq q_1 \ldots q_k \\ p_1, \ldots, q_k \leqslant x}} a_{p_1} \ldots a_{q_k} \sum_n \left(\frac{p_1 \ldots p_k}{q_1 \ldots q_k}\right)^{it_n}.$$

При фиксированных простых $p_1, \ldots, p_k$ число решений уравнения $p_1 \ldots p_k = q_1 \ldots q_k$ не превосходит $k!$. Следовательно,

$$\Sigma_1 \leqslant k! \sum_{p_1, \ldots, p_k \leqslant x} a_{p_1}^2 \ldots a_{p_k}^2 \,=\, k! \mathfrak{s}_2^k.$$

Далее, применив к оценке Σ_2 лемму 1.2, будем иметь:

$$\bigl|\Sigma_2\bigr| \leqslant \sum_{p_1, \ldots, q_k \leqslant x} |a_{p_1} \ldots a_{q_k}| \sqrt{p_1 \ldots q_k}\, \log N \leqslant x^k \mathfrak{s}_1^{2k} \log N,$$

что и требовалось.

Пользуясь равенством $U_1 = \dfrac{1}{2}\big(U_0 + \overline{U}_0\big)$, находим:

$$S_1 \;=\; 2^{-\,2k}\sum_n \big(U_0(t_n) \;+\; \overline{U}_0(t_n)\big)^{2k} \;=\; 2^{-2k}\sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}u_\nu,$$

где

$$u_\nu \;=\; \sum_n U_0^\nu\,\overline{U}_0^{\,2k-\nu}(t_n) \;=\; \sum_n \sum_{\substack{p_1,\ldots,\,p_\nu\,\leqslant\,x\\ q_1,\ldots,\,q_{2k-\nu}\,\leqslant\,x}} a_{p_1}\ldots a_{q_{2k-\nu}}\left(\frac{p_1\ldots p_\nu}{q_1\ldots q_{2k-\nu}}\right)^{it_n}.$$

Пользуясь леммой 1.2, в случае $\nu \neq k$ приходим к неравенствам

$$|u_\nu| \leqslant (\log N)\sum_{\substack{p_1,\ldots,\,p_\nu\,\leqslant\,x\\ q_1,\ldots,\,q_{2k-\nu}\,\leqslant\,x}} |a_{p_1}\ldots a_{q_{2k-\nu}}|\sqrt{p_1\ldots q_{2k-\nu}} \leqslant x^k\mathfrak{s}_1^{2k}\log N.$$

Точно так же оценивается и вклад в u_k от слагаемых, отвечающих условию $p_1\ldots p_k \neq q_1\ldots q_k$. Следовательно,

$$S_1 \leqslant 2^{-2k}\binom{2k}{k}M\Sigma_1 \;+\; 2^{-2k}\sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}x^k\mathfrak{s}_1^k\log N \leqslant \frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M}{2^{2k}}\,\mathfrak{s}_2^k \;+\; x^k\mathfrak{s}_1^{2k}\log N.$$

Аналогично доказывается и оценка S_2. Лемма доказана.

Замечание 1. В частном случае $a_p = p^{-\,0.5}$ при $k \geqslant 2$ оценки сумм S_0, S_1 и S_2 можно несколько уточнить, опустив в неравенствах леммы слагаемые $x^k\mathfrak{s}_1^{2k}\log N$. Действительно, сумма Σ_1 имеет вид

$$\sum_{p_1,\ldots,\,p_k\,\leqslant\,x}\frac{k!}{\alpha_1!\ldots\alpha_s!}(p_1\ldots p_k)^{-1},$$

где s - количество различных чисел в наборе $p_1,\ldots,p_k$, а $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ - их кратности.

Пусть $q \leqslant x$ - простое число. Слагаемое, отвечающее набору $p_1 = \ldots = p_k = q$, входит в Σ_1 с коэффициентом $\dfrac{k!}{k!} = 1$. В то же время в выражении $k!s_2^k$ всякое такое слагаемое учитывается с коэффициентом $k!$. Следовательно,

$$\Sigma_1 \leqslant k!s_2^k \;-\; (k!-1)\sum_{2\,\leqslant\,q\,\leqslant\,x}\frac{1}{q^k} \leqslant k!s_2^k \;-\; \frac{k!-1}{2^k}.$$

Для завершения доказательства осталось проверить, что

$$M\,\frac{k!-1}{2^k} \;>\; x^k\mathfrak{s}_1^{2k}\log N, \quad 2^{-2k}\binom{2k}{k}\,M\,\frac{k!-1}{2^k} \;>\; x^k\mathfrak{s}_1^{2k}\log N.$$

Но эти неравенства следуют из цепочки оценок

$$\binom{2k}{k}^{-1}8^k x^k\mathfrak{s}_1^{2k} \;<\; (8x\mathfrak{s}_1^2)^k \leqslant \left(8x\,\frac{a^2x}{(\log x)^2}\right)^k \;=\; \left(\frac{2ax\sqrt{2}}{\log x}\right)^{2k} \;<$$

$$<\; \frac{M}{\log N} \leqslant (k!-1)\,\frac{M}{\log N},$$

в которых $a = 2.784$ - постоянная леммы 3.П.

Замечание 2. Утверждения леммы остаются в силе, если $U_0(t)$ заменить суммою вида

$$\sum_{p \leqslant x} a_p\, p^{2it},$$

суммы $U_1(t)$ и $U_2(t)$ - её вещественной и мнимой частями, а величину x всюду в условии леммы – величиною x^2.

Лемма 2.2. *Пусть $c > 0$, k - целое число с условием $1 \leqslant k \leqslant 0.1 \log M$, $18 \leqslant y \leqslant (0.2M/\log N)^{1/(3k)}$, и пусть последовательности вещественных чисел $a_1(p)$ и $a_2(p)$ подчинены условиям*

$$|a_1(p)| \leqslant c\,\frac{\log p}{\log y}, \quad |a_2(p)| \leqslant c,$$

когда p пробегает простые числа промежутка $(2, y]$. Тогда для сумм S_1 и S_2,

$$S_1 = \sum_n \left| \sum_{p \leqslant y} \frac{a_1(p)}{\sqrt{p}}\, p^{it_n} \right|^{2k}, \quad S_2 = \sum_n \left| \sum_{p \leqslant y} \frac{a_2(p)}{p}\, p^{2it_n} \right|^{2k},$$

справедливы следующие оценки:

$$S_1 \leqslant 1.1(kc^2)^k M, \quad S_2 \leqslant 1.1(0.5kc^2)^k M.$$

Доказательство. Замечая, что $y \leqslant (M/\log N)^{1/(3k)}$ и полагая $a_p = \dfrac{a(p)}{\sqrt{p}}$ в лемме 2.1, будем иметь:

$$S_1 \leqslant k! M \mathfrak{s}_2^k + y^k \mathfrak{s}_1^{2k} \log N.$$

Применяя неравенства (5) и (3) леммы 3.П, находим:

$$\mathfrak{s}_2 = \sum_{p \leqslant y} \frac{a_1^2(p)}{p} \leqslant \frac{c^2}{(\log y)^2} \sum_{p \leqslant y} \frac{(\log p)^2}{p} \leqslant \frac{c^2}{\log y} \sum_{p \leqslant y} \frac{\log p}{p} < c^2,$$

$$\mathfrak{s}_1 = \sum_{p \leqslant y} \frac{|a_1(p)|}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{c}{\log y} \sum_{p \leqslant y} \frac{\log p}{\sqrt{p}} \leqslant c \sum_{p \leqslant y} \frac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{ac\sqrt{y}}{\log y} \leqslant c\sqrt{y},$$

и, наконец,

$$y^k \mathfrak{s}_1^{2k} \log N < (cy)^{2k} \log N < 0.1 c^{2k} M.$$

Таким образом,

$$S_1 \leqslant k! M c^{2k} + 0.1 c^{2k} M \leqslant 1.1(kc^2)^k M.$$

Далее, в силу той же леммы, применённой ко второй сумме, получаем неравенство

$$S_2 \leqslant k! M \mathfrak{s}_2^k + y^k \mathfrak{s}_1^{2k} \log N,$$

в котором

$$\mathfrak{s}_2 = \sum_{p \leqslant y} \frac{a_2^2(p)}{p^2} \leqslant c^2 \sum_{p \leqslant y} \frac{1}{p^2} < 0.5c^2,$$

$$\mathfrak{s}_1 = \sum_{p \leqslant y} \frac{|a_2(p)|}{p} \leqslant c \sum_{p \leqslant y} \frac{1}{p} \leqslant c\big(\log\log y + 1\big) < c\sqrt{\frac{y}{2}}.$$

Следовательно,

$$S_2 \leqslant k!(0.5c^2)^k M + \left(c\sqrt{\frac{y}{2}}\right)^{2k} \log N \leqslant k!(0.5c^2)^k M + 0.1(0.5c^2)^k M \leqslant 1.1(0.5c^2k)^k M.$$

Лемма доказана.

Пусть $2 \leqslant x \leqslant t^2$. Следуя Сельбергу [38], положим

$$\sigma_{x,t} = \frac{1}{2} + 2\max\left(\left|\beta - \frac{1}{2}\right|, \frac{1}{\log x}\right),$$

где максимум берётся по всем нулям $\varrho = \beta + i\gamma$ дзета-функции Римана, удовлетворяющим условию

$$|t - \gamma| \leqslant \frac{x^{3\left|\beta-\frac{1}{2}\right|}}{\log x}.$$

Положим, наконец, $X = N^{0.1\,\varepsilon}$.

Лемма 2.3. *Пусть $\nu \geqslant 0$ - целое число, $x \geqslant 2$, $y \geqslant 1$, $x^3y^2 \leqslant X$. Тогда имеет место оценка*

$$\sum_n \left(\sigma_{x,t_n} - \tfrac{1}{2}\right)^\nu y^{\sigma_{x,t_n}-\frac{1}{2}} < \left(\frac{2}{\log x}\right)^\nu M\left(e^{2\,\frac{\log y}{\log x}} + 52.1\nu!\,\frac{\log N}{\log x}\left(\frac{\log x}{\log X}\right)^\nu\right).$$

Доказательство. Все числа n, $N < n \leqslant N+M$, разобьём на два класса, относя к первому из них те, для которых любой нуль $\beta + i\gamma$ с условием

$$|t_n - \gamma| \leqslant \frac{x^{3\left|\beta-\frac{1}{2}\right|}}{\log x}$$

удовлетворяет также и неравенству $\left|\beta - \frac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{\log x}$. Все остальные числа n отнесём ко второму классу. Тогда сумма V_1 по всем n из первого класса не превзойдёт величины

$$\left(\frac{2}{\log x}\right)^\nu y^{\frac{2}{\log x}} M = \left(\frac{2}{\log x}\right)^\nu M e^{2\,\frac{\log y}{\log x}}.$$

Далее, для всякой точки t_n, отвечающей значению n второго класса, найдётся нуль $\beta_0 + i\gamma_0$ с условием

$$\gamma_0 - \delta_0 \leqslant t_n \leqslant \gamma_0 + \delta_0, \quad \delta_0 = \frac{x^{3\left|\beta_0-\frac{1}{2}\right|}}{\log x} < \sqrt{X},$$

и такой, что $\left|\beta_0 - \frac{1}{2}\right| > \dfrac{1}{\log x}$. Следовательно, все такие точки Грама t_n будут покрыты, если каждую из ординат γ промежутка $(T - \sqrt{X}, T + H + \sqrt{X}]$, $T = t_N$, $H = t_{N+M} - t_N$, окружить окрестностью $(\gamma - \delta, \gamma + \delta)$, где $\delta = \dfrac{x^{3\left|\beta-\frac{1}{2}\right|}}{\log x}$. Так для суммы V_2 по числам n второго класса получим неравенство:

$$V_2 \leqslant 2 \sum_{\substack{T-\sqrt{X}<\gamma\leqslant T+H+\sqrt{X} \\ \beta>\frac{1}{2}}} \sum_{\gamma-\delta\leqslant t_n\leqslant\gamma+\delta} 2^\nu \left(\beta - \tfrac{1}{2}\right)^\nu y^{2\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}$$

(множитель 2 позволяет учесть симметрию нулей $\zeta(s)$ относительно критической прямой).

Пусть $t_{k+1},\dots,t_{k+r}$ - все точки Грама, попавшие на отрезок $[\gamma-\delta,\gamma+\delta]$. Согласно формуле конечных приращений Лагранжа, при некотором η, $\gamma-\delta<\eta<\gamma+\delta$, имеем:

$$r=\pi^{-1}\big(\vartheta(t_{k+r})-\vartheta(t_{k+1})\big)+1=\pi^{-1}\big(t_{k+r}-t_{k+1}\big)\,\vartheta'(\eta)+1<$$
$$<\frac{\delta}{\pi}\log N=\frac{\log N}{\pi\log x}\,x^{3\left(\beta-\frac12\right)}.$$

Следовательно,

$$V_2<\frac{2^{\nu+1}}{\pi}\frac{\log N}{\log x}\sum_{\substack{T-\sqrt{X}<\gamma\leqslant T+\sqrt{X}+H\\ \beta>\frac12}}\big(\beta-\tfrac12\big)^{\nu}\big(x^3y^2\big)^{\beta-\frac12}.$$

Пользуясь тождеством

$$\big(\beta-\tfrac12\big)^{\nu}z^{\beta-\frac12}=\int_0^{\beta-\frac12}\big(u^{\nu}\log z+\nu u^{\nu-1}\big)z^u\,du$$

наряду с оценкой $x^3y^2\leqslant X$, получим:

$$V_2<\frac{2^{\nu+1}}{\pi}\,\frac{\log N}{\log x}\sum_{\substack{T-\sqrt{X}<\gamma\leqslant T+H+\sqrt{X}\\ \beta>\frac12}}\int_0^{\beta-\frac12}\big(u^{\nu}\log X+\nu u^{\nu-1}\big)X^u\,du=$$
$$=\frac{2^{\nu+1}}{\pi}\,\frac{\log N}{\log x}\int_0^{\frac12}\big(u^{\nu}\log X+\nu u^{\nu-1}\big)X^u\sum_{\substack{T-\sqrt{X}<\gamma\leqslant T+H+\sqrt{X}\\ \beta>\frac12}}g(\beta+i\gamma;u)\,du,$$

где

$$g(\beta+i\gamma;u)=\begin{cases}1,\ \text{если}\ \ 0\leqslant u\leqslant\beta-\frac12,\\ 0,\ \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Но сумма по γ под знаком интеграла совпадает с величиной

$$N\big(\tfrac12+u,T+H+\sqrt{X}\big)-N\big(\tfrac12+u,T-\sqrt{X}\big),$$

которая, в силу леммы 4.П и формулы Римана-Мангольдта, не превосходит суммы

$$\big\{N\big(\tfrac12+u,T+H\big)-N\big(\tfrac12+u,T\big)\big\}+$$
$$+\big\{N(T+H+\sqrt{X})-N(T+H)\big\}+\big\{N(T)-N(T-\sqrt{X})\big\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{13}{2}\,HX^{-2u}\log\big(T+0.5H\big)+\frac13\sqrt{X}\log N<$$
$$<13\pi MX^{-2u}\big(1+o(1)\big)+\frac13\sqrt{X}\log N<13\pi MX^{-2u}\big(1+o(1)\big).$$

Следовательно,

$$V_2 < \frac{2^{\nu+1}}{\pi}\,\frac{\log N}{\log x}\,13\pi M\big(1+o(1)\big)\int_0^{+\infty}\big(u^\nu\log X+\nu u^{\nu-1}\big)X^u\cdot X^{-2u}du=$$
$$=26\big(1+o(1)\big)\,2\nu!\cdot M\,\frac{\log N}{\log x}\left(\frac{2}{\log X}\right)^\nu<52.01M\nu!\left(\frac{2}{\log X}\right)^\nu\frac{\log N}{\log x}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Пусть $n\geqslant 2$ - целое число, $x\geqslant 2$. Положим

$$\Lambda_x(n)=\begin{cases}\Lambda(n),\ \text{если } 1\leqslant n\leqslant x;\\ \Lambda(n)\,\dfrac{\log^2\left(x^3/n\right)-2\log^2\left(x^2/n\right)}{2\log^2 x},\ \text{если } x<n\leqslant x^2,\\ \Lambda(n)\,\dfrac{\log^2\left(x^3/n\right)}{2\log^2 x},\ \text{если } x^2<n\leqslant x^3.\end{cases}$$

Лемма 2.4. *Пусть* $e^{16}\leqslant x\leqslant t^\delta$, $250\delta=1$. *Тогда*

$$S(t)=-\frac{1}{\pi}\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}}}\,\frac{\sin(t\log m)}{\log m}+\theta\big(\sigma_{x,t}-\tfrac12\big)\left(a_1\log t+a_2\left|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t}+it}}\right|\right),\quad(2.10)$$

где $a_1=4.5$, $a_2=8.54$.

Доказательство. Пусть $R(t)$ - разность между $S(t)$ и суммою по m в правой части (2.10). Согласно лемме 6.П, имеем:

$$\pi|R(t)|\leqslant\big(\sigma_{x,t}-\tfrac12\big)\left(a_1^{(1)}\log t+a_2^{(1)}|r(x,t)|+a_3^{(1)}+\sum_\varrho\frac{\kappa(\varrho)}{(\sigma_{x,t}-\frac12)^2+(t-\gamma)^2}\right),$$

где

$$a_1^{(1)}=\frac{13}{6e}+1.8,\quad a_2^{(1)}=\frac{13}{3e}+2.6,\quad a_3^{(1)}=\frac{52}{3e}+10.82,$$
$$r(x,t)=\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}+it}},\quad \kappa(\varrho)=\int_{\frac12}^{\sigma_{x,t}}\frac{|t-\gamma|\cdot|\sigma_{x,t}+\sigma-2\beta|}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}\,d\sigma.$$

В силу той же леммы в случае, когда $\big|\beta-\frac12\big|>\frac12\big(\sigma_{x,t}-\frac12\big)$, интеграл $\kappa(\varrho)$ удовлетворяет неравенству

$$\kappa(\varrho)<2\big(\sigma_{x,t}-\tfrac12\big).$$

Пусть $\big|\beta-\frac12\big|\leqslant\frac12\big(\sigma_{x,t}-\frac12\big)$. Тогда, замечая, что $\big|\sigma_{x,t}-\beta\big|\leqslant\frac32\big(\sigma_{x,t}-\frac12\big)$, получим:

$$\kappa(\varrho)\leqslant\int_{\frac12}^{\sigma_{x,t}}\frac{|t-\gamma|\big(|\sigma_{x,t}-\beta|+|\sigma-\beta|\big)}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}\,d\sigma\leqslant\frac32\big(\sigma_{x,t}-\tfrac12\big)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|t-\gamma|d\sigma}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}+$$
$$+\int_{\frac12}^{\sigma_{x,t}}\frac{|t-\gamma|\cdot|\sigma-\beta|}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}d\sigma\leqslant\frac{3\pi}{2}\big(\sigma_{x,t}-\tfrac12\big)+\frac12\big(\sigma_{x,t}-\tfrac12\big).$$

Воспользовавшись леммой 5.П, будем иметь:

$$\pi|R(t)|\leqslant\big(\sigma_{x,t}-\tfrac12\big)\big(a_1^{(2)}\log t+a_2^{(2)}|r(x,t)|+a_3^{(2)}\big),$$

где

$$a_1^{(2)} = a_1^{(1)} + \frac{13}{12}(3\pi+1), \quad a_2^{(2)} = a_2^{(1)} + \frac{13}{6}(3\pi+1), \quad a_3^{(2)} = a_3^{(1)} + \frac{13}{2}(3\pi+1).$$

Из определения $\Lambda_x(m)$ и асимптотического закона распределения простых чисел находим:

$$|r(x,t)| \leqslant \left|\sum_{p\leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t}+it}}\right| + \sum_{p^2\leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(p^2)}{p} + \sum_{r\geqslant 3}\sum_{p^r\leqslant x^3} \frac{\log p}{p^{r/2}} \leqslant \left|\sum_{p\leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t}+it}}\right| + 2\log x.$$

Замечая, наконец, что $a_1^{(2)}\log t + 2a_2^{(2)}\log x + a_3^{(2)} < 4.5\pi\log t$ при $x\leqslant t^\delta$, $t\geqslant e^{16/\delta}$, приходим к утверждению леммы.

Лемма 2.5. *Пусть k - целое число, $1\leqslant k\leqslant c\log X$, где c - достаточно малая абсолютная постоянная, $x = X^{1/(8k+3)}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_n \left|S(t_n+0) + \frac{1}{\pi}\sum_{m\leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t_n}}} \frac{\sin(t_n\log m)}{\log m}\right|^{2k} < \frac{100.4}{\varepsilon}\left(\frac{1440k}{\varepsilon}\right)^{2k} M.$$

Доказательство. Пользуясь леммой 2.4 и неравенством $\log t_N < \log N$, заключаем, что исходная сумма не превосходит величины

$$2^{2k-1}\big((a_1\log N)^{2k}\Sigma_1 + a_2^{2k}\Sigma_2\big),$$

где

$$\Sigma_2 = \sum_n \big(\sigma_{x,t_n} - \tfrac{1}{2}\big)^{2k}, \quad \Sigma_1 = \sum_n \big(\sigma_{x,t_n} - \tfrac{1}{2}\big)^{2k}\left|\sum_{p\leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t_n}+it_n}}\right|^{2k}.$$

Согласно лемме 2.3,

$$\Sigma_1 = \left(\frac{2}{\log x}\right)^{2k} M\left(1 + \frac{521\,\varepsilon^{-1}(2k)!}{(8k+3)^{2k-1}}\right) < \frac{94.8}{\varepsilon}\left(\frac{2}{\log x}\right)^{2k} M =$$
$$= \frac{94.8}{\varepsilon}\left(\frac{160k}{\varepsilon}\right)^{2k} \frac{\big(1+\frac{3}{8k}\big)^{2k}}{(\log N)^{2k}} M < \frac{94.8e^{3/4}}{\varepsilon}\left(\frac{160k}{\varepsilon\log N}\right)^{2k} M < \frac{200.7}{\varepsilon}\left(\frac{160k}{\varepsilon\log N}\right)^{2k} M.$$

Преобразуя далее сумму по $p\leqslant x^3$ и следуя при этом рассуждениям Сельберга из [38], получим:

$$\left|\sum_{p\leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t}+it}}\right| \leqslant \left|\sum_{p\leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{\sqrt{p}} p^{it}\right| + \left|\sum_{p\leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{\sqrt{p}}\big(1 - p^{\frac{1}{2}-\sigma_{x,t}}\big)p^{it}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\sum_{p\leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{\sqrt{p}}\, p^{it}\right| + \frac{x^{\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}}}{\log x}\int_0^{+\infty} x^{-v}\left|\sum_{p\leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(p)(\log p)(\log xp)}{p^{\frac{1}{2}+v+it}}\right| dv.$$

Далее, дважды применяя неравенство Гёльдера, находим:

$$\left|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t}+it}}\right|^{2k}\leqslant 2^{2k-1}\left(\left|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{\sqrt{p}}p^{it}\right|^{2k}+\right.$$
$$\left.+\frac{x^{2k\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)}}{(\log x)^{2k}}\left(\int_0^{+\infty}x^{-v}dv\right)^{2k-1}\int_0^{+\infty}x^{-v}\left|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)(\log p)(\log xp)}{p^{\frac{1}{2}+v+it}}\right|^{2k}dv\right).$$

Переходя к оценке суммы Σ_2, получим:

$$\Sigma_2<2^{2k-1}\left(\sum_n\left(\sigma_{x,t_n}-\tfrac{1}{2}\right)^{2k}\left|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{\sqrt{p}}\,p^{it_n}\right|^{2k}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(\log x)^{4k-1}}\int_0^{+\infty}x^{-v}\sum_n\left(\sigma_{x,t_n}-\tfrac{1}{2}\right)^{2k}x^{2k\left(\sigma_{x,t_n}-\frac{1}{2}\right)}\left|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)(\log p)(\log xp)}{p^{\frac{1}{2}+v+it_n}}\right|^{2k}dv\right).$$

Положим теперь

$$a_1(p)=\frac{\Lambda_x(p)}{\log x},\quad a_2(p)=\frac{\Lambda_x(p)(\log p)(\log xp)}{p^{v_0}(\log x)^3},$$

где v_0 - то значение $v\geqslant 0$, при котором сумма, стоящая в последнем неравенстве под знаком интеграла, достигает наибольшего значения. Тогда

$$\Sigma_2<\frac{1}{2}(2\log x)^{2k}\left(\Sigma_3+\Sigma_4\right),$$

где

$$\Sigma_3=\sum_n\left(\sigma_{x,t_n}-\tfrac{1}{2}\right)^{2k}\left|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{a_1(p)}{\sqrt{p}}\,p^{it_n}\right|^{2k},$$
$$\Sigma_4=\sum_n\left(\sigma_{x,t_n}-\tfrac{1}{2}\right)^{2k}x^{2k\left(\sigma_{x,t_n}-\frac{1}{2}\right)}\left|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{a_2(p)}{\sqrt{p}}\,p^{it_n}\right|^{2k}.$$

Применив к каждой из сумм Σ_3,Σ_4 неравенство Коши, будем иметь:

$$\Sigma_3\leqslant\left(\Sigma_5\,\Sigma_7\right)^{\frac{1}{2}},\quad \Sigma_4\leqslant\left(\Sigma_6\,\Sigma_8\right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\Sigma_5=\sum_n\left(\sigma_{x,t_n}-\tfrac{1}{2}\right)^{4k},\quad \Sigma_6=\sum_n\left(\sigma_{x,t_n}-\tfrac{1}{2}\right)^{4k}x^{2k\left(\sigma_{x,t_n}-\frac{1}{2}\right)},$$
$$\Sigma_{7,8}=\sum_n\left|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{a_j(p)}{\sqrt{p}}\,p^{it_n}\right|^{4k},\quad j=1,2.$$

Оценивая суммы Σ_5, Σ_6 с помощью леммы 2.3, находим:

$$\Sigma_5 < \left(\frac{2}{\log x}\right)^{4k} M\left(1 + \frac{521\,\varepsilon^{-1}(4k)!}{(8k+3)^{4k-1}}\right) < \frac{9.4M}{\varepsilon}\left(\frac{2}{\log x}\right)^{4k},$$
$$\Sigma_6 < \left(\frac{2}{\log x}\right)^{4k} M\left(e^{8k} + \frac{521\,\varepsilon^{-1}(4k)!}{(8k+3)^{4k-1}}\right) < \frac{M}{240\,\varepsilon}\left(\frac{2e^2}{\log x}\right)^{4k}.$$

Далее, полагая $p = x^\lambda$, будем иметь:

$$a_1(p) = \varphi_1(\lambda)\,\frac{\log p}{\log(x^3)}, \quad a_2(p) = \varphi_2(\lambda)\,\frac{\log p}{\log(x^3)}$$

где

$$\varphi_1(\lambda) = \begin{cases} 3, \text{ если } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \\ \frac{3}{2}(1 + 2\lambda - \lambda^2), \text{ если } 1 \leqslant \lambda \leqslant 2, \\ \frac{3}{2}(\lambda - 3)^2, \text{ если } 2 \leqslant \lambda \leqslant 3, \end{cases} \quad \varphi_2(\lambda) = \lambda(\lambda+1)\,\varphi_1(\lambda).$$

Несложно теперь проверить, что

$$\max_{0 \leqslant \lambda \leqslant 3} \varphi_1(\lambda) = \varphi_1(1) = 3, \quad \max_{0 \leqslant \lambda \leqslant 3} \varphi_2(\lambda) = \varphi_2(\lambda_0) = 3a,$$

где $a = 3.44608\,8218\ldots$, $\lambda_0 = 1.711668606\ldots$. Поэтому, применяя к суммам Σ_7, Σ_8 лемму 2.2, получим:

$$\Sigma_7 \leqslant 1.1\big(3^2 \cdot 2k\big)^{2k} M, \quad \Sigma_8 \leqslant 1.1\big(9a^2 \cdot 2k\big)^{2k} M.$$

Таким образом,

$$\Sigma_3 \leqslant \frac{3.3}{\sqrt{\varepsilon}}\,\frac{M}{(\log x)^{2k}}\,(72k)^k, \quad \Sigma_4 \leqslant \frac{0.07}{\sqrt{\varepsilon}}\,\frac{M}{(\log x)^{2k}}\,(72e^4a^2k)^k, \quad \Sigma_2 \leqslant \frac{M}{25\sqrt{\varepsilon}}(288e^4a^2k)^k.$$

Следовательно, исходная сумма не превосходит

$$\frac{M}{2}\left(\frac{200.7}{\varepsilon}\left(\frac{2a_1 \cdot 160k}{\varepsilon}\right)^{2k} + \frac{1}{25\sqrt{\varepsilon}}\left(a_2^2 \cdot 288e^4a^2k\right)^k\right) < \\ < \frac{100.4}{\varepsilon}\left(\frac{320a_1k}{\varepsilon}\right)^{2k} M = \frac{100.4}{\varepsilon}\left(\frac{1440k}{\varepsilon}\right)^{2k} M.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Если выполнены условия леммы* 2.5, *то имеет место неравенство:*

$$\sum_n \left| \sum_{m \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t_n}}}\,\frac{\sin(t_n \log m)}{\log m} - \sum_{p \leqslant x} \frac{\sin(t_n \log p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} < \frac{M}{8\,\varepsilon}\big(1152e^4k\big)^k. \tag{2.11}$$

Доказательство. Обозначим через $R(t)$ величину, которая получается из разности, стоящей в (2.11) под знаком модуля, заменой t_n на t. Тогда имеет место

тождество:

$$R(t)=\sum_{x<p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{\log p}\,\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}\;+\;\frac{1}{2}\sum_{p^2\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p^2)}{\log p}\,\frac{\sin(2t\log p)}{p}\;-$$
$$-\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{\log p}\left(1-p^{\frac{1}{2}-\sigma_{x,t}}\right)\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}-\frac{1}{2}\sum_{p^2\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p^2)}{\log p}\left(1-p^{1-2\sigma_{x,t}}\right)\frac{\sin(2t\log p)}{p}+$$
$$+\sum_{r\geqslant 3}\sum_{p^r\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p^r)}{p^{r\sigma_{x,t}}}\,\frac{\sin(rt\log p)}{r\log p}.$$

Из неравенств $0\leqslant 1-p^{1-2\sigma_{x,t}}\leqslant 2\big(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\big)\log p$ следует, что вклад в $R(t)$ двух последних сумм не превосходит по абсолютной величине

$$\frac{1}{2}\sum_{p^2\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p^2)}{\log p}\,2\big(\sigma_{x,t}-\tfrac{1}{2}\big)\frac{\log p}{p}+\sum_{p}\sum_{r\geqslant 3}\frac{1}{rp^{r/2}}\leqslant\big(\sigma_{x,t}-\tfrac{1}{2}\big)\sum_{p^2\leqslant x^3}\frac{\log p}{p}+\frac{3}{5}<$$
$$<2\big(\sigma_{x,t}-\tfrac{1}{2}\big)\log x.$$

Таким образом, $|R(t)|\leqslant\sum\limits_{j=1}^{4}R_j(t)$, где

$$R_1(t)=\left|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{a_1(p)}{\sqrt{p}}\,p^{it}\right|,\quad R_2(t)=\frac{1}{2}\left|\sum_{p\leqslant x^{3/2}}\frac{a_2(p)}{p}\,p^{2it}\right|,$$
$$R_3(t)=\left|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{\log p}\left(1-p^{\frac{1}{2}-\sigma_{x,t}}\right)\frac{p^{it}}{\sqrt{p}}\right|,\quad R_4(t)=2\big(\sigma_{x,t}-\tfrac{1}{2}\big)\log x,$$

где

$$a_1(p)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad p\leqslant x,\\ \dfrac{\Lambda_x(p)}{\log p}, & \text{если}\quad x<p\leqslant x^3,\end{cases}\qquad a_2(p)=\frac{\Lambda_x(p^2)}{\log p}.$$

Согласно неравенству Гёльдера, сумма из условия леммы не превзойдёт

$$4^{2k-1}\big(\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4\big),\quad \Sigma_j=\sum_n R_j^{2k}(t_n).$$

Оценим каждую из сумм Σ_j. Прежде всего, замечая, что

$$|a_1(p)|\leqslant\frac{3\log p}{\log(x^3)},\quad |a_2(p)|\leqslant 1,$$

и пользуясь леммой 2.2, найдём:

$$\Sigma_1<1.1M(3^2k)^k,\quad \Sigma_2<1.1M\big(0.5k\big)^k.$$

Далее, пользуясь оценкой

$$|R_3(t)|\leqslant\frac{x^{\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}}}{\log x}\int_0^\infty x^{-v}\left|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)(\log xp)}{p^{\frac{1}{2}+v}}\,p^{it}\right|dv$$

из работы Сельберга [38] наряду с неравенством Гёльдера, находим:

$$\Sigma_3 \leqslant \frac{1}{(\log x)^{4k-1}} \int_0^{+\infty} x^{-v} \sum_n x^{2k\left(\sigma_{x,t_n}-\frac{1}{2}\right)} \left| \sum_{p \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(p)(\log xp)}{p^{\frac{1}{2}+v}}\, p^{it_n} \right|^{2k} dv \leqslant$$

$$\leqslant \sum_n x^{2k\left(\sigma_{x,t_n}-\frac{1}{2}\right)} \left| \sum_{p \leqslant x^3} \frac{a_3(p)}{\sqrt{p}}\, p^{it_n} \right|^{2k},$$

где

$$a_3(p) = \frac{\Lambda_x(p)(\log xp)}{p^{v_0}(\log x)^2},$$

а v_0 - то значение $v \geqslant 0$, при котором сумма по n под знаком интеграла принимает наибольшее значение. Применив неравенство Коши, найдём:

$$\Sigma_3 \leqslant \left(\Sigma_5\, \Sigma_6\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \Sigma_5 = \sum_n x^{4k\left(\sigma_{x,t_n}-\frac{1}{2}\right)}, \quad \Sigma_6 = \sum_n \left| \sum_{p \leqslant x^3} \frac{a_3(p)}{\sqrt{p}}\, p^{it_n} \right|^{4k}.$$

В силу леммы 2.3 имеем:

$$\Sigma_5 < M\left(e^{8k} + 52.1\, \frac{\log N}{\log x}\right) < \frac{2M}{\varepsilon} e^{8k}.$$

Далее, замечая, что

$$|a_3(p)| \leqslant \frac{\Lambda_x(p) \log xp}{(\log x)^2} \leqslant \frac{6 \log p}{\log\,(x^3)},$$

с помощью леммы 2.2 получаем оценку $\Sigma_6 < 1.1M(6^2 \cdot 2k)^{2k}$. Следовательно,

$$\Sigma_3 < \frac{1.5}{\sqrt{\varepsilon}}\, (72e^4 k)^k M.$$

Наконец, применив лемму 2.3 к оценке Σ_4, найдём:

$$\Sigma_4 < (2 \log x)^{2k} \left(\frac{2}{\log x}\right)^{2k} M\left(1 + 52.1(2k)! \frac{\log N}{\log x} \left(\frac{\log x}{\log X}\right)^{2k}\right) <$$

$$< 4^{2k} M\left(1 + \frac{521\, \varepsilon^{-1}(2k)!}{(8k+3)^{2k-1}}\right) < \frac{94.8M}{\varepsilon}\, 16^k.$$

Возвращаясь к оценке исходной суммы, будем иметь:

$$4^{2k-1}\left(\Sigma_1 + \ldots + \Sigma_4\right) < 4^{2k-1} M\left(1.1(9k)^k + 1.1\left(0.5k\right)^k + \frac{1.5}{\sqrt{\varepsilon}}(72e^4 k)^k + 16^k \cdot \frac{94.8}{\varepsilon}\right) <$$

$$< \frac{M}{8\,\varepsilon}\left(1152e^4 k\right)^k.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Если выполнены условия леммы* 2.5, *то имеет место неравенство:*

$$\sum_n \left| S(t_n + 0) + \frac{1}{\pi} \sum_{p \leqslant x} \frac{\sin\,(t_n \log p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} < \frac{c_0}{57}\, (c_0 k)^{2k} M,$$

где $c_0 = 2880\,\varepsilon^{-1}$.

Доказательство. Воспользовавшись оценками лемм 2.4 и 2.5 наряду с неравенством Гёльдера, заключаем, что исходная сумма не превосходит

$$\sum_n \Bigg| S(t_n+0) + \frac{1}{\pi}\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t_n}}}\,\frac{\sin(t_n\log m)}{\log m} - \\ - \frac{1}{\pi}\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin(t_n\log p)}{\sqrt{p}} - \sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t_n}}}\,\frac{\sin(t_n\log m)}{\log m}\right)\Bigg|^{2k} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2k-1}\left(\sum_n\left|S(t_n+0) + \frac{1}{\pi}\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t_n}}}\,\frac{\sin(t_n\log m)}{\log m}\right|^{2k} + \right.$$

$$\left. + \pi^{-2k}\sum_n\left|\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin(t_n\log p)}{\sqrt{p}} - \sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t_n}}}\,\frac{\sin(t_n\log m)}{\log m}\right|^{2k}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2k-1}M\left(\frac{100.4}{\varepsilon}\left(\frac{1440k}{\varepsilon}\right)^{2k} + \frac{1}{8\,\varepsilon}\left(\frac{1152e^4k}{\pi^2}\right)^{k}\right) < \frac{50.3}{\varepsilon}\left(\frac{2880k}{\varepsilon}\right)^{2k}M.$$

Лемма доказана.

§2. Моменты величин $\Delta(n)$ с целым показателем

В этом параграфе вычисляется чётный момент и оценивается сверху модуль нечётного момента величин $\Delta(n)$. Особенностью приводимых ниже рассуждений является то, что отказ от использования неравенства Гёльдера при работе с суммой

$$\sum_n\big|R(t_n+0)\big|\big(|\Delta(n)| + \big|R(t_n+0)\big|\big)^{2k-1}$$

приводит к более точной (по параметру k) её оценке.

Лемма 2.8. *При любом n имеет место равенство:* $\Delta(n) = S(t_n+0)$.

Доказательство. Согласно формуле Римана-Мангольдта,

$$N(t) = \frac{1}{\pi}\,\vartheta(t) + 1 + S(t).$$

Беря $t = t_n + h$ и предполагая, что $\gamma_m \leqslant t_n < \gamma_{m+1}$, при $h \to +0$ получим:

$$m = N(t_n+0) = \frac{1}{\pi}\,\vartheta(t_n) + 1 + S(t_n+0) = n + S(t_n+0),$$

откуда $S(t_n+0) = m - n = \Delta(n)$. Лемма доказана.

Лемма 2.9. *При любом $k \geqslant 1$ имеет место равенство*

$$\mathfrak{C}_k \;=\; \sum_{\substack{p_1\ldots p_k = q_1\ldots q_k\\ p_1,\ldots,q_k\leqslant x}} \big(p_1\ldots q_k\big)^{-1} \;=\; k!\Big(\mathfrak{S}_1^k \;-\; \frac{\theta}{4}\,k^2\mathfrak{S}_1^{k-2}\Big),$$

где $\theta = 0$ *при* $k = 1$ *и* $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ *при* $k \geqslant 2$.

Доказательство. Если $k = 1$, то утверждение очевидно. При $k \geqslant 2$ искомое соотношение будет следовать из неравенств

$$k!\Big(\mathfrak{S}_1^k - \frac{k^2}{4}\mathfrak{S}_1^{k-2}\Big) \leqslant \mathfrak{C}_k \leqslant k!\mathfrak{S}_1^k.$$

Верхняя оценка $\mathfrak{C}_k$ получается из второго утверждения леммы 1.17 и равенства леммы 1.15. Чтобы доказать нижнюю оценку, заметим, что

$$\mathfrak{C}_k \geqslant \sum_{\substack{p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_k \\ \text{все числа } p_1,\dots,q_k \leqslant x \text{ --различны}}} \big(p_1 \dots q_k\big)^{-1} = k! \sum_{p_1,\dots,p_k \leqslant x \text{ --различны}} \big(p_1 \dots p_k\big)^{-1} =$$

$$= k!\Big\{ \sum_{p_1,\dots,p_k \leqslant x} \big(p_1 \dots q_k\big)^{-1} - \sum_{p_1,\dots,p_k \leqslant x}{}' \big(p_1 \dots p_k\big)^{-1} \Big\},$$

где штрих означает суммирование по всем наборам $(p_1, \dots, p_k)$, которые содержат по крайней мере два одинаковых числа. Зафиксируем теперь произвольный набор $(p_1, \dots, p_{k-2})$ и простое число $p \leqslant x$. Количество наборов длины k, которые получаются из $(p_1, \dots, p_{k-2})$ двукратным приписыванием числа p, равно $\binom{k}{2} < \frac{k^2}{2}$. Следовательно,

$$\sum_{p_1,\dots,p_k \leqslant x}{}' \big(p_1 \dots p_k\big)^{-1} < \frac{k^2}{2} \sum_{p_1,\dots,p_{k-2} \leqslant x} \big(p_1 \dots p_{k-2}\big)^{-1} \sum_{p \leqslant x} p^{-2} <$$

$$< \frac{k^2}{4}\Big(\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \Big)^{k-2} = \frac{k^2}{4}\,\mathfrak{S}_1^{k-2}.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{C}_k \geqslant k!\Big(\mathfrak{S}_1^k - \frac{k^2}{4}\,\mathfrak{S}_1^{k-2} \Big).$$

Лемма доказана.

Для упрощения записи некоторых формул станем использовать обозначение: $L = \log\log N$.

Наряду с разложением теоремы 2.1 для чётного момента $W(t_n)$ нам потребуется упрощённый вариант этой формулы, более удобный для верхней оценки.

Лемма 2.10. *Пусть* k *- целое число,* $1 \leqslant k \leqslant L/\log L$, $x = X^{1/(8k+3)}$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sum_n W^{2k}(t_n) = \frac{(2k)!}{k!}\,\frac{ML^k}{2^{2k}}\left(1 - 1.9\theta\,\frac{k}{L}\,\log\frac{k}{\varepsilon}\right),$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Доказательство. В силу леммы 1.4, исходная сумма равна

$$\binom{2k}{k}\frac{M}{2^{2k}}\,\mathfrak{C}_k + x^{2k}\theta\log N.$$

Согласно предыдущей лемме,

$$\mathfrak{C}_k \,=\, k!\Big(\,\mathfrak{S}_1^k \,-\, \frac{k^2}{4}\,\theta\mathfrak{S}_1^{k-2}\,\Big).$$

Воспользуемся теперь формулой (2) леммы 3.П; получим:

$$\mathfrak{S}_1 \,=\, \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} \,=\, L \,+\, c \,-\, \log\frac{10(8k+3)}{\varepsilon} \,+\, \frac{\theta_1}{(\log x)^2},$$

где $c = 0.261497\ldots$, $-0.5\leqslant\theta_1\leqslant 1$. Поскольку $0<\varepsilon<10^{-3}$, несложно проверить, что

$$11.28 \,<\, \log\frac{80k}{\varepsilon} \,<\, \log\frac{10(8k+3)}{\varepsilon} \,<\, \log\frac{110k}{\varepsilon} \,<\, 1.7\log\frac{k}{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{S}_1 \,<\, L \,+\, 0.27 \,-\, 11.28 \,+\, \frac{1}{(\log x)^2} \,<\, L,$$
$$\mathfrak{S}_1 \,>\, L \,+\, 0.26 \,-\, \log\frac{110k}{\varepsilon} \,-\, \frac{0.5}{(\log x)^2} \,>\, L \,-\, 1.7\log\frac{k}{\varepsilon},$$

откуда

$$\mathfrak{S}_1 \,=\, L \,-\, 1.7\theta_2\log\frac{k}{\varepsilon}$$

(здесь и далее $0\leqslant\theta_j\leqslant 1$). Далее, в силу формулы конечных приращений имеем:

$$\mathfrak{S}_1^k \,=\, L^k \,-\, 1.7\theta_3 k\left(\log\frac{k}{\varepsilon}\right)L^{k-1},$$

так что

$$\mathfrak{S}_1^k \,-\, \theta_4\,\frac{k^2}{4}\mathfrak{S}_1^{k-2} \,=\, L^k\left\{1 \,-\, \theta_5\left(\,\frac{1.7k}{L}\log\frac{k}{\varepsilon} \,+\, \frac{k^2}{4L^2}\right)\right\} \,=\, L^k\left\{1 \,-\, \frac{1.7\theta_6 k}{L}\log\frac{k}{\varepsilon}\right\}.$$

Из последнего равенства теперь легко следует утверждение леммы.

Следствие. *При любом целом k, $1\leqslant k\leqslant L/\log L$ имеет место оценка*:

$$\sum_n W^{2k}(t_n) \,\leqslant\, \frac{(2k)!}{k!}\,\frac{ML^k}{2^{2k}}.$$

Теорема 2.1. *Пусть k - целое число, $1\leqslant k\leqslant c_1\sqrt[3]{\log\log N}$, где $c_1 = \frac{1}{c_0}\left(\frac{7\pi^2}{4}\right)^{1/3}$. Тогда имеет место формула*

$$\sum_n \Delta^{2k}(n) = \frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M}{(2\pi)^{2k}}\,(\log\log N)^k\left(1+\frac{2.4\theta(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\log\log N}}\right) \tag{2.12}$$

Доказательство. Положим

$$x = X^{\frac{1}{8k+3}}, \quad W(t) \,=\, -\,\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}, \quad U(t) \,=\, -\sum_{p\leqslant x}\frac{p^{it}}{\sqrt{p}},$$

так что

$$W(t) = \frac{1}{2\pi i}\big(U(t) - \overline{U}(t)\big), \quad R(t) = S(t) + R(t).$$

В силу леммы 2.8 сумма из условия может быть записана в виде

$$\sum_n \big(W(t_n) - R(t_n + 0)\big)^{2k} = \sum_{\nu=0}^{2k} (-1)^\nu \binom{2k}{\nu} v_\nu, \quad v_\nu = \sum_n W^{2k-\nu}(t_n) R^\nu(t_n + 0).$$

Согласно лемме 2.10,

$$v_0 \,=\, \sum_n W^{2k}(t_n) \,=\, \mathcal{L}_k \left(1 \,-\, 1.9\theta_1 \,\frac{k}{L} \log \frac{k}{\varepsilon}\right),$$

где для краткости положено

$$\mathcal{L}_k \,=\, \frac{(2k)!}{k!} \frac{ML^k}{(2\pi)^{2k}}.$$

Воспользовавшись оценкой $v_0 < \mathcal{L}_k$ из следствия леммы 2.10 наряду с неравенством Гёльдера, при любом ν, $1 \leqslant \nu \leqslant 2k$ заключаем:

$$|v_\nu| \leqslant \left(\sum_n W^{2k}(t_n)\right)^{1-\frac{\nu}{2k}} \left(\sum_n R^{2k}(t_n + 0)\right)^{\frac{\nu}{2k}} < \mathcal{L}_k^{\,1-\frac{\nu}{2k}} \left(\frac{c_0}{56}(c_0 k)^{2k} M\right)^{\frac{\nu}{2k}} = \mathcal{L}_k \delta_\nu,$$

где

$$\delta_\nu = \left\{\frac{(2\pi)^{2k} k!}{(2k)!} \,\frac{c_0}{18}(c_0 k)^{2k}\right\}^{\frac{\nu}{2k}} L^{-\frac{\nu}{2}} < \left\{(2\pi)^{2k} \,\frac{2}{e}\Big(\frac{e}{4k}\Big)^k \,\frac{c_0}{56}(c_0 k)^{2k}\right\}^{\frac{\nu}{2k}} L^{-\frac{\nu}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\Big(\frac{c_0}{28e}\Big)^{\frac{1}{k}} \frac{\pi^2 e c_0^2 k}{L}\right\}^{\frac{\nu}{2}} \leqslant \left\{\frac{\pi^2}{28} \frac{c_0^3 k}{L}\right\}^{\frac{\nu}{2}}.$$

Следовательно,

$$\binom{2k}{\nu} \delta_\nu \,\leqslant (2k)^\nu \delta_\nu \,\leqslant \left\{\frac{\pi^2}{7} \frac{(c_0 k)^3}{L}\right\}^{\frac{\nu}{2}}.$$

Замечая, что выражение в фигурных скобках не превосходит $\frac{1}{4}$, находим:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{2k} (-1)^\nu \binom{2k}{\nu} v_\nu\right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{2k} \mathcal{L}_k \binom{2k}{\nu} \delta_\nu < 2\mathcal{L}_k \left\{\frac{4\pi^2}{7} \,\frac{(c_0 k)^3}{L}\right\}^{\frac{1}{2}} = \mathcal{L}_k \,\frac{2\pi}{\sqrt{7}} \,\frac{(c_0 k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}},$$

$$\sum_n \Delta^{2k}(n) = v_0 + \theta \,\mathcal{L}_k \frac{2\pi}{\sqrt{7}} \,\frac{(c_0 k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}.$$

Заменяя v_0 выражением (2.12), получим:

$$\sum_n \Delta^{2k}(n) = \mathcal{L}_k\big(1 + \theta\delta\big),$$

где

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{7}}\,\frac{(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}} + \frac{1.9k}{L}\log\frac{k}{\varepsilon} < \frac{(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{7}} + \frac{1.9\cdot 2880^{-1.5}\,\varepsilon}{\sqrt{kL}}\,\frac{\log\left(k/\varepsilon\right)}{\sqrt{k/\varepsilon}}\right) <$$

$$< \frac{(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{7}} + \frac{10^{-8}}{\sqrt{L}}\right) < 2.4\,\frac{(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть k - целое число, $1 \leqslant k \leqslant c_1\sqrt[3]{\log\log N}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left|\sum_n \Delta^{2k-1}(n)\right| < \frac{c_0^{\frac{3}{2}}}{3}\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{M}{(2\pi)^{2k-2}}(\log\log N)^{k-1}.$$

Доказательство. Пользуясь обозначениями теоремы 2.1, находим:

$$\left|\sum_n \Delta^{2k-1}(n)\right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{2k-1}\binom{2k-1}{\nu}|w_\nu|, \quad w_\nu = \sum_n W^{2k-\nu-1}(t_n)R^\nu(t_n+0).$$

В силу леммы 1.3 имеем:

$$w_0 = \sum_n W^{2k-1}(t_n) = \frac{1}{(2\pi i)^{2k-1}}\sum_n\big(\,\overline{U}(t_n) - U(t_n)\big)^{2k-1} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^{2k-1}}\sum_{\nu=0}^{2k-1}(-1)^{\nu-1}\binom{2k-1}{\nu}\sum_n \overline{U}^{\,\nu}(t_n)U^{\,2k-\nu-1}(t_n) =$$

$$= \frac{\theta}{(2\pi)^{2k-1}}\sum_{\nu=0}^{2k-1}\binom{2k-1}{\nu}\sqrt[4]{X} = \frac{\theta_1\sqrt[4]{X}}{\pi^{2k-1}}.$$

Далее, в случае $1 \leqslant \nu \leqslant 2k-1$, дважды применив неравенство Гёльдера наряду с оценкой следствия леммы 2.10 и леммой 2.7, получим:

$$|w_\nu| \leqslant \sum_n |W(t_n)|^{2k-\nu-1}|R(t_n+0)|^\nu \leqslant v_0^{\,1-\frac{\nu+1}{2k}}\left(\sum_n |R(t_n+0)|^{\frac{2k\nu}{\nu+1}}\right)^{\frac{\nu+1}{2k}} \leqslant$$

$$\leqslant v_0^{\,1-\frac{\nu+1}{2k}}\left(v_{2k}^{\frac{\nu}{\nu+1}}M^{\frac{1}{\nu+1}}\right)^{\frac{\nu+1}{2k}} \leqslant \mathcal{L}_k^{\,1-\frac{\nu+1}{2k}}\left(\frac{c_0}{18}(c_0k)^{2k}M\right)^{\frac{\nu}{2k}}M^{\frac{1}{2k}} = \mathcal{L}_k\,\delta_\nu,$$

где

$$\delta_\nu = \mathcal{L}_k^{\,-\frac{\nu+1}{2k}}\left(\frac{c_0}{56}(c_0k)^{2k}M\right)^{\frac{\nu}{2k}}M^{\frac{1}{2k}} = \left\{\frac{(2\pi)^{2k}k!}{(2k)!}\right\}^{\frac{\nu+1}{2k}}\left(\frac{c_0}{56}(c_0k)^{2k}\right)^{\frac{\nu}{2k}}L^{-\frac{\nu+1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{c_0}{28e}\left(\frac{e}{4k}\cdot 4\pi^2c_0^2k^2\right)^k\right\}^{\frac{\nu}{2k}}\left\{\frac{2}{e}\left(\frac{e}{4k}\cdot 4\pi^2\right)^k\right\}^{\frac{1}{2k}}L^{-\frac{\nu+1}{2}} =$$

$$= \left\{\left(\frac{c_0}{28e}\right)^{\frac{1}{k}}\cdot\frac{\pi^2ec_0^2k}{L}\right\}^{\frac{\nu}{2}}\left\{\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{1}{k}}\frac{\pi^2e}{kL}\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{c_0}{28e}\,\frac{\pi^2ec_0^2k}{L}\right\}^{\frac{\nu}{2}}\left\{\frac{\pi^2e}{kL}\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi\sqrt{e}}{\sqrt{kL}}\left\{\frac{\pi^2}{28}\,\frac{c_0^3k}{L}\right\}^{\frac{\nu}{2}}.$$

Таким образом,

$$\binom{2k-1}{\nu}\delta_\nu < (2k)^\nu\delta_\nu \leqslant \frac{\pi\sqrt{e}}{\sqrt{kL}}\left\{\frac{\pi^2}{7}\,\frac{(c_0k)^3}{L}\right\}^{\frac{\nu}{2}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{2k-1}\binom{2k-1}{\nu}\delta_\nu < \frac{2\pi\sqrt{e}}{\sqrt{kL}}\left\{\frac{\pi^2}{7}\,\frac{(c_0k)^3}{L}\right\}^{\frac{1}{2}} = 2\pi^2\sqrt{\frac{e}{7}}\,\frac{c_0^{\frac{3}{2}}k}{L},$$

откуда

$$\sum_{\nu=0}^{2k-1}\binom{2k-1}{\nu}|w_\nu| < \frac{\sqrt[4]{X}}{\pi^{2k-1}} + 2\mathcal{L}_k\,\pi^2\sqrt{\frac{e}{7}}\,\frac{c_0^{\frac{3}{2}}k}{L} =$$

$$= \frac{\sqrt{X}}{\pi^{2k-1}} + c_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{e}{28}}\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}} < \frac{c_0^{\frac{3}{2}}}{3}\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}.$$

Теорема доказана.

§3. Моменты величин $\boldsymbol{\Delta(n)}$ с дробным показателем

В настоящем параграфе мы вычисляем «дробный» момент величин $|\Delta(n)|$, предварительно приблизив его дробным моментом величин $|W_x(t_n)|$. Чтобы избежать применения неравенства Гёльдера при оценке точности такого приближения, мы предваряем теорему 2.3 доказательством леммы 2.11, дающей оценку разности $|x+y|^a - |x|^a$ при нецелом a.

Лемма 2.11. *Пусть $a > 0$. Тогда для любых вещественных чисел x и y разность $|x+y|^a - |x|^a$ при $0 < a \leqslant 1$ не превосходит по абсолютной величине $|y|^a$, а при $a > 1$ - суммы $t_1 + 3t_2 + 9t_3$, где*

$$t_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 0, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}|x|^{a-\nu}|y|^\nu, & \text{если } k \geqslant 1, \end{cases}$$

$$t_2 = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}|x|^{a-\nu-1}|y|^{\nu+1}, \quad t_3 = \sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}|x|^{a-\nu-b}|y|^{\nu+b},$$

a k и b - произвольные числа, подчинённые следующим условиям: $a = k + b$, $k \geqslant 0$ - целое, $1 \leqslant b \leqslant 2$.

Доказательство. В случае $0 < a \leqslant 1$ утверждение очевидно. Пусть $a = k+b > 1$. Заметим, что при любом λ с условием $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2}$ справедливо равенство:

$$(1+\lambda)^b = 1 + 3\theta_1|\lambda|.$$

Следовательно, при $1 \leqslant |y| \leqslant \frac{1}{2}|x|$, $x \neq 0$, имеем:

$$|x+y|^b = |x|^b\left|1 + \frac{y}{x}\right|^b = |x|^b\left(1 + 3\theta_2\left|\frac{y}{x}\right|\right) = |x|^b + 3\theta_2|x|^{b-1}|y|. \tag{2.13}$$

Если же $0 \leqslant \frac{1}{2}|x| < y$, то

$$|x+y|^b \;=\; |x|^b \;+\; \bigl(|x+y|^b \;-\; |x|^b\bigr) \;=\; |x|^b \;+\; \theta_3(3|y|)^b = |x|^b \;+\; 9\theta_4|y|^b. \tag{2.14}$$

Объединяя (2.13) и (2.14), получим:

$$|x+y|^b \;=\; |x|^b \;+\; \theta_5\bigl(3|x|^{b-1}|y| \;+\; 9|y|^b\bigr). \tag{2.15}$$

Далее,

$$|x+y|^a \;=\; \bigl|(x+y)^k\bigr| \cdot |x+y|^b \;=\; \left|\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}x^{k-\nu}y^{\nu}\right| \cdot |x+y|^b \;=$$

$$=\; \left(|x|^k \;+\; \theta_6\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}|x|^{a-b-\nu}|y|^{\nu}\right)\cdot |x+y|^b.$$

Воспользовавшись (2.15), окончательно находим:

$$|x+y|^a \;=\; \left(|x|^{a-b} \;+\; \theta_6\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}|x|^{a-b-\nu}|y|^{\nu}\right)\cdot\bigl(|x|^b \;+\; \theta_5\bigl(3|x|^{b-1}|y| \;+\; 9|y|^b\bigr)\bigr) \;=$$

$$=\; |x|^a \;+\; \theta_6\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}|x|^{a-\nu}|y|^{\nu} \;+\; \theta_7\bigl(|x|^b \;+\; 3|x|^{b-1}|y| \;+\; 9|y|^b\bigr)\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}|x|^{a-b-\nu}|y|^{\nu}.$$

Из последнего соотношения и следует утверждение леммы.

Теорема 2.3. *Пусть a - произвольное вещественное число с условием $0 < a \leqslant c_2\sqrt[3]{\log\log N}$, $c_2 = (11^{2/3}c_0)^{-1}$, отличное от чётного натурального числа. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_n |\Delta(n)|^a \;=\; \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\,\Gamma\!\left(\frac{a+1}{2}\right)(\log\log N)^{\frac{a}{2}}\,\bigl(1 \;+\; \theta r(a)\bigr),$$

где[2)]

$$r(a) \;=\; \begin{cases} 14\left(\dfrac{\log\log\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{a}{2}}, & \text{если } \; 0 < a \leqslant 1; \\ \dfrac{781a}{\sqrt{\log\log N}}\Bigl(\sqrt{\log\log\log N} \;+\; 2.2c_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{a}\Bigr), & \text{если } \; a > 1. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим сперва случай $0 < a \leqslant 1$. Полагая

$$y = X^{\frac{1}{11}}, \quad W(t) \;=\; -\,\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant y}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}, \quad R(t) \;=\; S(t) \;-\; W(t), \tag{2.16}$$

[2)] В случае $a = 1$ более точная оценка остаточного члена была получена в 2011 г. Р.Н. Бояриновым по методу А. Сельберга и К.-М. Тсанга (см. теорему 6 из работы: Р.Н. Бояринов, "О распределении значений дзета-функции Римана", *Доклады РАН*, **438**:1(2011), 14-16). Дальнейшее уточнение оценок величины $r(a)$ при $0 < a < 1$ может быть получено с использованием результатов работы [37].

из лемм 2.8 и 2.11 получим:

$$|\Delta(n)|^a \,=\, \big|W(t_n) \,-\, R(t_n+0)\big|^a \,=\, |W(t_n)|^a \,+\, \theta_1|R(t_n+0)|^a,$$

откуда

$$\sum_n |\Delta(n)|^a \,=\, W_a \,+\, \theta_2 R_a,$$

где

$$W_a \,=\, \sum_n |W(t_n)|^a, \quad R_a \,=\, \sum_n |R(t_n+0)|^a.$$

В силу неравенства Гёльдера и леммы 2.7 имеем:

$$R_a \leqslant M^{1-\frac{a}{2}}\, R_2^{\frac{a}{2}} \leqslant M^{1-\frac{a}{2}} \left\{ \frac{c_0^3}{57}\, M \right\}^{\frac{a}{2}} \,<\, c_0^{\frac{3a}{2}}\, M.$$

Пусть, далее,

$$x \,=\, \exp\left(\frac{\log N}{L^3}\right), \quad U(t) \,=\, \frac{1}{\pi} \sum_{x<p\leqslant y} \frac{\sin\left(t\log p\right)}{\sqrt{p}}, \quad V(t) \,=\, \frac{1}{\pi} \sum_{p\leqslant x} \frac{\sin\left(t\log p\right)}{\sqrt{p}}. \quad (2.17)$$

Тогда $W_a = V_a + \theta_3 U_a$, где

$$V_a \,=\, \sum_n |V(t_n)|^a, \quad U_a \,=\, \sum_n |U(t_n)|^a.$$

Вновь применяя неравенство Гёльдера, найдём, что

$$U_a \leqslant M^{1-\frac{a}{2}} U_2^{\frac{a}{2}}.$$

Воспользовавшись леммой 3.П наряду с оценкой леммы 1.2, приходим к следующей цепочке неравенств:

$$U_2 \,=\, \frac{1}{\pi^2} \sum_n \left| \operatorname{Im} \sum_{x<p\leqslant y} \frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}} \right|^2 \leqslant \frac{1}{\pi^2} \sum_n \left| \sum_{x<p\leqslant y} \frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}} \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left(M \sum_{x<p\leqslant y} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p,q\leqslant x \\ p\neq q}} \frac{1}{\sqrt{pq}} \sum_n \left(\frac{p}{q}\right)^{it_n} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^2} \left(M \left(\log\log y \,-\, \log\log x \,+\, \frac{1.5}{(\log x)^2} \right) + (\log N) \sum_{p,q\leqslant x} \frac{1}{\sqrt{pq}} \sqrt{pq} \right) \,<\, \frac{3M}{\pi^2}\, \log L.$$

Следовательно,

$$U_a \,<\, \frac{M}{\pi^a} (3\log L)^{\frac{a}{2}}.$$

Из теоремы 1.2 для суммы V_a получаем разложение

$$V_a \,=\, \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \mathfrak{S}_1^{\frac{a}{2}} \big(1 \,+\, r_1(a)\big),$$

$$r_1(a) \,=\, \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\, \frac{\Gamma\Big(n-\dfrac{a}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{a}{2}\Big)} \,+\, 10.67\theta \left(5\pi e \sqrt{\frac{\log x}{\log N}} \right)^a.$$

Положив $m = 1$ в лемме 1.22, заключаем, что сумма по n не превосходит по модулю величины

$$0.32\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big)g(2) \,=\, 0.16\sqrt{\pi}\Big(\frac{\log\log 2+1}{\mathfrak{S}_1}\Big)^2 \,<\, \frac{1}{8\mathfrak{S}_1^2},$$

откуда

$$|r_1(a)| \,<\, \frac{1}{8\mathfrak{S}_1^2} \,+\, 10.67\Big(\frac{5\pi e}{L^{3/2}}\Big)^a \,<\, \frac{10.8}{L^a}.$$

Переходя к W_a, будем иметь:

$$W_a \,=\, \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\,\Gamma\Big(\frac{a+1}{2}\Big)\,\mathfrak{S}_1^{\frac{a}{2}}\big(1 \,+\, r_2(a)\big),$$

где

$$|r_2(a)| \leqslant \frac{10.8}{L^a} \,+\, \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\Big(\dfrac{a+1}{2}\Big)}\,\Big(\frac{\log L}{\mathfrak{S}_1}\Big)^{\frac{a}{2}} \,<\, 12\Big(\frac{\log L}{\mathfrak{S}_1}\Big)^{\frac{a}{2}}.$$

Наконец, возвращаясь к исходной сумме, получаем равенство

$$\sum_n |\Delta(n)|^a \,=\, \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\,\Gamma\Big(\frac{a+1}{2}\Big)L^{\frac{a}{2}}\big(1 \,+\, r(a)\big),$$

в котором

$$|r(a)| \,<\, \Big(\frac{\mathfrak{S}_1}{L}\Big)^{\frac{a}{2}}\left\{12\Big(\frac{\log L}{\mathfrak{S}_1}\Big)^{\frac{a}{2}} \,+\, \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\Big(\dfrac{a+1}{2}\Big)}\Big(\frac{\pi c_0^{3/2}}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\Big)^a\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{12+\sqrt{\pi}}{L^a}\,\big((\log L)^{\frac{a}{2}} \,+\, (\pi c_0^{3/2})^a\big) \,<\, 14\Big(\frac{\log L}{L}\Big)^{\frac{a}{2}}.$$

Пусть теперь $a > 1$. Представим a суммою $k + b$, в которой $k \geqslant 0$ - целое число, причём $1 \leqslant b < 2$ при $k = 2m$ и $1 < b < 2$ при $k = 2m - 1$. Положим

$$y \,=\, X^{\frac{1}{\mu}}, \quad \mu \,=\, 8(m+1)^2+3,$$

и определим $W(t)$ и $R(t)$ равенствами (2.17). Применив к исходной сумме лемму 2.11, получим:

$$\sum_n |\Delta(n)|^a \,=\, \sum_n \big|W(t_n) \,+\, R(t_n+0)\big|^a \,=\, W_a \,+\, \theta(u+3v+9w),$$

где

$$u \,=\, \sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}u_\nu, \quad v \,=\, \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}v_\nu, \quad w \,=\, \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}w_\nu, \tag{2.18}$$

а каждая из сумм u_ν, v_ν, w_ν имеет вид

$$t_{\nu,\delta} \,=\, \sum_n |W(t_n)|^{a-\nu-\delta}\,|R(t_n+0)|^{\nu+\delta},$$

где δ принимает, соответственно, значения $0, 1$ и b.

Из определения чисел m и y следует, что

$$\frac{\log N}{\log y} \,=\, \frac{10\mu}{\varepsilon} \,>\, \frac{10}{\varepsilon}\,8\Big(\frac{a}{2}\Big)^2 \,=\, \frac{20a^2}{\varepsilon},$$

откуда

$$a \,<\, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\sqrt{\frac{\log N}{\log y}} \,<\, \frac{1}{3e}\sqrt{\frac{\log N}{\log y}}.$$

Следовательно, для суммы W_a справедлива формула теоремы 1.2. Применяя лемму 1.22 с $m = 1$, будем иметь:

$$W_a \,=\, \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\,\Gamma\Big(\frac{a+1}{2}\Big)\,\mathfrak{S}_1^{\frac{a}{2}}\big(1 \,+\, r_1(a)\big),$$

где

$$|r_1(a)| \leqslant \left|\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,\frac{\Gamma\Big(n-\dfrac{a}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{a}{2}\Big)}\right| \,+\, 10.67\theta\Big(5\pi e\sqrt{\frac{a\log x}{\log N}}\Big)^a \,<$$

$$<\, \frac{1}{8\mathfrak{S}_1^2} \,+\, 10.67\Big\{\frac{\pi e}{2}\sqrt{\frac{5\,\varepsilon}{a}}\Big\}^a \,<\, \frac{1}{8\mathfrak{S}_1^2} \,+\, 10.67\cdot\frac{\pi e}{2}\sqrt{5\,\varepsilon} \,<\, \frac{13}{4}.$$

Таким образом,

$$W_a \,<\, I_a, \quad I_a \,=\, \frac{17}{4}\,\frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\,\Gamma\Big(\frac{a+1}{2}\Big)\,\mathfrak{S}_1^{\frac{a}{2}}. \tag{2.19}$$

Далее, из неравенства Гёльдера, леммы 2.7 и оценки $m+1 < \dfrac{a}{2}+1$ находим:

$$R_a \leqslant M^{1-\frac{a}{2(m+1)}}\,R_{2(m+1)}^{\frac{a}{2(m+1)}} \leqslant M^{1-\frac{a}{2(m+1)}}\,\big\{c_0(c_0(m+1))^{2(m+1)}\big\}^{\frac{a}{2(m+1)}} \,<\, J_a,$$

$$J_a \,=\, \Big\{c_0^{3/2}\Big(\frac{a}{2}+1\Big)\Big\}^a M. \tag{2.20}$$

Вновь применяя неравенство Гёльдера наряду с оценками (2.19), (2.20), находим:

$$t_{\nu,\delta} \leqslant \Big\{\sum_n |W(t_n)|^{(a-\nu-\delta)\frac{a}{(a-\nu-\delta)}}\Big\}^{1-\frac{\nu+\delta}{a}}\,\Big\{\sum_n |R(t_n+0)|^{(\nu+\delta)\frac{a}{(\nu+\delta)}}\Big\}^{\frac{\nu+\delta}{a}} \leqslant$$

$$\leqslant I_a^{\,1-\frac{\nu+\delta}{a}}\,J_a^{\,\frac{\nu+\delta}{a}} \,=\, I_a q^{\nu+\delta},$$

где $q \,=\, \Big(\dfrac{J_a}{I_a}\Big)^{\frac{1}{a}}$. Поскольку $\Gamma\Big(\dfrac{a+1}{2}\Big) \,>\, 2\Big(\dfrac{a}{2e}\Big)^{\frac{a}{2}}$ для всех $a \geqslant 1$, для величины q имеем неравенства:

$$q^a \,=\, \frac{4\sqrt{\pi}}{17}\Big\{\frac{\pi c_0^{3/2}}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\Big(\frac{a}{2}+1\Big)\Big\}^a\,\Gamma^{-1}\Big(\frac{a+1}{2}\Big) \,<\, \frac{2\sqrt{\pi}}{17}\Big\{\frac{\pi\sqrt{e}c_0^{3/2}}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\Big(\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{2}{a}}\Big)\Big\}^a \,<$$

$$<\, \Big(11c_0^{3/2}\sqrt{\frac{a}{L}}\Big)^a,$$

$$q \,<\, 11c_0^{3/2}\sqrt{\frac{a}{L}}.$$

Так как $a < (11^{2/3}c_0)^{-1}\sqrt[3]{L}$, то несложно проверить, что $q < a^{-1}$. Следовательно,

$$u \leqslant \sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}I_a q^\nu \,=\, I_a\big\{(1+q)^k \,-\, 1\big\} \,<\, I_a\, kq(1+q)^{k-1} \,<\, I_a\, aq\left(1+\frac{1}{a}\right)^a \,<\, I_a\, aeq,$$

$$v, w \leqslant \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}I_a q^{\nu+1} \,=\, I_a\, q(1+q)^k \,<\, I_a eq,$$

откуда

$$u + 3v + 3w \,<\, I_a\,(a+12)eq \,<\, 13I_a\, aeq \,<\, \frac{1652.1\,M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\mathfrak{S}_1^{\frac{a}{2}}\,\frac{(ac_0)^{3/2}}{\sqrt{L}}. \quad (2.21)$$

Определяя величины $x, U(t)$ и $V(t)$ по формулам (2.17) и вновь применяя лемму 2.11, приходим к равенству

$$W_a \,=\, \sum_n |V(t_n) \,+\, U(t_n)|^a \,=\, V_a \,+\, \theta\big(U + 3V + 9W\big),$$

в котором U, V и W определяются подобно величинам u, v и w в (2.18), причём в роли u_ν, v_ν и w_ν выступают суммы вида

$$T_{\nu,\delta} \,=\, \sum_n |V(t_n)|^{a-\nu-\delta}|W(t_n)|^{\nu+\delta}, \quad \delta = 0, 1, b.$$

Практически дословно повторяя доказательство полученной выше оценки U_2, при любом целом $r \geqslant 1$ с условием $x^{2r}\log N < \sqrt{M}$ получим неравенства:

$$U_{2r} \,=\, \sum_n U^{2r}(t_n) \leqslant \frac{1}{\pi^{2r}}\sum_n\left|\sum_{x<p\leqslant y}\frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}}\right|^{2r} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^{2r}}\left\{r!M\left(\sum_{x<p\leqslant y}\frac{1}{p}\right)^r \,+\, x^{2r}\log N\right\} \leqslant \frac{1}{\pi^{2r}}\big(r!M(3\log L)^r \,+\, \sqrt{M}\,\big) \,<$$

$$<\, 3\sqrt{r}\left(\frac{3r}{\pi^2 e}\,\log L\right)^r M,$$

из которых, в свою очередь, следует оценка

$$U_{2r}^{\frac{1}{2r}} \,\leqslant\, \frac{3}{\pi\sqrt{e}}\,M^{\frac{1}{2r}}\sqrt{r\log L}. \quad (2.22)$$

Применяя (2.22) в случае $r = m + 1 \leqslant \dfrac{a}{2} + 1$, находим:

$$U_a \leqslant M^{1\,-\,\frac{a}{2(m+1)}}U_{2(m+1)}^{\frac{a}{2(m+1)}} \leqslant M\left\{\frac{3}{\pi\sqrt{e}}\,\sqrt{(m+1)\log L}\right\}^a \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\pi^a}\left\{\frac{9}{e}\left(\frac{a}{2}+1\right)\log L\right\}^{\frac{a}{2}} \,=\, K_a.$$

Оценивая $T_{\nu,\delta}$ подобно тому, как это делалось выше, получаем:

$$U \,<\, I_a\, aeQ, \quad V, W \,<\, I_a\, eQ,$$

где

$$Q \,=\, \left(\frac{K_a}{I_a}\right)^{\frac{1}{a}}.$$

Далее, из определения величин I_a и K_a находим:

$$Q^a \,=\, \frac{K_a}{I_a} \,=\, \frac{4\sqrt{\pi}}{17}\left\{\frac{9}{e}\left(\frac{a}{2}+1\right)\frac{\log L}{L}\right\}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\Gamma\Big(\dfrac{a+1}{2}\Big)} \,<$$

$$<\, \frac{2\sqrt{\pi}}{17}\left\{\frac{9}{e}\left(\frac{a}{2}+1\right)\frac{2e}{a}\frac{\log L}{L}\right\}^{\frac{a}{2}} \,<\, \left(\frac{27\log L}{L}\right)^{\frac{a}{2}},$$

откуда

$$Q \,<\, 3\sqrt{\frac{3\log L}{L}}.$$

Следовательно,

$$U + 3V + 9W \,<\, I_a(a+12)eQ \,<\, \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\mathfrak{S}_1^{\frac{a}{2}}\, r_3(a),$$

где

$$r_3(a) \,=\, \frac{221}{4}\, aeQ \,<\, \frac{663e}{4}\, a\sqrt{\frac{3\log L}{L}} \,<\, 780.4a\sqrt{\frac{\log L}{L}}. \tag{2.23}$$

Вновь пользуясь теоремой 1.2 и применяя неравенства (2.21) и (2.23), получим:

$$\sum_n |\Delta(n)|^a \,=\, \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) L^{\frac{a}{2}}\,\big(1 \,+\, r(a)\big),$$

где

$$|r(a)| \leqslant \left|\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,\frac{\Gamma\Big(n-\dfrac{a}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{a}{2}\Big)}\right| \,+\, 10.67\theta\left(5\pi e\sqrt{\frac{a\log x}{\log N}}\right)^a \,+$$

$$+\, \left(\frac{L}{\mathfrak{S}_1}\right)^{\frac{a}{2}}\left\{780.4a\sqrt{\frac{\log L}{L}} \,+\, 1652.1\,\frac{(ac_0)^{3/2}}{\sqrt{L}}\right\} \,<$$

$$<\, \left(\frac{L}{\mathfrak{S}_1}\right)^{\frac{a}{2}}\left\{\frac{1}{8\mathfrak{S}_1^2} \,+\, 10.67\left(5\pi e\sqrt{\frac{c_1\sqrt[3]{L}}{L^3}}\right)^a \,+\, 780.4a\sqrt{\frac{\log L}{L}} \,+\, 1652.1\,\frac{(ac_0)^{3/2}}{\sqrt{L}}\right\} \,<$$

$$<\, \frac{781a}{\sqrt{L}}\big(\sqrt{\log L} \,+\, 2.2\sqrt{a}c_0^{3/3}\big).$$

Теорема доказана.

§4. Распределение величин $\Delta(n)$

Рассмотрим вероятностное пространство $\big(\Omega, \mathbf{P}\big)$, где $\Omega = \big\{n \,|\, N < n \leqslant N + M\big\}$ - множество всех целых чисел промежутка $(N, N + M]$, а мера $\mathbf{P}$ для всякого подмножества $\mathcal{A} \subset \Omega$ определяется равенством $\mathbf{P}(\mathcal{A}) = |\mathcal{A}|/M$. Пусть $\delta : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ - случайная величина со значениями $\delta(n) = \pi\Delta(n)\sqrt{2/L}$, $N < n \leqslant N + M$, и пусть

$$\Phi(u) \;=\; P\big(\big\{n \,:\, n \in \Omega,\; \delta(n) \leqslant u\big\}\big)$$

– её функция распределения. Тогда число $\nu(u)$ номеров n, удовлетворяющих условию $\delta(n) \leqslant u$, выражается произведением $M\Phi(u)$.

Ниже мы докажем две теоремы о функции распределения величины δ, в которых $\Phi(u)$ приближается гауссовским распределением

$$G(u) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{u} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv.$$

Теорема 2.4. *При любом u имеет место равенство*[3)]

$$\nu(u) \;=\; M\bigg(G(u) \,+\, \frac{1.78\theta}{\sqrt{\log\log\log N}}\bigg).$$

Доказательство. Характеристическая функция $f(t)$ распределения $\Phi(u)$ имеет вид:

$$f(t) = \mathbf{E}\big(e^{it\delta}\big) = \frac{1}{M}\sum_{n} e^{it\delta(n)}. \tag{2.24}$$

Выберем теперь целое число P с условием $P \leqslant c_1\sqrt[3]{L}$. Тогда, преобразуя последнее выражение и пользуясь утверждениями теорем 2.1 и 2.2, последовательно получим:

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{1}{M}\sum_{n}\bigg\{\sum_{k=0}^{P}(-1)^k\,\frac{(t\delta(n))^{2k}}{(2k)!} \,+\, i\sum_{k=0}^{P}(-1)^k\frac{(t\delta(n))^{2k+1}}{(2k+1)!} \,+\, 2\theta_1\,\frac{(t\delta(n))^{2P+2}}{(2P+2)!}\bigg\} \;= \\ = \sum_{k=0}^{P}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k\left(1 + 2.4\theta_2\,\frac{(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\right) + \frac{\pi\sqrt{2}}{3}\,\frac{\theta_3 c_0}{\sqrt{L}}\sum_{k=0}^{P}\frac{2(k+1)}{k!}\,\frac{|t|^{2k+1}}{2^k} + \\ + \frac{2\theta_4}{(P+1)!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^{P+1}\left(1 + 2.4\,\frac{(c_0(P+1))^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\right). \end{aligned}$$

Обозначим через $f_1(t)$ вклад от нечётных моментов, а через $f_2(t)$ - вклад от оста-

[3)] После публикации автором теоремы 2.4 появилась работа Р.Н. Бояринова "О распределении значений дзета-функции Римана" (*Доклады РАН*, **438**:1(2011), 14-16) с гораздо более точной оценкой остаточного члена в формуле для $\nu(u)$: $O\bigg(\frac{\log\log\log N}{\sqrt{\log\log N}}\bigg)$ вместо $O\bigg(\frac{1}{\sqrt{\log\log\log N}}\bigg)$.

точных членов соответствующих асимптотических формул; получим:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{P}\frac{1}{k!}\left(-\frac{t^2}{2}\right)^k+\frac{2\theta_5}{(P+1)!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^{P+1}+f_1(t)+f_2(t)=$$

$$=g(t)+\frac{3\theta_6}{(P+1)!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^{P+1}+f_1(t)+f_2(t),$$

где $g(t)=e^{-t^2/2}$ - характеристическая функция гауссовского распределения. Имеем, далее:

$$|f_1(t)|\leqslant\frac{2\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{L}}\,c_0^{\frac{3}{2}}\sum_{k=0}^{P}\frac{(k+1)}{k!2^k}\,|t|^{2k+1},\quad |f_2(t)|\leqslant\frac{4.8}{\sqrt{L}}\,c_0^{\frac{3}{2}}\sum_{k=1}^{P+1}\frac{k^{\frac{3}{2}}}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

Положим теперь $\delta=10^{-3}$, $\lambda=(1-\delta)\sqrt{\log L}$, $P=\left[e\lambda^2\right]+1$. Тогда

$$I(\lambda)=\int_0^\lambda\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt\leqslant\frac{3}{(P+1)!}\,\frac{\lambda^{2P+2}}{2^{P+1}(2P+2)}+$$

$$+\ \frac{2\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{L}}\,c_0^{\frac{3}{2}}\sum_{k=0}^{P+1}\frac{k+1}{2k+1}\,\frac{\lambda^{2k+1}}{2^k k!}+\frac{4.8}{\sqrt{L}}c_0^{\frac{3}{2}}\sum_{k=1}^{P}\frac{k^{\frac{3}{2}}}{k!}\,\frac{\lambda^{2k}}{2k\,2^k}\ <$$

$$<\ \frac{1.5}{P^2}\,\frac{1}{P!}\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^{P+1}\ +\ \frac{2\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{L}}\,c_0^{\frac{3}{2}}\lambda\sum_{k=0}^{P}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^k\ +\ \frac{2.4}{\sqrt{L}}\,c_0^{\frac{3}{2}}\sum_{k=1}^{P+1}\frac{\sqrt{k}}{k!}\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^k\ <$$

$$<\ \frac{3\lambda^2}{4\sqrt{2\pi}\,P^2\sqrt{P}}\left(\frac{e\lambda^2}{2P}\right)^P\ +\ \frac{3c_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\,\left(\lambda\ +\ \sqrt{P+1}\right)\sum_{k=0}^{P+1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^k\ <$$

$$<\ \frac{2^{-\,P}}{40\lambda^2}\ +\ 8c_0^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{\frac{\log L}{L}}\cdot L^{0.5(1-\delta)^2}\ <\ L^{-\,0.5\delta}.$$

Беря

$$G(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-\frac{v^2}{2}}dv,\quad B=\sup_u|G'(u)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad g(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

в лемме 7.П, найдём:

$$\sup_u\left|\Phi(u)-G(u)\right|\ \leqslant\ 1.771\lambda^{-1}\ +\ 0.298\,I(\lambda)\ <\ \frac{1.78}{\sqrt{\log L}},$$

$$\Phi(u)\ =\ G(u)+\frac{1.78\theta}{\sqrt{\log L}}.$$

Теорема доказана.

Положим для дальнейшего

$$y=\exp\left(\frac{\log N}{220L}\right),\quad \mathfrak{S}\ =\ \sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p}\ =\ L-\log L+O(1).$$

Чтобы аппроксимировать $\Phi(u)$ при «больших» $|u|$ нормальным распределением, поступим следующим образом. Пусть $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ - дискретная случайная величина, принимающая значения $W_y(t_n)$, $N < n \leqslant N + M$, и пусть

$$F(u) \,=\, \frac{1}{M}\,\#\biggl\{n \,|\, N < n \leqslant N + M, W_y(t_n) \leqslant \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}\biggr\}$$

– её функция распределения. Оказывается, что при подходящем y функция $F(u)$ достаточно близка к $\Phi(u)$. Далее распределение $F(u)$ заменяется близкой к ней функцией распределения $F_{\mathcal{A}}(u)$ случайной величины $\eta : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ со значениями $W_y(t_n)$, $n \in \mathcal{A}$. Множество $\mathcal{A}$ получается исключением из Ω всех тех номеров n, для которых величина $|W_y(t_n)|$ «аномально» велика. Ограничение $n \in \mathcal{A}$ позволяет построить для η производящую функцию моментов

$$K(\eta; s) \,=\, \mathbf{E}\bigl(e^{s\eta}\bigr)$$

и воспользоваться леммой 8.П. Последующие переходы от $F_{\mathcal{A}}(u)$ к $F(u)$ и от $F(u)$ к $\Phi(u)$ не представляют затруднений.

Лемма 2.12. *Для всех n, $N < n \leqslant N+M$, за исключением не более $M\delta_1$ номеров, $\delta_1 = 4e^{-\,\pi^2\mathfrak{S}}$, справедливо неравенство $|W_y(t_n)| \leqslant \mathfrak{S}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{A}_1$ множество тех n, для которых $|W_y(t_n)| > \mathfrak{S}$. Полагая $k_1 = \bigl[\pi^2\mathfrak{S}\bigr]$ и принимая во внимание замечание 1 к лемме 2.1, будем иметь:

$$|\mathcal{A}_1|\mathfrak{S}^{2k_1} \leqslant \sum_{n\in\mathcal{A}_1} W^{2k_1}(t_n) \leqslant \sum_{n} W^{2k_1}(t_n) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(2k_1)!}{k_1!}\,\frac{M}{(2\pi)^{2k_1}}\biggl(\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p}\biggr)^{k_1} \leqslant M\sqrt{2}\biggl(\frac{4k_1}{e}\,\frac{\mathfrak{S}}{4\pi^2}\biggr)^{k_1},$$

откуда

$$|\mathcal{A}_1| \leqslant M\sqrt{2}\biggl(\frac{k_1}{\pi^2\mathfrak{S}e}\biggr)^{k_1} \,<\, M\sqrt{2}\,e^{-\,k_1} \,<\, 4Me^{-\,\pi^2\mathfrak{S}},$$

что и требовалось.

Лемма 2.13. *При любом $u \geqslant 1$ справедливы равенства*:

$$F(-u) \,=\, G(-u)\biggl(1 \,+\, O\biggl(\frac{u}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\biggr)\biggr) \,+\, 2\theta_1\delta_1,$$

$$1 \,-\, F(u) \,=\, \bigl(1 \,-\, G(u)\bigr)\biggl(1 \,+\, O\biggl(\frac{u}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\biggr)\biggr) \,+\, 2\theta_2\delta_1,$$

где постоянные в знаках O - абсолютные.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{A}$ дополнение ко множеству $\mathcal{A}_1$ из леммы 2.12 до множества всех целых чисел промежутка $N < n \leqslant N + M$. Пусть, далее, $K(\eta\,; s)$ - производящая функция моментов случайной величины $\eta = \eta_N$ со значениями $W_y(t_n)$, $n \in \mathcal{A}$, т.е.

$$K(\eta\,; s) \,=\, \mathbf{E}\bigl(e^{s\eta}\bigr) \,=\, |\mathcal{A}|^{-1}\sum_{n\in\mathcal{A}}\exp\bigl\{sW_y(t_n)\bigr\} \,=\, |\mathcal{A}|^{-1}K_0(s).$$

Тогда для всех s, $|s|\leqslant 1$, и $K=\left[e^2\mathfrak{S}\right]+1$ имеем:

$$K_0(s) \;=\; \sum_{n\in\mathcal{A}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{s^k}{k!}\,W_y^k(t_n) \;=\; \left(\;\sum_{k=0}^{K}+\sum_{k>K}\;\right)\frac{s^k}{k!}\sum_{n\in\mathcal{A}}W_y^k(t_n) \;=\; K_1(s)\;+\;R_1(s),$$

причём

$$|R_1(s)|\leqslant\sum_{k>K}\frac{|s|^k}{k!}\,M\mathfrak{S}^k \;<\; \frac{M}{\sqrt{2\pi K}}\sum_{k>K}\left(\frac{e\mathfrak{S}}{k}\right)^k<\frac{M}{\sqrt{2\pi K}}\sum_{k>K}\left(\frac{e\mathfrak{S}}{K}\right)^k\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M}{e\sqrt{2\pi\mathfrak{S}}}\sum_{k>K}e^{-k}\;<\;\frac{M}{e\sqrt{\mathfrak{S}}}\,e^{-\,e^2\mathfrak{S}}\;<\;Me^{-\,9\mathfrak{S}}.$$

Далее, представляя $K_1(s)$ разностью

$$\sum_{k=0}^{K}\frac{s^k}{k!}\left(\sum_n W_y^k(t_n)\;-\;\sum_{n\in\mathcal{A}}W_y^k(t_n)\right)\;=\;K_2(s)-R_2(s),$$

будем иметь:

$$|R_2(s)|\leqslant|\mathcal{A}_1|\;+\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k!}\sum_{n\in\mathcal{A}_1}|W_y(t_n)|^k.$$

Применяя неравенство Коши и учитывая замечание 1 к лемме 2.1, получим:

$$|R_2(s)|\leqslant M\delta_1\;+\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k!}\left(M\delta_1\sum_n W^{2k}(t_n)\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant M\delta_1\;+\;\sqrt{M\delta_1}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k!}\left(\frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M\mathfrak{S}^k}{2^{2k}}\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant M\delta_1\;+\;\sqrt{M\delta_1}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k!}\left(M\sqrt{2}\left(\frac{k\mathfrak{S}}{e}\right)^k\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant M\delta_1\;+\;\frac{M\sqrt{\delta_1}}{\sqrt[4]{2}\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{e\mathfrak{S}}{k}\right)^{k/2}.$$

Поскольку наибольшее значение дроби $\left(\dfrac{e\mathfrak{S}}{k}\right)^{k/2}$ на промежутке $1\leqslant k\leqslant K$ не превосходит $e^{0.5\mathfrak{S}}$, то

$$|R_2(s)|\leqslant M\delta_1\;+\;M\sqrt{\delta_1}\,\frac{2\sqrt{K}}{\sqrt[4]{2}\sqrt{\pi}}\;<\;1.5M\sqrt{\mathfrak{S}}e^{-\,4\mathfrak{S}}.$$

Чтобы вычислить $K_2(s)$, положим для краткости

$$w_k\;=\;\sum_n W_y^k(t_n),\qquad U(t)\;=\;\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant y}\frac{p^{it}}{\sqrt{p}}.$$

Тогда при нечётном k из леммы 1.3 получаем оценку $|w_k| \leqslant y^k \log N < M^{1/3}$. В случае чётного $k = 2m$ с помощью леммы 1.4 приходим к равенству

$$w_k \,=\, (2\pi)^{-2m}\binom{2m}{m} M\mathfrak{C}_m \,+\, \theta M^{1/3}, \quad \text{в котором} \quad \mathfrak{C}_m \,=\, \sum_{\substack{p_1\dots p_m = q_1\dots q_m \\ p_1,\dots,q_m \leqslant y}} (p_1\dots p_m)^{-1}.$$

Далее, согласно лемме 1.5, $\mathfrak{C}_m = m!H_y^{(m)}(0)$, где

$$H_y(z) \,=\, \prod_{p\leqslant y} J_0\biggl(2i\sqrt{\frac{z}{p}}\biggr).$$

Таким образом,

$$K_2(s) \,=\, M\sum_{0\leqslant m\leqslant 0.5K} \frac{s^{2m}}{(2m)!}\,(2\pi)^{-\,2m}\binom{2m}{m} m!H_y^{(m)}(0) \,+\, \theta_1 M^{1/3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!} \,=$$

$$=\, M\sum_{0\leqslant m\leqslant 0.5K}\frac{1}{m!}\biggl(\frac{s}{2\pi}\biggr)^{2m} H_y^{(m)}(0) \,+\, 2\theta_2 M^{1/3}.$$

Заменим сумму по m бесконечной; получим:

$$K_2(s) \,=\, MH_y\biggl(\frac{s^2}{4\pi^2}\biggr) \,-\, R_3(s) \,+\, 2\theta_2 M^{1/3},$$

где величина $R_3(s)$ в силу леммы 1.17 удовлетворяет неравенствам

$$|R_3(s)| \leqslant M\sum_{m>0.5K}\frac{1}{m!}\biggl(\frac{\mathfrak{S}}{4\pi^2}\biggr)^m < \frac{M}{\sqrt{\pi K}}\sum_{m>0.5K}\biggl(\frac{e\mathfrak{S}}{4\pi^2 m}\biggr)^m <$$

$$< \frac{M}{\sqrt{\pi K}}\sum_{m>0.5K}\biggl(\frac{e\mathfrak{S}}{2\mathfrak{S}e^2\pi^2}\biggr)^m < \frac{M}{\sqrt{K}}\,(2\pi^2 e)^{-\,0.5K} < Me^{-\,14\mathfrak{S}}.$$

Складывая найденные оценки, приходим к равенствам

$$K_0(s) \,=\, MH_y\biggl(\frac{s^2}{4\pi^2}\biggr) \,+\, \theta M\bigl(4e^{-\,\pi^2\mathfrak{S}} \,+\, 1.5\sqrt{\mathfrak{S}}e^{-\,4\mathfrak{S}} \,+\, 2M^{-\,2/3} \,+\, e^{-\,14\mathfrak{S}}\bigr) \,=$$

$$=\, M\biggl\{H_y\biggl(\frac{s^2}{4\pi^2}\biggr) \,+\, 2\theta\sqrt{\mathfrak{S}}e^{-\,4\mathfrak{S}}\biggr\}.$$

Оценим теперь величину $H_y\biggl(\dfrac{s^2}{4\pi^2}\biggr)$ снизу. Для этого представим её в виде

$$\prod_{p\leqslant y}\exp\biggl(\frac{s^2}{4\pi^2 p}\biggr)\cdot\exp\biggl(-\,\frac{s^2}{4\pi^2 p}\biggr)J_0\biggl(\frac{is}{\pi\sqrt{p}}\biggr) \,=\, \exp\biggl\{\frac{s^2\mathfrak{S}}{4\pi^2}\biggr\}\Phi_y(s),$$

где функция $\Phi_y(s)$ в силу лемм 1.11 и 1.12 при любом комплексном s разлагается в ряд вида

$$\Phi_y(s) \,=\, 1 \,+\, \sum_{n=2}^{+\infty}\Phi_n\biggl(\frac{s}{2\pi}\biggr)^{2n},$$

причём

$$|\Phi_n| \leqslant \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2\pi}}{n!}\,(\log\log n + 1)^n, & \text{если } \ 2 \leqslant n \leqslant y, \\ \dfrac{\mathfrak{S}^n}{n!}, & \text{если } \ n > y. \end{cases}$$

Следовательно, всюду в круге $|s| \leqslant 1$ имеем неравенства

$$\big|\Phi_y(s) \,-\, 1\big| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|\Phi_n|}{(2\pi)^{2n}}\,\sqrt{2\pi} \sum_{2\,\leqslant\, n\,\leqslant\, y} \frac{1}{n!}\left(\frac{\log\log n + 1}{4\pi^2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \sum_{n>y}\left(\frac{e\mathfrak{S}}{4\pi^2 n}\right)^n <$$

$$< \sqrt{2\pi}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\log\log n + 1}{4\pi^2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \sum_{n>y} e^{-n} < 0.01.$$

Таким образом,

$$\min_{|s|\,\leqslant\, 1}\left|H_y\left(\frac{s^2}{4\pi^2}\right)\right| \geqslant (1 \,-\, 0.01) \min_{|s|\,\leqslant\, 1}\left|\exp\left(\frac{s^2}{4\pi^2}\right)\right| \,>\, 0.99\exp\left(-\frac{\mathfrak{S}}{4\pi^2}\right).$$

Возвращаясь к выражению для функции $K_0(s)$, получим:

$$K_0(s) \,=\, MH_y\left(\frac{s^2}{4\pi^2}\right)\left\{1 \,+\, 2\theta\sqrt{\mathfrak{S}}H_y^{-1}\left(\frac{s^2}{4\pi^2}\right)e^{-\,4\mathfrak{S}}\right\} \,=$$

$$= \,MH_y\left(\frac{s^2}{4\pi^2}\right)\big\{1 \,+\, 2.2\theta\sqrt{\mathfrak{S}}e^{-\,3.97\mathfrak{S}}\big\}.$$

Приблизим теперь $\Phi_y(s)$ функцией $\Psi(s)$, не зависящей от y. Для этого запишем $\Phi_y(s)$ в виде $\Psi(s)\Psi_y^{-1}(s)$, где

$$\Psi(s) \,=\, \prod_p \varphi\left(\frac{s^2}{4\pi^2 p}\right), \quad \Psi_y(s) \,=\, \prod_{p>y} \varphi\left(\frac{s^2}{4\pi^2 p}\right),$$

а $\varphi(v)$ - функция, введённая в лемме 1.6 главы 1. Пользуясь неравенством леммы 1.10, для $|s| \leqslant 1$ будем иметь:

$$\left|\varphi\left(\frac{s^2}{4\pi^2 p}\right) \,-\, 1\right| \leqslant \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{|\varpi_m|}{(4\pi^2 p)^m} \,<\, \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m!}\,\frac{1}{(4\pi^2 p)^m} \,<\, \frac{1}{194p^2},$$

откуда

$$\log\varphi\left(\frac{s^2}{4\pi^2 p}\right) \,=\, \log\left(1 \,+\, \frac{\theta_1}{194p^2}\right) \,=\, \frac{\theta_2}{192p^2},$$

$$\Psi_y(s) \,=\, \exp\left\{\frac{\theta_3}{192}\sum_{p>y}\frac{1}{p^2}\right\} \,=\, \exp\left\{\frac{\theta_4}{191y}\right\} \,=\, 1 \,+\, \frac{\theta_5}{190y},$$

$$K_0(s) \,=\, M\exp\left\{\frac{s^2\mathfrak{S}}{4\pi^2}\right\}\Psi(s)\left(1 \,+\, \frac{\theta_5}{190y}\right)\big(1 \,+\, 2.2\theta\sqrt{\mathfrak{S}}e^{-\,3.97\mathfrak{S}}\big).$$

В силу леммы 2.12 и определения $K_0(s)$ получаем:

$$K(\eta\,;s)\,=\,\exp\left\{\frac{s^2\mathfrak{S}}{4\pi^2}\right\}\Psi(s)\big(1\,+\,\theta(\log N)^{-3}\big).$$

Пусть теперь $F_{\mathcal{A}}(u)$ - функция распределения случайной величины $\pi\eta\sqrt{2/\mathfrak{S}}$, так что

$$|\mathcal{A}|F_{\mathcal{A}}(u)\,=\,\#\left\{n\,|\,n\in A,\;W_y(t_n)\leqslant\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}\right\}.$$

Тогда, полагая $\phi(N)=\mathfrak{S}/\pi^2$, $\kappa(N)=(\log N)^3$ в лемме 8.П, при любом $u\geqslant 1$ получаем:

$$F_{\mathcal{A}}(-u)\,=\,G(-u)\left(1+O\left(\frac{u}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right)\right),\quad 1-F_{\mathcal{A}}(u)\,=\,(1-G(u))\left(1+O\left(\frac{u}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right)\right),\;(2.25)$$

где постоянные в знаках O - абсолютные. Из определения $F_{\mathcal{A}}(u)$, $F(u)$ и леммы 2.12 следует, что величины

$$MF(u)\,=\,\#\left\{n\,|\,N<n\leqslant N+M,\;W_y(t_n)\leqslant\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}\right\}$$

и $|\mathcal{A}|F_{\mathcal{A}}(u)$ отличаются друг от друга не более чем на $M\delta_1$:

$$|\mathcal{A}|F_{\mathcal{A}}(u)\,-\,MF(u)\,=\,\theta_1 M\delta_1.$$

Замечая, что $|\mathcal{A}|=M-\theta_2 M\delta_1$, находим:

$$F(u)\,=\,F_{\mathcal{A}}(u)\,+\,2\theta_3\delta_1.\qquad(2.26)$$

Теперь утверждение леммы легко следует из (2.24) и (2.26). Лемма доказана.

Лемма 2.14. *Пусть $1\leqslant|u|\leqslant\sqrt{L}$. Тогда для всех n, $N<n\leqslant N+M$, за исключением не более $M\delta_2$ номеров,*

$$\delta_2\,=\,(c_0+2)e^2e^{-\frac{u^2}{2}}L^{-1},$$

выполняются неравенства:

$$W_y(t_n)\,-\,2\tau\,\leqslant\,\Delta(n)\,\leqslant\,W_y(t_n)\,+\,2\tau,\qquad(2.27)$$

где $\tau=\dfrac{ec_0}{4}(u^2+2\log L)$.

Доказательство. Положим $k_1=\big[\tau/(ec_0)\big]$, $x=X^{1/(8k_1+3)}$, и обозначим через $\mathcal{A}_1$ множество тех n, $N<n\leqslant N+M$, для которых величина

$$R(t)\,=\,S(t)\,-\,W_x(t)\,=\,S(t)\,+\,\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}$$

удовлетворяет неравенству $|R(t_n+0)|>\tau$. Тогда, в силу леммы 2.7, имеем:

$$\tau^{2k_1}|\mathcal{A}_1| \leqslant \sum_{n\in\mathcal{A}_1} R^{2k_1}(t_n+0) \leqslant \sum_n R^{2k_1}(t_n+0) \,<\, c_0(c_0k_1)^{2k_1}M,$$

откуда

$$|\mathcal{A}_1| \leqslant c_0\left(\frac{c_0k_1}{\tau}\right)^{2k_1} M \leqslant c_0e^{-\,2k_1}M.$$

Далее, пусть $\mathcal{A}_2$ - множество тех n, для которых разность

$$W_x(t) \,-\, W_y(t) \,=\, -\frac{1}{\pi}\sum_{y<p\leqslant x}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}$$

удовлетворяет условию $\big|W_x(t_n) \,-\, W_y(t_n)\big|>\tau$. Тогда

$$\tau^{2k_1}|\mathcal{A}_2| \leqslant \sum_{n\in\mathcal{A}_2}\big(W_x(t_n) \,-\, W_y(t_n)\big)^{2k_1} \leqslant \sum_n\big(W_x(t_n) \,-\, W_y(t_n)\big)^{2k_1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_n\left|\sum_{y<p\leqslant x}\frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}}\right|^{2k_1} \,=\, k_1!M\bigg(\sum_{y<p\leqslant x}\frac{1}{p}\bigg)^{k_1} \,+\, x^{2k_1}\log N \,<$$

$$<\, k_1!M(\log L)^{k_1} \,+\, X^{1/4} \,<\, 5M\sqrt{k_1}\left(\frac{k_1\log L}{e}\right)^{k_1},$$

откуда

$$|\mathcal{A}_2| \,<\, 5M\sqrt{k_1}\left(\frac{k_1\log L}{e\tau^2}\right)^{k_1} \,<\, 5M\sqrt{k_1}e^{-\,3k_1} \,<\, 2Me^{-\,2k_1}.$$

Следовательно, исключив из рассмотрения не более $(c_0+2)Me^{-\,2k_1}\leqslant M\delta_2$ номеров n, принадлежащих объединению $\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$, для оставшихся будем иметь:

$$|R(t_n+0)| \,+\, \big|W_x(t_n) \,-\, W_y(t_n)\big| \leqslant 2\tau,$$

$$\Delta(n)+S(t_n+0) \,=\, W_x(t_n)+R(t_n+0) \,=\, W_y(t_n)+R(t_n+0)+\big(W_x(t_n)-W_y(t_n)\big) \,=$$

$$=\, W_y(t_n) \,+\, 2\theta\tau,$$

где $-1\leqslant\theta\leqslant 1$. Лемма доказана.

Лемма 2.15. *Положим*

$$\Phi_0(u) \,=\, \frac{1}{M}\,\#\bigg\{n\,|\,N<n\leqslant N+M,\ \Delta(n)\leqslant\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}\bigg\},$$

так что

$$\Phi(u) \,=\, \Phi_0\bigg(u\sqrt{\frac{L}{\mathfrak{S}}}\bigg)$$

Тогда при любом u, $1\leqslant|u|\leqslant\sqrt{L}$, справедливы неравенства

$$F(u_1)-3\delta_2 \leqslant \Phi_0(u) \leqslant F(u_2)+3\delta_2,$$

где $u_1=u-2\pi\tau\sqrt{2/\mathfrak{S}}$, $u_2=u+2\pi\tau\sqrt{2/\mathfrak{S}}$, $\tau=\dfrac{ec_0}{4}\big(u^2+2\log L\big)$.

Доказательство. Обозначим множество тех n, $N < n \leqslant N + M$, для которых выполнены неравенства (2.27), через $\mathcal{A}$, а его дополнение - через $\mathcal{B}$, и положим

$$\Phi_{\mathcal{A}}(u) \,=\, |\mathcal{A}|^{-1}\#\Big\{n \,|\, n \in A,\ \Delta(n) \leqslant \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}\Big\},$$

$$F_{\mathcal{A}}(u) \,=\, |\mathcal{A}|^{-1}\#\Big\{n \,|\, n \in A,\ W_y(t_n) \leqslant \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}\Big\}.$$

Рассмотрим номер $n \in \mathcal{A}$, для которого

$$W_y(t_n) \leqslant \frac{u_1}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}} \,=\, \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}} \,-\, 2\tau. \tag{2.28}$$

Согласно (2.27) имеем:

$$\Delta(n) \leqslant W_y(t_n) \,+\, 2\tau \,=\, \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}.$$

Следовательно, число тех $n \in \mathcal{A}$, для которых $\Delta(n) \leqslant \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}$, не меньше числа тех $n \in \mathcal{A}$, для которых имеет место (2.28), или, что то же, $|\mathcal{A}|\Phi_{\mathcal{A}}(u) \geqslant |\mathcal{A}|F_{\mathcal{A}}(u_1)$. Но так как левая часть неравенства не превосходит $M\Phi(u)$, то $M\Phi(u) \geqslant |\mathcal{A}|F_{\mathcal{A}}(u_1)$. Замечая, что $|\mathcal{A}| = M - |\mathcal{B}|$ и пользуясь оценкой леммы 2.14, находим:

$$\Phi_0(u) \geqslant (1 - \delta_2)F_{\mathcal{A}}(u_1). \tag{2.29}$$

Пусть, далее, $n \in \mathcal{A}$ - произвольный номер, удовлетворяющий условию

$$W_y(t_n) \,>\, \frac{u_2}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}} \,=\, \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}} \,+\, 2\tau. \tag{2.30}$$

Тогда из (2.27) заключаем, что

$$\Delta(n) \geqslant W_y(t_n) \,-\, 2\tau \,>\, \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}.$$

Таким образом, число тех $n \in \mathcal{A}$, которые подчинены условию $\Delta(n) > \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}$, не меньше числа тех $n \in \mathcal{A}$, для которых имеет место (2.30) или, что то же,

$$|\mathcal{A}|\big(1 \,-\, \Phi_{\mathcal{A}}(u)\big) \geqslant |\mathcal{A}|\big(1 \,-\, F_{\mathcal{A}}(u_2)\big).$$

Поскольку левая часть этого неравенства не больше величины $M(1-\Phi_0(u))$, отсюда заключаем, что

$$M\big(1 \,-\, \Phi(u)\big) \geqslant M(1 \,-\, \delta_2)\big(1 \,-\, F_{\mathcal{A}}(u_2)\big),$$

или, иначе,

$$\Phi_0(u) \leqslant (1 - \delta_2)F_{\mathcal{A}}(u_2) \,+\, \delta_2. \tag{2.31}$$

Объединив (2.29) и (2.31), находим:

$$(1 - \delta_2)F_{\mathcal{A}}(u_1) \leqslant \Phi_0(u) \leqslant (1 - \delta_2)F_{\mathcal{A}}(u_2) \,+\, \delta_2.$$

Заметим теперь, что при любом v величина $|\mathcal{A}|F_{\mathcal{A}}(v)$ не может отличаться от $MF(v)$ на величину, большую числа элементов множества $\mathcal{B}$. Следовательно,

$$|\mathcal{A}|F_{\mathcal{A}}(v) \,=\, MF(v) \,+\, \theta_1 M\delta_2,$$

откуда

$$(1 \,-\, \theta_2\delta_2)F_{\mathcal{A}}(v) \,=\, F(v) \,+\, \theta_1\delta_2, \qquad F_{\mathcal{A}}(v) \,=\, F(v) \,+\, 2\theta_3\delta_2.$$

Оценки

$$(1-\delta_2)F_{\mathcal{A}}(u_1) \geqslant (1-\delta_2)\big(F(u_1) \,-\, 2\delta_2\big) \,>\, F(u_1) \,-\, 3\delta_2,$$
$$(1-\delta_2)F_{\mathcal{A}}(u_2) + \delta_2 \leqslant (1-\delta 2)\big(F(u_2) + 2\delta_2\big) \,+\, \delta_2 \,<\, F(u_2) \,+\, 3\delta_2$$

и завершают доказательство леммы.

Теорема 2.5. *Пусть* $1.5 \leqslant u \leqslant \sqrt[6]{\log\log N}$. *Тогда функция*

$$\Phi(v) \,=\, \frac{1}{M}\,\#\left\{n \,|\, N < n \leqslant N+M,\ \Delta(n) \leqslant \frac{v}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\log\log N}\right\}$$

удовлетвояет равенствам

$$\frac{\Phi(-u)}{G(-u)} \,=\, 1 \,+\, O(R), \qquad \frac{1-\Phi(u)}{1-G(u)} \,=\, 1 \,+\, O(R),$$

в которых

$$R \,=\, \frac{u(u^2 + \log\log\log N)}{\sqrt{\log\log N}},$$

а постоянные в знаках O зависят от ε.

Доказательство. Докажем первое соотношение. В силу леммы 2.15 имеем неравенства

$$F(-v_1) - 3\delta_2 \leqslant \Phi_0(-u) \leqslant F(-v_2) \,+\, 3\delta_2, \tag{2.32}$$

в которых

$$v_1 \,=\, u+h, \quad v_2 \,=\, u-h, \quad h \,=\, 2\pi\tau\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{S}}},$$
$$\tau = \frac{ec_0}{4}\,(u^2 + 2\log L), \quad \delta_2 = (c_0+2)e^2\cdot e^{-\frac{u^2}{2}}L^{-1}.$$

Поскольку

$$h \,=\, \frac{\pi e c_0}{\sqrt{2\mathfrak{S}}}\,(u^2 + 2\log L) \leqslant \frac{\pi e c_0}{\sqrt{L}}\,(\sqrt[3]{L} \,+\, 2\log L) \,<\, 0.5,$$

то то $v_1 > v_2 > u - 0.5 > \geqslant 1.5 - 0.5 = 1$. Поэтому из леммы 2.13 и очевидных неравенств $2\delta_1 < \delta_2$, $v_j/\sqrt{\mathfrak{S}} < R$ заключаем:

$$\Phi_0(-u) \geqslant G(-v_1)\left(1 \,+\, O\left(\frac{v_1}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right)\right) \,-\, 2\delta_1 \,-\, 3\delta_2 \,>\, G(-v_1)\big(1 \,+\, O(R)\big) \,-\, 4\delta_2,$$
$$\Phi_0(-u) \,<\, G(-v_2)\big(1 \,+\, O(R)\big) \,+\, 4\delta_2.$$

Далее, по формуле конечных приращений

$$G(-v_j) \,=\, G(-u) \,-\, hG'(-u-\theta_1 h), \qquad j=1,2, \quad |\theta|\leqslant 1.$$

Поскольку

$$G'(-u-\theta_1 h) \,=\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left\{-\tfrac{1}{2}(u+\theta_1 h)^2\right\} \,<\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{u^2}{2}+u|h|},$$

$$G(-u) \,=\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{u} \,-\, \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{u^2}{2}}^{+\infty} e^{-w}\frac{dw}{w^{3/2}}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{u} \,-\, \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{u^3}\right) \,>\, \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{5u}$$

при $u\geqslant 1.5$, то

$$|h|\,\frac{G'(-u-\theta_1 h)}{G(-u)} \leqslant \frac{5r}{\sqrt{2\pi}}\,e^r, \quad \text{где} \quad r \,=\, \frac{\pi e c_0 u}{\sqrt{L}}\,(u^2+2\log L) \,\asymp\, R.$$

Ввиду оценок

$$r \leqslant \frac{\pi e c_0}{\sqrt{L}}\,(\sqrt{L} \,+\, 2\sqrt[6]{L}\log L) \,<\, 9c_0, \quad \frac{\delta_2}{G(-u)} \,<\, 5(c_0+2)e^2\,\frac{u}{L} \,<\, r$$

получаем:

$$\Phi_0(-u) \,=\, G(-u)\big(1 \,+\, O(R)\big)^2 \,+\, 4\theta\delta_2 \,=\, G(-u)\big(1 \,+\, O(R)\big).$$

Наконец, замечая, что

$$u\sqrt{\frac{L}{\mathfrak{S}}} \,=\, u \,+\, h_1, \quad \text{где} \quad |h_1|\leqslant \frac{u\log L}{L},$$

находим:

$$G(-u-h_1) \,=\, G(-u)\left(1 \,-\, h_1\,\frac{G'(-u-\theta h1)}{G(-u)}\right) \,=\, G(-u)\big(1 \,+\, O(R)\big),$$

$$\Phi(-u) \,=\, \Phi_0\left(-u\sqrt{\frac{L}{\mathfrak{S}}}\right) \,=\, \Phi_0(-u-h_1) \,=\, G(-u-h_1)\big(1 \,+\, O(R)\big) \,=$$

$$=\, G(-u)\big(1 \,+\, O(R)\big).$$

Второе соотношение доказывается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 2.6. *Пусть $f(x)$ - произвольная монотонно возрастающая и неограниченная при $x\to+\infty$ функция, удовлетворяющая при $N\leqslant x\leqslant N+M$ условиям $a\leqslant f(x)\leqslant b\sqrt{\log\log x}$, где a и b - абсолютные постоянные. Пусть, далее,*

$$\mathcal{F}=f(N), \quad \delta=\exp\left\{-(ec_0)^2\,\frac{\log\log N}{\mathcal{F}}\right\}.$$

Тогда на промежутке $N\leqslant n\leqslant N+M$ найдётся не менее $M\delta$ номеров n, удовлетворяющих условию $\Delta(n)\leqslant -(\pi\mathcal{F})^{-1}\log\log N$, и не менее $M\delta$ номеров, удовлетворяющих условию $\Delta(n)>(\pi\mathcal{F})^{-1}\log\log N$.

Доказательство. Положим $u_0 = \sqrt{L/\mathcal{F}}$ и определим $\mathcal{A}_1$ как множество тех n, для которых

$$\Delta(n) \leqslant W_y(t_n) + 2\tau,$$

где

$$y = \exp\left\{\frac{\log N}{220L}\right\}, \quad \tau = \frac{ec_0}{4}(u^2 + 2\log L).$$

Тогда, в силу леммы 2.14, дополнение $\mathcal{B}_1$ к $\mathcal{A}_1$ состоит из не более чем $M\delta_2$ номеров, где

$$\delta_2 = (c_0+2)e^2 e^{-\frac{u_0^2}{2}} L^{-1} < \frac{9c_0}{L}\exp\left\{-\frac{L}{2\mathcal{F}}\right\}.$$

Далее, положим

$$u = \frac{L}{\mathcal{F}}\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{S}}}, \qquad u = u_1 + 2\pi\tau\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{S}}}$$

и рассмотрим множество $\mathcal{A}_2$ тех n, для которых $W_y(t_n) \leqslant -\frac{u_1}{\pi}\sqrt{\mathfrak{S}/2}$. В силу леммы 2.13 число таких n с условием $N < n \leqslant N + M$ даётся формулой

$$MF(u_1) = MG(-u_1)\left(1 + O\left(\frac{u_1}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right)\right) + 2\theta M\delta_1,$$

где $\delta_1 = 4e^{-\pi^2\mathfrak{S}} < 0.5(\log N)^{-9}$. Несложно заключить теперь, что номер n, принадлежащий одновременно множествам $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, будет удовлетворять и условию

$$\Delta(n) \leqslant -\frac{u_1}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}} + 2\tau = -\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}} - 2\tau + 2\tau = -\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}.$$

Итак, искомое число ν номеров n, подчинённых условию $\Delta(n) \leqslant -\frac{u_1}{\pi}\sqrt{\mathfrak{S}/2}$, не меньше числа номеров, которые содержатся в пересечении $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. В свою очередь, это пересечение состоит не менее чем из $|\mathcal{A}_2| - |\mathcal{B}_1|$ номеров. Следовательно,

$$\nu \geqslant MF(-u_1) - 3M\delta_2 \geqslant M\left\{G(-u_1)\left(1 + O\left(\frac{u_1}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right)\right) - 2\delta_1\right\} - 3M\delta_2.$$

Считая постоянную a из условия настолько большой, чтобы выполнялось неравенство

$$1 + O\left(\frac{u_1}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{\mathcal{F}}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и пользуясь оценкой

$$G(-u_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_1}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv > \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\frac{e^{-\frac{u_1^2}{2}}}{u_1},$$

находим:

$$\nu \geqslant M\left(\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-\frac{u_1^2}{2}}}{u_1} - (\log N)^{-9} - \frac{9c_0}{L}\exp\left\{-\frac{L}{2\mathcal{F}}\right\}\right) >$$

$$> \frac{M}{2\pi}\frac{e^{-\frac{u_1^2}{2}}}{u_1}\left(1 - \frac{20\pi c_0 u_1}{L}\exp\left\{\frac{u_1^2}{2} - \frac{L}{2\mathcal{F}}\right\}\right).$$

Поскольку

$$u_1^2 - \frac{L}{\mathcal{F}} < 2\left(u^2 + \frac{8\tau^2}{\mathfrak{S}}\right) - \frac{L}{\mathcal{F}} < 2\left(u^2 + \left(\frac{ec_0}{2}\right)^2 \frac{u_0^4}{\mathfrak{S}}\right) - \frac{L}{\mathcal{F}} <$$
$$< 2\left\{\frac{2L^2}{\mathcal{F}^2\mathfrak{S}} + \left(\frac{ec_0}{2}\right)^2 \frac{L^2}{\mathcal{F}^2\mathfrak{S}}\right\} - \frac{L}{\mathcal{F}} < (ec_0)^2 \frac{L}{\mathcal{F}^2} - \frac{L}{\mathcal{F}} < -\frac{L}{2\mathcal{F}},$$

то окончательно находим:

$$\nu > \frac{M}{2\pi} \frac{e^{-\frac{u_1^2}{2}}}{u_1}\left(1 - \frac{20\pi c_0 u_1}{L} \exp\left\{-\frac{L}{4\mathcal{F}}\right\}\right) > M \exp\left\{-(ec_0)^2 \frac{L}{\mathcal{F}^2}\right\} = M\delta,$$

что и требовалось.

Неравенство для числа тех n, что отвечают условию

$$\Delta(n) \geqslant \frac{L}{\pi\mathcal{F}} = \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}},$$

доказывается аналогично. Теорема доказана.[4)]

[4)] В случае непрерывного изменения параметра t ряд верхних и нижних оценок меры множества значений t промежутка $T \leqslant t \leqslant T + H$, в которых функция $S(t)$ велика по модулю, как условных, так и безусловных, получен в следующих работах: М.А. Королёв [61]; Р.Н. Бояринов, "О распределении больших значений аргумента дзета-функции Римана", *Вестник МГУ, сер. 1. Матем. и мех.*, **6**(2010), 55-58. В частности, в последней работе доказано, что при любом $\lambda > \log\log T$ мера множества $E_\lambda(T, H)$ точек t промежутка $(T, T + H]$, удовлетворяющих условию $|S(t)| \geqslant \lambda$, не превосходит $e^2 H e^{-\kappa\lambda}$, где $\kappa = \pi\,\varepsilon^{1.5}\; e^{-19.5}$. Если же верна гипотеза Римана, то для меры множества E_j $(j = 0, 1)$ точек t промежутка $(T, 2T]$, отвечающих условию

$$(-1)^j S(t) > \frac{1}{300}\sqrt{\frac{\log T}{(\log\log T)\log\log\log T}},$$

верна оценка:

$$\operatorname{mes}(E_j) \geqslant \frac{2}{5} \frac{T}{\sqrt{\log T}(\log\log T)} \exp\left(-\frac{\log T}{\log\log T}\right), \quad j = 0, 1.$$

Глава 3

Формулы Сельберга и их следствия

Насколько известно, доказательство формул Сельберга (12) и (13) так и не было опубликовано. Однако в 1976 г. появилась статья А. Фуджи [43], содержащая вывод подобных формул для величин $\Delta_n(\chi_1,\chi_2)$. Здесь χ_1 и χ_2 – различные примитивные характеры по модулю $q\geqslant 5$,

$$0\leqslant\gamma_1(\chi_r)\leqslant\gamma_2(\chi_r)\leqslant\ldots\leqslant\gamma_n(\chi_r)\leqslant\gamma_{n+1}(\chi_r)\leqslant\ldots$$

- упорядоченные по возрастанию ординаты нулей функций $L(s,\chi_r)$, $r=1,2$, лежащих в критической полосе. Величина $\Delta_n(\chi_1,\chi_2)$ определяется для заданного n как разность $m-n$, где целое число $m=m(n)$ единственным образом находится из неравенств

$$\gamma_m(\chi_1)<\gamma_n(\chi_2)\leqslant\gamma_{m+1}(\chi_1).$$

Доказательство Фуджи формул

$$\sum_{n\leqslant N}\Delta_n^{2k}(\chi_1,\chi_2)\;=$$

$$=\;\frac{(2k)!}{k!}\,\frac{N}{(2\pi)^{2k}}\,(\log\log N)^k\;+\;O\Big((Ak)^{4k}N(\log\log N)^{k-1/2}\Big)\;+\;O\bigg(\frac{(\log N)^{2k+1}}{2k+1}\bigg),$$

$$\sum_{n\leqslant N}\Delta_n^{2k-1}(\chi_1,\chi_2)\;=\;O\Big((Ak)^{3k}N(\log\log N)^{k-1}\Big)\;+\;O\bigg(\frac{(\log N)^{2k}}{2k}\bigg)$$

опиралось на оценку интеграла

$$\mathcal{J}\;=\;\int_T^{T+H}\Big(S(t,\chi_1)-S(t,\chi_2)\Big)^l dS(t,\chi_2)\;=\;O\bigg(\frac{(\log N)^{l+1}}{l+1}\bigg). \tag{3.1}$$

Здесь $S(t,\chi)=\pi^{-1}\arg L\big(\frac12+it,\chi\big)$ - аргумент функции Дирихле $L(s,\chi)$, который определяется подобно функции $S(t)$. Вывод оценки (3.1) в [43] отсутствует.

Такое доказательство нельзя признать удовлетворительным ввиду того, что интеграл $\mathcal{J}$ как интеграл Стилтьеса не определён. Это объясняется тем, что точки разрыва кусочно-гладкой функции $S(t,\chi_2)$, по которой ведётся интегрирование, совпадают с ординатами $\gamma_n(\chi_2)$. В этих же точках терпит разрывы и интегрируемая функция $\big(S(t,\chi_1)-S(t,\chi_2)\big)^{2k}$. В такой ситуации несложно построить две последовательности интегральных сумм для $\mathcal{J}$, сходящиеся к различным пределам

(см., например, [44, п. 584]). По этой причине манипулирование с интегралом $\mathcal{J}$ (во всяком случае, без каких-либо пояснений) недопустимо.

Рассуждения Фуджи, формально применённые к задаче вычисления чётных моментов Δ_n, приводят к интегралам вида

$$\int_T^{T+H} S^{2k}(t)\,dS(t), \quad k = 1, 2, 3\ldots,$$

к которым в полной мере относится всё сказанное выше относительно интеграла $\mathcal{J}$.

Настоящая глава посвящена доказательству формул Сельберга (12) и (13), их обобщений (на случаи «короткого» промежутка изменения n; нецелых показателей k; k, растущих с ростом N) и следствий (моменты величин $S(\gamma_n \pm 0)$, $t_n - \gamma_n$). Ключевое обстоятельство, которое позволяет получить формулы Сельберга, состоит в том, что между последовательностью разностей Δ_n, рассмотренной Сельбергом, и последовательностью величин $\Delta(n) = S(t_n + 0)$, изученных в главе 2, имеется тесная связь. Эта связь находит отражение в леммах 3.3, 3.5 и 3.6 настоящей главы. Наличие этой связи позволяет легко перейти от асимптотических формул и оценок теорем 2.1 - 2.3 главы 2 к асимптотикам для соответствующих моментов величин Δ_n.

Отметим, что указанный переход может быть совершён различными способами, три из которых приводятся в настоящей работе (§§ 3.1-3.3 соответственно). Включение всех этих способов в данную работу обусловлено тем, что каждый из них приводит к новым результатам, представляющих самостоятельный интерес.

Пусть число γ является ординатой r различных нулей дзета-функции Римана, кратности которых равны $k_1, \ldots, k_r$ соответственно. Кратностью ординаты γ будем называть величину $\kappa = \kappa(\gamma)$, равную сумме этих кратностей:

$$\kappa = k_1 + \ldots + k_r.$$

Тогда из свойств функции $S(t)$ (см., например, [6, теорема 2]) следует, что

$$\kappa(\gamma) \;=\; S(\gamma + 0) - S(\gamma - 0). \tag{3.2}$$

Если $\gamma = \gamma_l$, то вместо $\kappa(\gamma)$ будем также писать κ_l. Таким образом, в случае

$$\gamma_{l-1} < \gamma_l = \gamma_{l+1} = \ldots = \gamma_{l+p-1} < \gamma_{l+p} \tag{3.3}$$

имеем: $\kappa_l = \kappa_{l+1} = \ldots = \kappa_{l+p-1} = p$.

Лемма 3.1. *Для всех достаточно больших n справедливы неравенства:*

$$|\Delta(n)| < 0.14 \log n, \quad |\Delta_n| < 0.42 \log n. \tag{3.4}$$

Доказательство. Первое неравенство сразу следует из лемм 1.19 и 9.П. Пусть, далее, $t_{m-1} < \gamma_n \leqslant t_m$. Тогда, пользуясь определением функции $N(t)$, находим:

$$N(t_{m-1} + 0) < N(\gamma_n + 0) \leqslant N(t_m + 0). \tag{3.5}$$

Заметим теперь, что $N(\gamma_n + 0) = n + \theta_n(\kappa_n - 1)$, где $0 \leqslant \theta_n \leqslant 1$. Действительно, в случае $\kappa_n = 1$ это очевидно. Пусть теперь при некотором $p \geqslant 2$ выполняются неравенства (3.5). Тогда, если $n = l + s$, $0 \leqslant s \leqslant p - 1$, имеем: $\kappa_n = p$, так что

$$N(\gamma_n + 0) = l + p - 1 = n + (p - s - 1) = n + \kappa_n - s - 1 = n + \theta_n(\kappa_n - 1), \tag{3.6}$$

где

$$0 \leqslant \theta_n = \frac{\kappa_n - s - 1}{\kappa_n - 1} \leqslant 1.$$

Преобразуя левую и правую части (3.5) с помощью формулы Римана-Мангольдта, получим:

$$m - 1 + S(t_{m-1} + 0) < n + \theta_n(\kappa_n - 1) \leqslant m + S(t_m + 0),$$

откуда

$$\theta_n(\kappa_n - 1) - S(t_m + 0) \leqslant m - n < \theta_n(\kappa_n - 1) + 1 - S(t_{m-1} + 0).$$

Пользуясь теперь равенством (3.2) наряду с оценкой леммы 9.П, находим:

$$|\Delta_n| \leqslant \kappa_n + 0.14 \log t_m < 0.28 \log \gamma_n + 0.14 \log t_m < 0.42 \log n.$$

Лемма доказана.

Замечание. Постоянная в правой части второго из неравенств (3.4) не является наилучшей. Несколько более точная оценка приведена в главе 4, где собраны основные утверждения о порядке роста величин Δ_n.

§1. Первое доказательство формул Сельберга

Пусть a, b – произвольные вещественные числа, $a < b$. Обозначим через $e(a, b)$ число решений неравенства $a < \Delta_n \leqslant b$ с условием $N < n \leqslant N + M$. Символом $f(a, b)$ будем обозначать число решений неравенства $a < \Delta(n) \leqslant b$, подчинённых тому же условию.

Следующее утверждение является ключевым для первого доказательства формул Сельберга.

Лемма 3.2. *Для целых чисел a и b, $a < b$, справедливо равенство*

$$e(a, b) = f(-(b + 1), -(a + 1)) + \theta(|a| + |b|).$$

Доказательство. Имеем, прежде всего: $e(a, b) = M - e_1 - e_2$, где e_1 и e_2 обозначают, соответственно, числа решений неравенств

$$\Delta_n \leqslant a, \quad \Delta_n > b \tag{3.7}$$

с условием $N < n \leqslant N + M$. Первое из неравенств (3.7) эквивалентно следующему:

$$\gamma_n \leqslant t_{n+a} \tag{3.8}$$

Действительно, если $t_{m-1} < \gamma_n \leqslant t_m$ и $\Delta_n = m - n \leqslant a$, то $m \leqslant n + a$ и $\gamma_n \leqslant t_m \leqslant t_{n+a}$. Обратно, если выполняется условие (3.8), то для определённого выше числа m будем иметь: $\gamma_n \leqslant t_m \leqslant t_{n+a}$, откуда $m \leqslant n + a$ и $\Delta_n \leqslant a$.

Полагая $\nu = n + a$ в (3.8), убеждаемся, что e_1 совпадает с числом решений неравенства

$$\gamma_{\nu-a} \leqslant t_\nu \tag{3.9}$$

с условием $N+a<\nu\leqslant N+M+a$ и, таким образом, не более чем на $|a|$ отличается от f_1 – числа решений (3.9) с условием $N<\nu\leqslant N+M$: $e_1=f_1+\theta_1|a|$.

Точно так же доказывается, что неравенство $\Delta_n>b$ эквивалентно неравенству $\gamma_n>t_{n+b}$, а число e_2 совпадает с числом номеров ν с условием $N+b<\nu\leqslant N+M+b$, удовлетворяющих неравенству

$$\gamma_{\nu-b}\ >\ t_\nu. \tag{3.10}$$

Следовательно, $e_2=f_2+\theta_2|b|$, где f_2 – число решений (3.10) с условием $N<\nu\leqslant N+M$.

Но если точка Грама t_ν не удовлетворяет ни одному из неравенств (3.9), (3.10), то тогда

$$\gamma_{\nu-b}\leqslant t_\nu\ <\ \gamma_{\nu-a}. \tag{3.11}$$

Покажем, что (3.11) эквивалентно двойному неравенству

$$-(b+1)<\Delta(\nu)\leqslant-(a+1). \tag{3.12}$$

Действительно, определяя число m из неравенств $\gamma_m\leqslant t_\nu<\gamma_{m+1}$, из (3.11) заключаем, что $\nu-b\leqslant m\leqslant\nu-a-1$, откуда следует (3.12). Обратно, из (3.12) для определённого выше числа m будем иметь: $\nu-b\leqslant m\leqslant\nu-a-1$ и, таким образом,

$$\gamma_{\nu-b}\leqslant\gamma_m\leqslant t_\nu<\gamma_{m+1}\leqslant\gamma_{\nu-a}.$$

Таким образом, число решений (3.11), отвечающих промежутку $N<\nu\leqslant N+M$, совпадает с $f(-(b+1),-(a+1))$, откуда

$$e(a,b)\ =\ M-e_1-e_2\ =\ M-f_1-f_2-\theta_1|a|-\theta_2|b|\ =$$
$$=\ f(-(b+1),-(a+1))\ +\ \theta(|a|+|b|).$$

Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Пусть k - целое число, $1\leqslant k\leqslant c_1\sqrt[3]{\log\log N}$, $c_1=c_0^{-1}\big(1.75\pi^2\big)^{1/3}$. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\sum_n\Delta_n^{2k}=\frac{(2k)!}{k!}\frac{M}{(2\pi)^{2k}}\,(\log\log N)^k\left(1+\frac{2.5\theta(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\log\log N}}\right),$$
$$\left|\sum_n\Delta_n^{2k-1}\right|\ <\ 0.5c_0^{\frac{3}{2}}\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{M}{(2\pi)^{2k-2}}\,(\log\log N)^{k-1}.$$

Теорема 3.2. *Пусть a - произвольное число, отличное от чётного натурального числа и удовлетворяющее условию $0<a\leqslant c_2\sqrt[3]{\log\log N}$, $c_2=\big(11^{2/3}c_0\big)^{-1}$. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_n|\Delta_n|^a\ =\ \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)(\log\log N)^{\frac{a}{2}}\big(1\ +\ \theta\,r(a)\big),$$

где[1)]

$$r(a)\ =\ \begin{cases}14.1\left(\dfrac{\log\log\log N}{\log\log N}\right)^{a/2}, & \text{если}\ \ 0<a\leqslant1,\\[2ex] \dfrac{782a}{\sqrt{\log\log N}}\big(\sqrt{\log\log\log N}\ +\ 2.2c_0^{3/2}\sqrt{a}\big), & \text{если}\ \ a>1.\end{cases}$$

[1)] См. примечание на стр. 111. То же относится и к теоремам 3.9, 3.13.

Доказательства теорем 3.1 и 3.2 проводятся единообразно. Пользуясь тем, что числа Δ_n – целые, при любом $a > 0$ будем иметь:

$$\sum_n |\Delta_n|^a = \sum_{\nu=1}^{l} \nu^a \big(e(\nu-1,\nu) + e(-(\nu+1),-\nu)\big),$$

где $l = [0.45 \log N]$ выбрано так, чтобы величины Δ_n, $\Delta(n)$ при $N < n \leqslant N+M$ не превосходили l по абсолютной величине. Пользуясь леммой 3.2, при $\nu \geqslant 2$ будем иметь:

$$e(\nu-1,\nu) = f(-(\nu+1),-\nu) + \theta_1(2\nu-1), \quad e(-(\nu+1),-\nu)) = f(\nu-1,\nu) + \theta_2(2\nu+1).$$

Следовательно,

$$\sum_n |\Delta_n|^a = \sum_{\nu=1}^{l} \nu^a \big(f(\nu-1,\nu) + f(-(\nu+1),-\nu) + 4\theta_3\nu\big) =$$

$$= \sum_n |\Delta(n)|^a + 4\theta_4 \sum_{\nu=1}^{l} \nu^{a+1}.$$

Теперь первое утверждение теоремы 3.1 и теорема 3.2 следуют из теорем 2.1 и 2.3 и оценки

$$4\sum_{\nu=1}^{l} \nu^{a+1} < \frac{4(l+1)^{a+2}}{a+2} < \big(\log N\big)^{a+2}.$$

Далее, при целом $k \geqslant 1$ имеем:

$$\sum_n \Delta_n^{2k-1} = \sum_{\nu=1}^{l} \big(\nu^{2k-1} e(\nu-1,\nu) + (-\nu)^{2k-1} e(-(\nu+1),-\nu)\big) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{l} \nu^{2k-1} \big(e(\nu-1,\nu) - e(-(\nu+1),-\nu)\big) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{l} \nu^{2k-1} \big(f(-(\nu+1),-\nu) - f(\nu-1,\nu) + 4\theta_1\nu\big) =$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{l} \big(\nu^{2k-1} f(\nu-1,\nu) + (-\nu)^{2k-1} f(-(\nu+1),-\nu)\big) + \theta_2\big(\log N\big)^{a+2} =$$

$$= -\sum_n \Delta^{2k-1}(n) + \theta_2\big(\log N\big)^{a+2}.$$

Таким образом, второе утверждение теоремы 3.1 есть следствие оценки теоремы 2.2.

Теорема 3.3. *Пусть $\Psi(v)$ - функция распределения величин Δ_n, т.е.*

$$\Psi(v) = \frac{1}{M} \#\left\{ n \,|\, N < n \leqslant N+M,\ \Delta_n \leqslant \frac{v}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\log\log N} \right\}.$$

Тогда при любом u имеет место равенство:

$$\Psi(u) = G(u) + \frac{1.79\theta}{\sqrt{\log\log\log N}}.$$

Кроме того, если $1.5 \leqslant u \leqslant \sqrt[6]{\log\log N}$, *то эта функция удовлетворяет соотношениям*

$$\frac{\Psi(-u)}{G(-u)} = 1 + O(R), \quad \frac{1-\Psi(u)}{1-G(u)} = 1 + O(R),$$

в которых

$$R = \frac{u(u^2 + \log\log\log N)}{\sqrt{\log\log N}},$$

а постоянные в знаках O *зависят от* ε.[2)]

Доказательство. Докажем сперва первую часть утверждения теоремы. Согласно лемме 3.1, при

$$|u| \geqslant \frac{\pi \log N}{\sqrt{2\log\log N}}$$

оно тривиально. В противном случае, пользуясь обозначениями и утверждениями леммы 3.2 и теоремы 2.4, будем иметь:

$$\begin{aligned} M\Psi(u) = e\left(-\infty, \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}}\right) = e\left(-\frac{1}{2}\log N, \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}}\right) = \\ = f\left(-\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}} - 1, \frac{1}{2}\log N + 1\right) + \theta_1 \log N = \\ = f\left(-\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}} - 1, +\infty\right) + \theta_1 \log N = M\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv + \theta\Delta\right), \end{aligned}$$

где $\Delta = 1.79(\log\log\log N)^{-0.5}$.

Докажем вторую часть утверждения. Применяя леммы 3.1, 3.2, получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} M\Psi(-u) = e\left(-\infty, -\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}}\right) = e\left(-\frac{1}{2}\log N, -\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}}\right) = \\ = f\left(\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}} - 1, \frac{1}{2}\log N + 1\right) + \theta\log N = f\left(\frac{u_1}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}}, +\infty\right) + \theta\log N = \\ = M\big(1 - \Phi(u_1)\big) + \theta\log N, \end{aligned}$$

где $u_1 = u - h$, $h = \pi\sqrt{2/L}$. В силу теоремы 2.4 имеем:

$$1 - \Phi(u_1) = \big(1 - G(u_1)\big)(1 + O(R)) = G(-u_1)\big(1 + O(R)\big) = G(-u)\big(1 + O(R)\big),$$

откуда и следует первое соотношение. Второе утверждение доказывается аналогично. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $f(x)$ *- монотонная положительная функция, неограниченно возрастающая при* $x \to +\infty$. *Тогда для «почти всех»* n *из промежутка* $N < n \leqslant N + M$ *справедливы неравенства*

$$\frac{1}{f(n)}\sqrt{\log\log n} < |\Delta_n| \leqslant f(n)\sqrt{\log\log n}.$$

[2)] См. примечания на стр. 117, 129. То же относится и к теоремам 3.10, 3.14.

Иными словами, гипотеза Сельберга верна и в случае «короткого» промежутка изменения n.

Теорема 3.4. *Пусть $f(x)$ - произвольная монотонно возрастающая и неограниченная при $x \to +\infty$ функция, удовлетворяющая при $N \leqslant x \leqslant N+M$ условиям $a \leqslant f(x) \leqslant b\sqrt{\log\log x}$, где a и b - абсолютные постоянные. Пусть, далее,*

$$\mathcal{F} = f(N), \quad \delta = 0.5 \exp\left\{-(ec_0)^2 \frac{\log\log N}{\mathcal{F}}\right\}.$$

Тогда на промежутке $N \leqslant n \leqslant N+M$ найдётся не менее $M\delta$ номеров n, удовлетворяющих условию $\Delta_n \leqslant -(\pi\mathcal{F})^{-1}\log\log N$, и не менее $M\delta$ номеров, удовлетворяющих условию $\Delta_n > (\pi\mathcal{F})^{-1}\log\log N$.

Доказательство сразу следует из теоремы 2.5 и леммы 3.2.

§2. Второе доказательство формул Сельберга

В этом параграфе приведён ещё один способ вывода формул Сельберга из теорем 2.1 и 2.2. Этот способ приводит к несколько менее точным результатам (по сравнению с теоремой 3.1) и не позволяет вывести асимптотическую формулу для моментов дробных степеней непосредственно из теоремы 2.3 (во всяком случае, без применения всех тех приёмов, что были использованы при её доказательстве). Тем не менее, его применение кажется более «естественным» по той причине, что он не использует никакой информации о распределении чисел $\Delta(n)$ и Δ_n (типа свойств величин $e(a,b)$ и $f(a,b)$) и опирается лишь на вычисление сумм, содержащих значения $S(t_n+0)$. Кроме того, возникающие при таком подходе суммы

$$T_k = \sum_n S^k(t_n+0)\big(S(t_n+0) - S(t_{n-1}+0)\big)$$

оказываются полезными при решении некоторых других задач, связанных с распределением нулей $\zeta(s)$ (см. §§ 3.6, 3.7).

Пусть, как и выше, $X = N^{0.1\varepsilon}$. Кроме того, положим для краткости

$$r(n) = S(t_n+0) - S(t_{n-1}+0) = \Delta(n) - \Delta(n-1).$$

Для второго доказательства формул Сельберга нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Теорема 3.5. *Пусть k – целое число с условием $1 \leqslant k \leqslant c\log X$, где c - достаточно малая абсолютная постоянная. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_n r^{2k}(n) < c_0(2c_0k)^{2k}M.$$

Доказательство. Положим, как и выше,

$$x = X^{\frac{1}{8k+3}}, \quad W(t) = -\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}, \quad R(t) = S(t) + W(t)$$

и обозначим

$$w_n = W(t_{n+1}) - W(t_n), \quad u_n = R(t_{n+1}+0) - R(t_n+0).$$

В силу леммы 1.1, при $N < n \leqslant N+M$ имеем равенство $t_{n+1} - t_n = 2h + \varepsilon_n$, в котором

$$h = \frac{\pi}{2\,\vartheta'(t_N)}, \quad |\,\varepsilon_n\,| < MN^{-1}.$$

Замечая, что

$$|W'(t)| \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x}\frac{\log p}{\sqrt{p}} < \sqrt{x},$$

найдём:

$$\begin{aligned} w_n = W(t_n + 2h + \varepsilon_n) - W(t_n) = W(t_n+2h) - W(t_n) + \theta_1 MN^{-1}\sqrt{x} = \\ = -\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{\sqrt{p}}\big(\sin\big((t_n+2h)\log p\big) - \sin(t_n\log p)\big) + \theta_1 MN^{-1}\sqrt{x} = \\ = -\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x} a_p\, p^{it_n} + \theta_1 MN^{-1}\sqrt{x}, \end{aligned}$$

где $a_p = p^{-0.5+ih}\sin(h\log p)$. Согласно лемме 2.1, имеем оценку

$$\sum_n w_n^{2k} \leqslant \frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M}{2^{2k}}\,\mathfrak{s}^k + \sqrt{X}, \quad \text{где} \quad \mathfrak{s} = \sum_{p\leqslant x}|a_p|^2 = \sum_{p\leqslant x}\frac{\sin^2(h\log p)}{p}.$$

Согласно лемме 2.П, сумма $\mathfrak{s}$ не превосходит

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{(h\log p)^2}{p} < (h\log x)^2 < \left(\frac{\varepsilon}{80k}\right)^2.$$

Поэтому

$$\sum_n w_n^{2k} \leqslant \frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M}{2^{2k}}\left(\frac{\varepsilon}{80k}\right)^{2k} + \sqrt{X} < \frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon}{80}\right)^{2k} M. \tag{3.13}$$

Возвращаясь к сумме из условия теоремы и применяя неравенство леммы 9.П, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{N\leqslant n<N+M}\big(S(t_n+0) - S(t_{n-1}+0)\big)^{2k} = \sum_n\big(u_n - w_n\big)^{2k} + 2\theta_1(0.5\log N)^{2k} = \\ = \sum_{\nu=0}^{2k}(-1)^\nu\binom{2k}{\nu}\sum_n u_n^\nu w_n^{2k-\nu} + 2\theta_1(0.5\log N)^{2k} \leqslant \sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}2^{\nu-1}\big(W'_\nu + W''_\nu\big), \end{aligned}$$

где

$$W_\nu^{(j)} = \sum_n |R(t_{n+j-1}+0)|^\nu v_\nu^{2k-\nu}, \quad j = 1, 2.$$

Применяя неравенство Гёльдера наряду с (3.13) оценкой леммы 2.7, будем иметь:

$$W'_\nu \leqslant \left(\sum_n v_n^{2k}\right)^{1-\frac{\nu}{2k}} \left(\sum_n R^{2k}(t_n+0)\right)^{\frac{\nu}{2k}} \leqslant$$
$$\leqslant M\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon}{80}\right)^{2k}\right\}^{1-\frac{\nu}{2k}} \left\{\frac{c_0}{18}(c_0k)^{2k}\right\}^{\frac{\nu}{2k}} <$$
$$< \frac{3}{2}\,M\left(\frac{\varepsilon}{80}\right)^{2k}\left\{\frac{80c_0k}{\varepsilon}\left(\frac{c_0}{27}\right)^{\frac{1}{2k}}\right\}^{\nu}$$

(эта же оценка верна и для W''_ν). Следовательно,

$$\sum_n r^{2k}(n) < \frac{3}{2}\,M\left(\frac{\varepsilon}{80}\right)^{2k}\sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}\left\{\frac{80c_0k}{\varepsilon}\left(\frac{c_0}{27}\right)^{\frac{1}{2k}}\right\}^{\nu} + 2(0.5\log N)^{2k} =$$
$$= \frac{3}{2}\,M\left\{\frac{\varepsilon}{80}\cdot\frac{160c_0k}{\varepsilon}\left(\frac{c_0}{27}\right)^{\frac{1}{2k}}\right\}^{2k}\left(1+\frac{\varepsilon}{160c_0k}\right)^{2k} + 2(0.5\log N)^{2k} <$$
$$< c_0(2c_0k)^{2k}M.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.6. *Пусть k – целое число с условием $1 \leqslant k \leqslant c_1\sqrt[3]{\log\log N}$. Тогда имеют место оценки:*

$$|T_{2k-1}| \;<\; 1.5c_0^3k\,4^k\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{M}{(2\pi)^{2(k-1)}}\,(\log\log N)^{k-1},$$
$$|T_{2k}| \;<\; 42(c_0k)^{\frac{5}{2}}4^k\,\frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M}{(2\pi)^{2k}}\,(\log\log N)^{k-\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Оценим сперва сумму T_{2k-1}. Полагая $a=\Delta(n)$, $b=r(n)$ в легко проверяемом тождестве

$$(a-b)^{2k} \;=\; a^{2k} - 2ka^{2k-1}b + \theta_1k^2 2^{2k-2}(a^{2k-2}b^2 + b^{2k}),$$

после несложных преобразований получим:

$$2k\Delta^{2k-1}(n)r(n) \;=\; \Delta^{2k}(n) - \Delta^{2k}(n-1) + \theta_2k^2 2^{2k-2}\big(r^{2k}(n) + \Delta^{2k-2}(n)r^2(n)\big).$$

Суммируя по n, приходим к равенству

$$2kT_{2k-1} \;=\; \Delta^{2k}(N+M) - \Delta^{2k}(N) + \theta_3k^2 2^{2k-2}(W_1+W_2),$$

где

$$W_1 = \sum_n r^{2k}(n), \quad W_2 = \sum_n \Delta^{2k-2}(n)r^2(n).$$

Согласно теореме 3.5, $W_1 < c_0(2c_0k)^{2k}M$. Пользуясь неравенством Гёльдера наряду с обозначениями и утверждением теоремы 2.1, будем иметь:

$$W_2 \leqslant \left(\sum_n \Delta^{2k}(n)\right)^{1-\frac{1}{k}} W_1^{\frac{1}{k}} < \big(2.01\mathcal{L}_k\big)^{1-\frac{1}{k}}\big(c_0(2c_0k)^{2k}M\big)^{\frac{1}{k}} <$$
$$< 2.01\,\frac{\mathcal{L}_k}{L}\left\{\frac{k!}{(2k)!}\,c_0(4\pi c_0k)^{2k}\right\}^{\frac{1}{k}} < 10.95c_0^3\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}.$$

Следовательно,

$$W_1+W_2<c_0(2c_0k)^{2k}M\ +\ 10.95c_0^3\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}<$$
$$<\ 10.95c_0^3\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}\Big(1+\frac{L}{40(\pi c_0)^2}\,\frac{(k-1)!}{(2k)!}\Big(\frac{4\pi c_0k}{\sqrt{L}}\Big)^k\Big)<$$
$$<11c_0^3\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}},$$

откуда

$$|T_{2k-1}|<(0.5\log N)^{2k}+\frac{4^kk}{8}\,11c_0^3\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}<1.5c_0^3k4^k\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}.$$

Оценим теперь сумму T_{2k}. Полагая $a=\Delta(n)$, $b=r(n)$ в тождестве

$$(a-b)^{2k+1}=a^{2k+1}-(2k+1)a^{2k}b+\theta_1k(2k+1)2^{2k-2}\big(|b|^{2k+1}+|a|^{2k-1}b^2\big),$$

после преобразований получим:

$$(2k+1)T_{2k+1}=\Delta^{2k}(N+M)-\Delta^{2k+1}(N)+\theta_2k(2k+1)2^{2k-2}(W_3+W_4),$$

где

$$W_3=\sum_n|r(n)|^{2k+1},\quad W_4=\sum_n|\Delta(n)|^{2k-1}r^2(n).$$

В силу неравенства Гёльдера и теоремы 3.5 имеем:

$$W_3=\sum_n|r(n)|^{2k-1}r^2(n)\leqslant W_1^{1-\frac{1}{2k}}\Big(\sum_n r^{4k}(n)\Big)^{\frac{1}{2k}}<4c_0(2c_0k)^{2k+1}M.$$

Далее,

$$W_4\leqslant\Big(\sum_n\Delta^{2k}(n)\Big)^{1-\frac{1}{2k}}\Big(\sum_n r^{4k}(n)\Big)^{\frac{1}{2k}}<$$
$$<2\,\frac{\mathcal{L}_k}{\sqrt{L}}\Big\{\frac{k!}{(2k)!}\,c_0(2\pi)^{2k}(4c_0k)^{4k}\Big\}^{\frac{1}{2k}}<165.8\,\frac{c_0^{\frac{5}{2}}k^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\,\mathcal{L}_k.$$

Следовательно,

$$W_3+W_4<165.8\,\frac{c_0^{\frac{5}{2}}k^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\,\mathcal{L}_k\Big(1+\frac{1}{48}\sqrt{\frac{L}{c_0k}}\Big(\frac{(2\pi c_0)^2ek}{L}\Big)^k\Big)<166\,\frac{c_0^{\frac{5}{2}}k^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\,\mathcal{L}_k,$$
$$|T_{2k}|\ <\ 41.5k\cdot4^k\,\frac{c_0^{\frac{5}{2}}k^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\,\mathcal{L}_k<42\,(c_0k)^{\frac{5}{2}}\,4^k\,\frac{\mathcal{L}_k}{\sqrt{L}}.$$

Теорема доказана.

Следующая лемма раскрывает «геометрический» смысл величины $r(n)$.

Лемма 3.3. *Величина $r(n)+1$ равна числу ординат нулей $\zeta(s)$, попавших на промежуток Грама $G_n=(t_{n-1},t_n]$ или, что то же,*

$$r(n)=N(t_n+0)-N(t_{n-1}+0)-1.$$

В частности, $r(n)\geqslant -1$ при любом n.

Доказательство. Воспользовавшись формулой Римана-Мангольдта, будем иметь:

$$N(t_n+0)-N(t_{n-1}+0) \;=\; \big(\pi^{-1}\,\vartheta(t_n)+1+S(t_n+0)\big)-\big(\pi^{-1}\,\vartheta(t_{n-1})+1+S(t_{n-1}+0)\big)= \\ =1+\Delta(n)-\Delta(n-1)=1+r(n).$$

Лемма доказана.

Второе доказательство формул Сельберга опирается на следующую лемму, которая устанавливает связь между суммой величин Δ_m^k, распространённой на все ординаты γ_m из n-го промежутка Грама G_n, с величиной $\Delta^k(n)$.

Лемма 3.4. *Пусть k и n – произвольные натуральные числа и пусть промежуток Грама $G_n=(t_{n-1},t_n]$ содержит $(r+1)$ ординату нулей $\zeta(s)$, где $r=r(n)\geqslant -1$. Тогда справедливы равенства*:

$$\sum_{t_{n-1}<\gamma_m\leqslant t_n}\Delta_m^{2k} \;=\; (r+1)\Delta^{2k}(n)\;+\;\theta_1 k 2^{2k}\big(|\Delta(n)|^{2k-1}r^2\;+\;|r|^{2k+1}\big), \tag{3.14}$$

$$\sum_{t_{n-1}<\gamma_m\leqslant t_n}\Delta_m^{2k-1} \;=\; -(r+1)\Delta^{2k-1}(n)\;+\;\theta_2 k 2^{2k}\big(\Delta^{2k-2}(n)r^2\;+\;r^{2k}\big). \tag{3.15}$$

Доказательство. Рассмотрим сперва случай $r=-1$, когда G_n не содержит ни одной ординаты. Тогда суммы в левых частях (3.14),(3.15) пусты и утверждение леммы будет выполнено, если положить $\theta_1=\theta_2=0$.

Пусть теперь $r\geqslant 0$ и пусть при некотором $s\geqslant 1$ выполнены неравенства:

$$\gamma_{s-1}\leqslant t_{n-1}\;<\;\gamma_s\leqslant\gamma_{s+1}\leqslant\ldots\leqslant\gamma_{s+r}\leqslant t_n\;<\;\gamma_{s+r+1}.$$

Тогда $\Delta(n)=S(t_n+0)=N(t_n+0)-\pi^{-1}\,\vartheta(t_n)-1=s+r-n$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\Delta_s \;&=\; n-s\;=\;r-\Delta(n),\\ \Delta_{s+1}\;&=\;n-s-1\;=\;r-1-\Delta(n),\\ &\ldots\\ \Delta_{s+r}\;&=\;n-s-r\;=\;-\Delta(n).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{t_{n-1}<\gamma_m\leqslant t_n}\Delta_m^{2k}\;=\;\sum_{m=s}^{s+r}\Delta_m^{2k}\;= \\ =\sum_{j=0}^{r}\big(j\;-\;\Delta(n)\big)^{2k}\;=\;\sum_{j=0}^{r}\big(\Delta^{2k}(n)\;+\;\theta_1\,2kj\,2^{2k-2}(|\Delta(n)|^{2k-1}\;+\;j^{2k-1})\big)\;= \\ =\;(r+1)\Delta^{2k}(n)\;+\;\theta_2 k 2^{2k}\big(|\Delta(n)|^{2k-1}r^2\;+\;r^{2k+1}\big).$$

Равенство (3.15) выводится аналогично. Лемма доказана.

Второе доказательство формул Сельберга. Определим целые числа μ и ν из неравенств

$$\gamma_\mu \leqslant t_N < \gamma_{\mu+1}, \quad \gamma_\nu \leqslant t_{N+M} < \gamma_{\nu+1}$$

и рассмотрим сумму

$$V_{2k-1} = \sum_{m=\mu+1}^{\nu} \Delta_m^{2k-1}.$$

Из определения величин $\Delta(n)$ и леммы 3.1 имеем:

$$|\mu - N| = \big|N(t_N + 0) - N\big| = \big|\pi^{-1}\,\vartheta(t_N) + 1 + S(t_N + 0) - N\big| = |\Delta(N)| < 0.15 \log N$$

и, аналогично, $|\nu - (N + M)| < 0.15 \log N$. Таким образом, сумма V_{2k-1} отличается от суммы $\sum\limits_m \Delta_m^{2k-1}$ не более чем $2 \cdot 0.15 \log N$ слагаемыми, каждое из которых, в силу леммы 3.1, не превосходит по модулю $(0.15 \log N)^{2k-1}$, т.е.

$$V_{2k-1} \;=\; \sum_m \Delta_m^{2k-1} \;+\; 2\theta_1 (0.15 \log N)^{2k}.$$

С другой стороны, из леммы 3.4 следуют равенства

$$\begin{aligned} V_{2k-1} = \sum_n \sum_{t_{n-1} < \gamma_m \leqslant t_n} \Delta_m^{2k} = \\ = -\sum_n \big((r(n)+1)\Delta^{2k-1}(n) + \theta_2 k 2^{2k} (\Delta^{2k-2}(n) r^2(n) \;+\; r^{2k}(n))\big) \;= \\ = -\sum_n \Delta^{2k-1}(n) - T_{2k-1} + \theta_3 k 2^{2k} (W_1 + W_2), \end{aligned}$$

где через W_1 и W_2 обозначены те же суммы, что встречались при доказательстве теоремы 3.6. Воспользовавшись их оценками наряду с утверждениями теорем 1.2 и 3.6, найдём:

$$\begin{aligned} |V_{2k-1}| < \frac{c_0^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{(2k)!}{(k-1)!} \frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}} \;+\; c_0^3 k 4^k \frac{(2k)!}{(k-1)!} \frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}} + \\ + 6 c_0^3 k 4^k \frac{(2k)!}{(k-1)!} \frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}} < 7.1 c_0^3 k 4^k \frac{(2k)!}{(k-1)!} \frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}, \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\left|\sum_m \Delta_m^{2k-1}\right| \;<\; 7.2 c_0^3 k 4^k \frac{(2k)!}{(k-1)!} \frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}.$$

Подобные рассуждения приводят в случае чётных моментов к равенству

$$\sum_{m=\mu+1}^{\nu} \Delta_m^{2k} \;=\; \sum_n \Delta^{2k}(n) + T_{2k} + \theta_3\, k 2^{2k} (W_3 + W_4),$$

где W_3, W_4 сохраняют тот же смысл, что и в теореме 3.6. Следовательно,

$$\sum_m \Delta_m^{2k} = \mathcal{L}_k\left(1+\frac{2.4\theta_4(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\right)+41.5\theta_5\,\mathcal{L}_k\cdot\frac{(c_0k)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{L}}+$$
$$+\ 166\theta_6\,\mathcal{L}_k\cdot\frac{(c_0k)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{L}}+2\theta_7(0.15\log N)^{2k+1}=\mathcal{L}_k\left(1+\frac{208\theta_8(c_0k)^{\frac{5}{2}}4^k}{\sqrt{L}}\right).$$

Теорема доказана.

В отличие от теорем 2.1, 2.2, полученные выше утверждения менее точны. Несложно заметить, например, что формулы для чётных моментов будут асимптотическими лишь при $k\leqslant\big((4\log 2)^{-1}-\delta\big)\log\log\log N$. Тем не менее и они позволяют доказать первое утверждение теоремы 3.3 о распределении величин Δ_n и, в частности, предположение Сельберга о «нормальном» порядке этих величин.

Отметим и следующее обстоятельство. Тривиальная оценка суммы T_k типа

$$|T_k|=\left|\sum_n\Delta^k(n)r(n)\right|\leqslant\left(\sum_n\Delta^{2k}(n)\sum_n r^2(n)\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant c(k)M(\log\log N)^{\frac{k}{2}},$$

является слишком грубой и недостаточна для вывода формул Сельберга. Причина, по которой происходит потеря точности, состоит в том, что при таком подходе теряется информация о знаках слагаемых, и, в частности, о знаках целых чисел $r(n)$. Согласно лемме 3.3, $r(n)\geqslant -1$ при любом n. Оказывается (это будет доказано ниже), что в положительной доле случаев величина $r(n)$ принимает значение (-1), и в положительной же доле случаев является строго положительной. Это означает, что суммы T_k (во всяком случае, при чётных k) являются знакопеременными. Приём же, использованный при доказательстве теоремы 3.6, позволяет «уловить» взаимное погашение слагаемых, имеющих разные знаки.

§3. Третье доказательство формул Сельберга

Несмотря на то, что оценка знакопеременной суммы T_k не представляет значительных трудностей, рассмотрение явного вида «остаточных членов» формул (3.14) и (3.15) позволяет и вовсе избежать применения таких оценок и вывести формулы Сельберга столь же точные, что были получены в теореме 3.1, не опираясь при этом и на какие-либо утверждения о распределении чисел Δ_n. Это и составляет цель настоящего параграфа.

Пусть, как и выше, $r(n)=\Delta(n)-\Delta(n-1)$. Для неотрицательных целых p и q положим

$$T_{p,q}=\sum_n r^p(n)\Delta^q(n),$$

так что

$$\sum_n\Delta^k(n)=T_{0,k},\quad T_k=\sum_n\Delta^k(n)r(n)=T_{1,k}.$$

Пусть, наконец, B_ν – числа Бернулли: $B_0=1$, $B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $B_6=\frac{1}{42},\ldots$, $B_3=B_5=B_7=\ldots=0$.

Лемма 3.5. *При любых целых $k \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$ справедливо тождество*:

$$\sum_{t_{n-1}<\gamma_m \leqslant t_n} \Delta_m^k \;=\; \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \binom{k}{q} \Delta^q(n) \big(r^{k-q} + F_{k+1-q}(r)\big), \tag{3.16}$$

где $r = r(n)$,

$$F_p(x) = \frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{p-1} \binom{p}{\nu} B_\nu x^{p-\nu}.$$

Доказательство. Рассмотрим сперва случай, когда промежуток Грама $G_n = (t_{n-1}, t_n]$ содержит по меньшей мере одну ординату нуля $\zeta(s)$. Именно, пусть

$$\gamma_{s-1} \leqslant t_{n-1} < \gamma_s \leqslant \gamma_{s+1} \leqslant \ldots \leqslant \gamma_{s+r} \leqslant t_n < \gamma_{s+r-1},$$

где, в силу леммы 3.3, $r = r(n) \geqslant 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\Delta(n) \;=\; s + r - n;\\
&\Delta_s \;=\; n - s \;=\; r - \Delta(n),\\
&\Delta_{s+1} \;=\; n - s - 1 \;=\; r - 1 - \Delta(n),\\
&\ldots\\
&\Delta_{s+r} \;=\; n - s - r \;=\; -\Delta(n),
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
\sum_{t_{n-1}<\gamma_m \leqslant t_n} \Delta_m^k \;&=\; \sum_{m=s}^{s+r} \Delta_m^k \;=\; \sum_{j=0}^{r} (j - \Delta(n))^k \;=\\
&=\; \sum_{j=0}^{r} \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \binom{k}{q} \Delta^q(n) j^{k-q} \;=\; \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \binom{k}{q} \Delta^q(n) \sum_{j=0}^{r} j^{k-q}.
\end{aligned}$$

Пользуясь известным свойством чисел Бернулли (см., например, [45, §1 гл. IV]), при $r \geqslant 1$ находим:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{r} j^{k-q} \;&=\; r^{k-q} + \sum_{j=0}^{r-1} j^{k-q} \;=\; r^{k-q} + \frac{1}{k-q+1} \sum_{\nu=0}^{k-q} \binom{k-q+1}{\nu} B_\nu r^{k-q+1-\nu} \;=\\
&=\; r^{k-q} + F_{k-q+1}(r).
\end{aligned}$$

Последнее равенство остается в силе и при $r = 0$, поскольку $F_{k-q+1}(0) = 0$ для любого q, $0 \leqslant q \leqslant k$. Таким образом,

$$\sum_{t_{n-1}<\gamma_m \leqslant t_n} \Delta_m^k \;=\; \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \binom{k}{q} \Delta^q(n) \big(r^{k-q} + F_{k-q+1}(r)\big).$$

Рассмотрим теперь случай, когда промежуток $(t_{n-1}, t_n]$ не содержит ни одной ординаты. В этом случае, согласно лемме 3.3, имеем:

$$r(n) \;=\; N(t_n + 0) - N(t_{n-1} + 0) - 1 \;=\; -1.$$

Сумма по $t_{n-1} < \gamma_m \leqslant t_n$ из условия леммы оказывается пустой. Таким образом, достаточно проверить, что правая часть (3.16) обращается в нуль при подстановке $r = -1$. Но это сразу следует из соотношений

$$F_{p+1}(x+1) - F_{p+1}(x) \,=\, x^p, \quad F_{p+1}(0) \,=\, 0.$$

Лемма доказана.

Пример 3.1. Пусть $k = 2$. Тогда при $r = r(n) \geqslant 0$ имеем:

$$\sum_{t_{n-1}<\gamma_m \leqslant t_n} \Delta_m^2 \,=\, \sum_{j=0}^{r} (j - \Delta(n))^2 \,=\, \sum_{j=0}^{r} (j^2 - 2j\Delta(n) + \Delta^2(n)) \,=$$
$$=\, \frac{1}{6}\, r(r+1)(2r+1) \,-\, r(r+1)\Delta(n) \,+\, (r+1)\Delta^2(n).$$

Правая часть равенства обращается в нуль при $r = -1$, совпадая, таким образом, и в этом случае с левой частью. ⊠

Теорема 3.7. *При любом $k \geqslant 1$ имеет место тождество*

$$\sum_{t_N<\gamma_m \leqslant t_{N+M}} \Delta_m^k \,=\, (-1)^k\, T_{0,k} \,+\, \alpha^k - \beta^{\,k} \,+\, F_{k+1}(\alpha) - F_{k+1}(\beta), \tag{3.17}$$

где $\alpha = -\Delta(N)$, $\beta = -\Delta(N+M)$.

Доказательство. Согласно лемме 3.5,

$$\sum_{t_{n-1}<\gamma_m \leqslant t_n} \Delta_m^k \,=\, \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \binom{k}{q} r^{k-q}(n)\Delta^q(n) \,+$$
$$+\, \sum_{q=0}^{k} \frac{(-1)^q}{k+1-q} \binom{k}{q} \sum_{p=1}^{k-q+1} \binom{k+1-q}{p} B_{k+1-q-p}\, r^p(n)\Delta^q(n).$$

Суммируя обе части этого равенства по n и обозначая левую часть (3.17) через V_k, находим:

$$V_k \,=\, \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \binom{k}{q} T_{k-q,q} \,+\, \sum_{q=0}^{k} \frac{(-1)^q}{k+1-q} \binom{k}{q} \sum_{p=1}^{k-q+1} \binom{k+1-q}{p} B_{k+1-q-p}\, T_{p,q} \,=$$
$$=\, \frac{1}{k+1} T_{k+1,0} \,+\, \frac{1}{2} T_{k,0} \,+\, \frac{1}{k+1} \sum_{p=1}^{k-1} \binom{k+1}{p} B_{k+1-p}\, T_{p,0} \,+$$
$$+\, \sum_{q=1}^{k} (-1)^q \binom{k}{q} T_{k-q,q} \,+\, \sum_{q=1}^{k} \frac{(-1)^q}{k+1-q} \binom{k}{q} \sum_{p=1}^{k-q+1} \binom{k+1-q}{p} B_{k+1-q-p}\, T_{p,q}. \tag{3.18}$$

Выразим теперь каждую из сумм $T_{p,0}$, $1 \leqslant p \leqslant k+1$, через суммы $T_{p-q,q}$, $1 \leqslant q \leqslant p-1$. Для этого воспользуемся тождеством

$$\Delta^p(n) - \Delta^p(n-1) \,=\, \Delta^p(n) - (\Delta(n) - r(n))^p \,=\, \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{p-q-1} \binom{p}{q} r^{p-q}(n)\Delta^q(n).$$

Суммируя обе его части по n и полагая $D_p = \Delta^p(N+M) - \Delta^p(N)$, будем иметь:

$$D_p \;=\; \sum_{q=0}^{p-1}(-1)^{p-q-1}\binom{p}{q}T_{p-q,q},$$

$$T_{p,0} \;=\; (-1)^{p-1}D_p \;+\; \sum_{q=1}^{p-1}(-1)^{q-1}\binom{p}{q}T_{p-q,q}. \tag{3.19}$$

Заменяя в (3.18) величины $T_{p,0}$ их выражениями (3.19), заметим следующее. Так как слагаемое, содержащее $T_{0,k}$, в формулах (3.19) не встречается ни при каком p, то коэффициент, с которым $T_{0,k}$ входит в (3.18), равен $(-1)^k\binom{k}{k} = (-1)^k$.

Далее, при подстановке в (3.18) выражения для $T_{p,0}$ $(p \neq k)$ возникает слагаемое

$$\frac{(-1)^{p-1}D_p}{k+1}\binom{k+1}{p}B_{k+1-p} \;=\; \binom{k+1}{p}\frac{B_{k+1-p}}{k+1}(\alpha^p - \beta^p);$$

коэффициент, с которым в получившееся выражение будет входить сумма $T_{p-q,q}$, $1 \leqslant q \leqslant p-1$, равен

$$\frac{(-1)^{q-1}}{k+1}\binom{k+1}{p}\binom{p}{q}B_{k+1-p} \;+\; \frac{(-1)^q}{k+1-q}\binom{k}{q}\binom{k+1-q}{p-q}B_{k+1-p} \;=$$
$$=\; (-1)^{q-1}B_{k+1-p}\left(\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{p}\binom{p}{q} \;-\; \frac{1}{k+1-q}\binom{k}{q}\binom{k+1-q}{p-q}\right) \;=\; 0.$$

Наконец, при подстановке в (3.18) выражения для $T_{k,0}$ возникает слагаемое

$$\frac{1}{2}(-1)^{k-1}D_k \;=\; \frac{1}{2}(\alpha^k - \beta^k);$$

коэффициент при сумме $T_{k-q,q}$, $1 \leqslant q \leqslant k-1$, окажется равным

$$\frac{1}{2}(-1)^{q-1}\binom{k}{q} \;+\; (-1)^q\binom{k}{q} \;+\; \frac{(-1)^q B_1}{k+1-q}\binom{k}{q}\binom{k+1-q}{k-q} \;=\; 0.$$

Таким образом,

$$V_k \;=\; (-1)^k T_{0,k} \;+\; \frac{1}{2}(\alpha^k - \beta^k) \;+\; \sum_{p=1,\,p\neq k}^{k+1}\binom{k+1}{p}\frac{B_{k+1-p}}{k+1}(\alpha^p - \beta^p) \;=$$
$$=\; (-1)^k T_{0,k} \;+\; \alpha^k - \beta^k \;+\; \frac{1}{k+1}\sum_{q=0}^{k}\binom{k+1}{q}B_q(\alpha^{k+1-q} - \beta^{k+1-q}) \;=$$
$$=\; (-1)^k T_{0,k} \;+\; \alpha^k - \beta^k \;+\; F_{k+1}(\alpha) - F_{k+1}(\beta).$$

Теорема доказана.

Пример 3.2. Пусть $k = 2$. Суммируя по n обе части равенства

$$\sum_{t_{n-1}<\gamma_m\leqslant t_n}\Delta_m^2 \;=\; \frac{1}{3}\,r^3 \;+\; \frac{1}{2}\,r^2 \;+\; \frac{1}{6}\,r \;-\; r^2\Delta(n) \;-\; r\Delta(n) + r\Delta^2(n) + \Delta^2(n)$$

из примера 1, находим:

$$V_2 \,=\, \frac{1}{3}\,T_{3,0} + \frac{1}{2}\,T_{2,0} + \frac{1}{6}\,T_{1,0} \,-\, T_{2,1} \,-\, T_{1,1} \,+\, T_{1,2} \,+\, T_{0,2}. \tag{3.20}$$

Далее, из тождеств

$$\begin{aligned}
&\Delta^3(n) \,-\, \Delta^3(n-1) \,=\, \Delta^3(n) - (\Delta(n) - r)^3 \,=\, 3r\Delta^2(n) \,-\, 3r^2\Delta(n) \,+\, r^3,\\
&\Delta^2(n) \,-\, \Delta^2(n-1) \,=\, 2r\Delta(n) \,-\, r^2,\\
&\Delta(n) \,-\, \Delta(n-1) \,=\, r
\end{aligned}$$

суммированием по n находим:

$$D_3 \,=\, 3T_{1,2} - 3T_{2,1} + T_{3,0}, \quad D_2 \,=\, 2T_{1,1} - T_{2,0}, \quad D_1 \,=\, T_{1,0},$$

откуда

$$T_{3,0} \,=\, D_3 - 3T_{1,2} + 3T_{2,1}, \quad T_{2,0} \,=\, -D_2 \,+\, 2T_{1,1}, \quad T_{1,0} \,=\, D_1.$$

Подставляя эти выражения в (3.20), будем иметь:

$$\begin{aligned}
V_2 \,=\, \left(\frac{1}{3}\,D_3 - T_{1,2} + T_{2,1}\right) \,+\, \left(-\frac{1}{2}\,D_2 + T_{1,1}\right) \,+\, \frac{1}{6}\,D_1 \,-\\
-\, T_{2,1} - T_{1,1} + T_{1,2} + T_{0,2} \,=\, T_{0,2} + \frac{1}{3}\,D_3 \,-\, \frac{1}{2}\,D_2 \,+\, \frac{1}{6}\,D_1. \quad \boxtimes
\end{aligned}$$

Следствие. *При любом целом $k \geqslant 1$ имеет место оценка*

$$\left|\sum_n \Delta_n^k \,-\, (-1)^k \sum_n \Delta^k(n)\right| \leqslant 16k!(0.15\log N)^{k+1}.$$

Доказательство. Прежде всего, пользуясь оценкой леммы 9.П, находим: $|D_p| \leqslant 2H^p$, где $H = 0.15\log N$. Далее, замечая, что

$$|B_{2s}| \,=\, \frac{2(2s)!}{(2\pi)^{2s}}\,\zeta(2s) \,<\, \frac{4(2s)!}{(2\pi)^{2s}},$$

находим: $|B_q| < 4q!(2\pi)^{-q}$ при любом $q \geqslant 1$, так что

$$\begin{aligned}
\left|V_k - (-1)^k T_{0,k}\right| &\leqslant 2H^k + \left|F_{k+1}(\alpha) - F_{k+1}(\beta)\right| \leqslant\\
&\leqslant 2H^k \,+\, \frac{1}{k+1}\sum_{q=0}^{k}\binom{k+1}{q}|B_q|\,2H^{k+1-q} \leqslant\\
&\leqslant 2H^k \,+\, \frac{2}{k+1}\sum_{q=0}^{k}\frac{(k+1)!}{(k+1-q)!q!}\,\frac{4q!}{(2\pi H)^q}\,H^{k+1} \leqslant\\
&\leqslant 2H^k + 8k!H^{k+1}\sum_{q=0}^{k}\frac{1}{(k+1-q)!} \,<\, 2H^k + 8(e-1)k!H^{k+1} \,<\, 14k!H^{k+1}.
\end{aligned}$$

Из равенств $N(t_N+0) = N+\Delta(N)$, $N(t_{N+M}+0) = N+M+\Delta(N+M)$ следует, что сумма V_k отличается от суммы $\sum_n \Delta_n^k$ не более чем $|\Delta(N)|+|\Delta(N+M)|$ слагаемыми, каждое из которых не превосходит H^k по абсолютной величине. Замечая, что

$$2H \cdot H^k + 14k!H^{k+1} \leqslant 16k!H^{k+1},$$

приходим к искомому утверждению.

Третье доказательство формул Сельберга (в форме, приведённой в теореме 3.1) получается из следствия теоремы 3.7 и утверждений теорем 2.1 и 2.2.

Замечание. Отметим и ещё одну особенность приведённого доказательства, сближающего его с первым способом вывода формул Сельберга.

Доказательства леммы 3.5, теоремы 3.7 и её следствия, по сути, не используют специфику последовательностей $\{\gamma_n\}$, $\{t_n\}$. В действительности аналоги перечисленных утверждений имеют место и в более общей ситуации.

Именно, пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - неубывающие неограниченные последовательности с условием $\beta_1 < \alpha_1 \leqslant \beta_2$. Для фиксированного $n \geqslant 1$ определим номер $m = m(n)$ из неравенств $\beta_{m-1} < \alpha_n \leqslant \beta_m$ и положим $\Delta_n = m-n$. Аналогично, при фиксированном $\nu \geqslant 2$ определим $\mu = \mu(\nu)$ из условий $\alpha_\mu \leqslant \beta_\nu < \alpha_{\mu+1}$ и положим $\Delta(\nu) = \mu-\nu$. Пусть, наконец, $D = D(N)$ обозначает максимум из величин $|\Delta_n|, |\Delta(n)|$ по всем $n \leqslant 2N$. Тогда при любом целом $k \geqslant 1$ имеет место оценка

$$\left|\sum_n \Delta_n^k - (-1)^k \sum_n \Delta^k(n)\right| \leqslant 16k!D^{k+1}.$$

Не использует специфики последовательностей точек Грама и ординат нулей $\zeta(s)$ и лемма 3.2, на которой построено первое доказательство формул Сельберга. Её аналог имеет место и в той ситуации, когда точки γ_n и t_n заменяются членами последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям.

§4. Поведение разностей $t_n - \gamma_n$

Формулы Сельберга показывают, что для «почти всех» n номер ординаты γ_n отличается от номера m промежутка Грама, её содержащего, на величину порядка $\sqrt{\log\log n}$.

Утверждения этого параграфа выражают тот же факт в терминах разностей $\gamma_n - t_n$. Оказывается, что «в среднем» ордината γ_n отстоит от точки Грама t_n, имеющей тот же номер, на расстояние, в $\sqrt{\log\log n}$ раз превышающее длину промежутка Грама $G_n = (t_{n-1}, t_n]$.

Здесь же доказываются теоремы о дробных моментах и распределении разностей $\gamma_n - t_n$, подобные теоремам 3.2-3.4.

Теорема 3.8. *Пусть k - целое число, $1 \leqslant k \leqslant c_1 \sqrt[3]{\log\log N}$. Тогда имеют место*

формулы:

$$\sum_n (\gamma_n - t_n)^{2k} \;=\; \frac{(2k)!}{k!}\, M\biggl(\frac{\sqrt{\log\log N}}{2\log N}\biggr)^{2k}\biggl(1 \;+\; \frac{2.4\theta(c_0 k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\log\log N}}\biggr),$$

$$\biggl|\sum_n (\gamma_n - t_n)^{2k-1}\biggr| < 4c_0^3\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{M}{\sqrt{\log\log N}}\biggl(\frac{\sqrt{\log\log N}}{\log N}\biggr)^{2k-1}.$$

Доказательство. Пусть $t_{m-1} < \gamma_n \leqslant t_m$ для заданного n, так что $\Delta_n = m - n$. Тогда

$$t_{m-1} - t_n < \gamma_n - t_n \leqslant t_m - t_n.$$

В силу леммы 1.1 справедливы равенства

$$t_m - t_n = \frac{\pi\Delta_n}{\vartheta'(t_N)} \;+\; \frac{2\pi\theta_1|\Delta_n|M}{N(\log N)^2} \;=\; \frac{\pi\Delta_n}{\vartheta'(t_N)}\biggl(1 \;+\; \frac{\pi\theta_2 M}{N\log N}\biggr),$$

$$t_{m-1} - t_n \;=\; \frac{\pi(\Delta_n - 1)}{\vartheta'(t_N)}\biggl(1 \;+\; \frac{\pi\theta_3 M}{N\log N}\biggr),$$

из которых следует, что

$$\gamma_n - t_n = \frac{\pi(\Delta_n - \theta_4)}{\vartheta'(t_N)}\biggl(1 + \frac{\pi\theta_5 M}{N\log N}\biggr),$$

где θ_4, θ_5 зависят от n.

Докажем первое соотношение. В силу сказанного выше, разность величин

$$\sum_n (\gamma_n - t_n)^{2k} \quad \text{и} \quad \biggl(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\biggr)^{2k}\sum_n \Delta_n^{2k}$$

не превосходит по модулю суммы

$$\biggl(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\biggr)^{2k}\biggl\{\frac{M}{N}\sum_n \Delta_n^{2k} + \biggl(1 + \frac{M}{N}\biggr)\sum_{\nu=1}^{2k}\binom{2k}{\nu}\sum_n |\Delta_n|^{2k-\nu}\biggr\}. \tag{3.21}$$

Согласно лемме 3.1, первое слагаемое в фигурных скобках не превосходит

$$\frac{M}{N}\cdot M(0.15\log N)^{2k} \;<\; N^{-\frac{1}{3}}.$$

Далее, сумму по ν в (3.21) разобьём на три части, обозначая через Σ_1, Σ_2 и Σ_3 вклад от слагаемых, отвечающих, соответственно, $\nu = 1$, чётным ν и нечётным ν. Применяя теорему 3.1, будем иметь:

$$\Sigma_1 = 2k\sum_n |\Delta_n|^{2k-1} \leqslant 2kM^{\frac{1}{2k}}\biggl(\sum_n \Delta_n^{2k}\biggr)^{1-\frac{1}{2k}} \leqslant 2kM^{\frac{1}{2k}}\bigl\{2.03\mathcal{L}_k\bigr\}^{1-\frac{1}{2k}} \leqslant$$

$$\leqslant 2k\cdot 2.03\mathcal{L}_k\biggl(\frac{k!}{(2k)!}\,(2\pi)^{2k}\biggr)^{\frac{1}{2k}} < 21.1\sqrt{\frac{k}{L}}\,\mathcal{L}_k.$$

Аналогично,

$$\Sigma_2 \leqslant \sum_{\mu=1}^{k} \binom{2k}{2\mu} \cdot 2.03 \, \frac{(2k-2\mu)!}{(k-\mu)!} \, \frac{ML^{k-\mu}}{(2\pi)^{2(k-\mu)}} =$$

$$= 2.03\mathcal{L}_k \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\mu!}{(2\mu)!} \binom{k}{\mu} \left(\frac{4\pi^2}{L}\right)^{\mu} \leqslant 1.02 L_k \left(\left\{ 1 + \frac{4\pi^2}{L} \right\}^k - 1 \right) < \frac{9k}{L} \, \mathcal{L}_k.$$

Наконец, пользуясь тем, что числа Δ_n - целые, получаем:

$$\Sigma_3 = \sum_{\mu=1}^{k-1} \binom{2k}{2\mu+1} \sum_n |\Delta_n|^{2k-2\mu-1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mu=1}^{k-1} \binom{2k}{2\mu+1} \sum_n \Delta_n^{2k-2\mu} \leqslant 2.03 \sum_{\mu=1}^{k-1} \binom{2k}{2\mu+1} \frac{(2k-2\mu)!}{(k-\mu)!} \, \frac{ML^{k-\mu}}{(2\pi)^{2(k-\mu)}} =$$

$$= 4.06\mathcal{L}_k \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{(\mu+1)!}{(2\mu+1)!} \binom{k}{\mu+1} \left(\frac{4\pi^2}{L}\right)^{\mu} < 4.06\mathcal{L}_k \, \frac{L}{6\pi^2} \sum_{\mu=2}^{k} \binom{k}{\mu} \left(\frac{4\pi^2}{L}\right)^{\mu} <$$

$$< 2.71\mathcal{L}_k \, \frac{L}{4\pi^2} \left(\left\{ 1 + \frac{4\pi^2}{L} \right\}^k - 1 - \frac{4\pi^2}{L} \right) < \frac{54k^2}{L} \, \mathcal{L}_k.$$

Сложив полученные оценки, убеждаемся, что (3.21) не превосходит

$$\left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k} \left\{ N^{-\frac{1}{3}} + \left(1 + \frac{M}{N}\right) \mathcal{L}_k \left(21\sqrt{\frac{k}{L}} + \frac{9k}{L} + \frac{54k^2}{L} \right) \right\} < 22\sqrt{\frac{k}{L}} \left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k} \mathcal{L}_k.$$

Так выражение для исходной суммы принимает вид

$$\left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k} \mathcal{L}_k \left(1 + \frac{4.3\theta_1 (c_0 k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}} \right) + 22\theta_2 \sqrt{k} L \left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k} \mathcal{L}_k =$$

$$= \left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k} \mathcal{L}_k \left(1 + \frac{4.35\theta_1 (c_0 k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}} \right) = \left(\frac{2\pi}{\log N}\right)^{2k} \mathcal{L}_k \left(1 + \frac{4.4\theta_3 (c_0 k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}} \right).$$

Докажем второе соотношение. Практически дословно повторяя вышеприведённые рассуждения, заключаем, что абсолютное значение момента степени $2k-1$ не превосходит

$$\left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k-1} \left\{ \left| \sum_n \Delta_n^{2k-1} \right| + \frac{M}{N} \sum_n |\Delta_n|^{2k-1} + \left(1 + \frac{M}{N}\right) \sum_{\nu=1}^{2k-1} \binom{2k-1}{\nu} |\Delta_n|^{2k-\nu-1} \right\}.$$

Обозначим вклад в последнюю сумму от нечётных ν через Σ_1, а от чётных ν - через Σ_2; получим:

$$\Sigma_1 \leqslant \sum_{\mu=1}^{k} \binom{2k-1}{2\mu-1} \sum_n \Delta_n^{2k-2\mu} \leqslant 2.03 \sum_{\mu=1}^{k} \binom{2k-1}{2\mu-1} \frac{(2k-2\mu)!}{(k-\mu)!} \, \frac{ML^{k-\mu}}{(2\pi)^{2(k-\mu)}} < \frac{40k}{L} \, \mathcal{L}_k,$$

$$\Sigma_2 \leqslant \sum_{\mu=1}^{k-1} \binom{2k-1}{2\mu} \sum_n |\Delta_n|^{2k-2\mu-1} \leqslant \sum_{\mu=1}^{k-1} \binom{2k-1}{2\mu} \sum_n \Delta_n^{2k-2\mu} \leqslant$$

$$\leqslant 2.03 \sum_{\mu=1}^{k-1} \binom{2k-1}{2\mu} \frac{(2k-2\mu)!}{(k-\mu)!} \frac{ML^{k-\mu}}{(2\pi)^{2(k-\mu)}} < \frac{40k}{L} \mathcal{L}_k.$$

Воспользовавшись теоремой 3.1, окончательно находим:

$$\left|\sum_n (\gamma_n - t_n)^{2k-1}\right| < \left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k-1} \left\{ \frac{c_0^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{(2k)!}{(k-1)!} \frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}} + N^{-\frac{1}{3}} + \frac{80k}{L} \mathcal{L}_k \right\} <$$

$$< \frac{3}{5} c_0^3 \left(\frac{2\pi}{\log N}\right)^{2k-1} \frac{(2k)!}{(k-1)!} \frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}} < 4c_0^3 \frac{(2k)!}{(k-1)!} \frac{M}{\sqrt{\log\log N}} \left(\frac{\sqrt{\log\log N}}{\log N}\right)^{2k-1}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.9. *Пусть a - произвольное число, отличное от чётного натурального числа и удовлетворяющее условию $0 < a \leqslant c_2 \sqrt[3]{\log\log N}$. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_n |\gamma_n - t_n|^a = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \left(\frac{2\sqrt{\log\log N}}{\log N}\right)^a \big(1 + \theta\, r(a)\big),$$

где

$$r(a) = \begin{cases} 14.2 \left(\dfrac{\log\log\log N}{\log\log N}\right)^{0.5a}, & \text{если } 0 < a \leqslant 1, \\ \dfrac{783a}{\sqrt{\log\log N}} \big(\sqrt{\log\log\log N} + 2.2 c_0^{3/2} \sqrt{a}\big), & \text{если } a > 1. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы практически дословно повторяет доказательство теоремы 3.2.

Теорема 3.10. *Пусть $\Xi(v)$ - функция распределения величин $\gamma_n - t_n$, т.е.*

$$\Xi(v) = \frac{1}{M} \#\left\{ n \,|\, N < n \leqslant N+M,\ \gamma_n - t_n \leqslant v \frac{\sqrt{2\log\log N}}{\log N} \right\}.$$

Тогда при любом u имеет место равенство:

$$\Xi(u) = G(u) + \frac{1.79\theta}{\sqrt{\log\log\log N}}.$$

Кроме того, если $1.5 \leqslant u \leqslant \sqrt[6]{\log\log N}$, то эта функция удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\Xi(-u)}{G(-u)} = 1 + O(R), \quad \frac{1-\Xi(u)}{1-G(u)} = 1 + O(R),$$

в которых

$$R = \frac{u(u^2 + \log\log\log N)}{\sqrt{\log\log N}},$$

а постоянные в знаках O зависят от ε.

Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству теорем 2.5 и 3.3.

Следствие. *Пусть $f(x)$ - монотонная положительная функция, неограниченно возрастающая при $x \to +\infty$. Тогда неравенства*

$$\frac{1}{f(n)} \frac{\sqrt{\log\log n}}{\log n} < |\gamma_n - t_n| < f(n) \frac{\sqrt{\log\log n}}{\log n}$$

имеют место для «почти всех» n.

Теорема 3.11. *Пусть $f(x)$ - произвольная монотонно возрастающая и неограниченная при $x \to +\infty$ функция, удовлетворяющая при $N \leqslant x \leqslant N + M$ условиям $a \leqslant f(x) \leqslant b\sqrt{\log\log x}$, где a и b - абсолютные постоянные. Пусть, далее,*

$$\mathcal{F} = f(N), \quad \delta = 0.5 \exp\left\{ - (ec_0)^2 \frac{\log\log N}{\mathcal{F}} \right\}.$$

Тогда на промежутке $N \leqslant n \leqslant N + M$ найдётся не менее $M\delta$ номеров n, удовлетворяющих условию

$$\gamma_n - t_n \leqslant - \frac{\log\log N}{\mathcal{F} \log N},$$

и не менее $M\delta$ номеров, удовлетворяющих условию

$$\gamma_n - t_n > \frac{\log\log N}{\mathcal{F} \log N}.$$

Доказательство этих утверждений почти дословно повторяет доказательство теоремы 2.6.

§5. Поведение аргумента дзета-функции Римана в точках разрыва

Функция $S(t)$ - кусочно-гладкая, имеет разрывы в точках, совпадающих с ординатами нулей $\zeta(s)$ и является монотонно убывающей на всяком промежутке непрерывности (γ_n, γ_{n+1}). Таким образом, правый и левый пределы $S(t)$ в точках разрыва, т.е. величины $S(\gamma_n \pm 0)$, имеют наглядный геометрический смысл: они являются «пиками» пилообразного графика функции $S(t)$ (см. рис. 2).

Подобно тому, как величины $\Delta(n)$ связаны со значениями функции $S(t)$ в точках Грама (лемма 2.8), величины Δ_n оказываются связанными со значениями $S(t)$ в точках $t = \gamma_n \pm 0$, хотя такая связь имеет более сложный вид (леммы 3.6 и 3.7).

Положим

$$q_n = \frac{\gamma_n - t_n}{t_{n+1} - t_n}.$$

Лемма 3.6. *Имеет место равенство:*

$$q_n = \Delta_n - \theta_1 + \frac{\theta_2 \log N}{4N},$$

где $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$, $|\theta_2| \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть $t_{m-1} < \gamma_n \leqslant t_m$. Тогда

$$\frac{t_{m-1} - t_n}{t_{n+1} - t_n} < q_n \leqslant \frac{t_m - t_n}{t_{n+1} - t_n}. \tag{3.22}$$

Пользуясь леммой 1.1, находим:

$$\frac{t_m - t_n}{t_{n+1} - t_n} = \left(\frac{\pi(m-n)}{\vartheta'(t_n)} + \frac{\theta_1 |m-n|}{n \log n} \right) \left\{ \frac{\pi}{\vartheta'(t_n)} \left(1 + \frac{\theta_2}{n \log n} \right) \right\}^{-1} =$$
$$= \Delta_n \left(1 + \big(1 + o(1)\big) \frac{\theta_3 (|\Delta_n| + 1)}{n \log n} \right) = \Delta_n \left(1 + \frac{\theta_4}{2N} \right),$$

и, аналогично,

$$\frac{t_{m-1} - t_n}{t_{n+1} - t_n} = (\Delta_n - 1) \left(1 + \frac{\theta_5}{2N} \right).$$

Воспользовавшись найденными соотношениями наряду с леммой 3.1, из (3.22) заключаем:

$$q_n = (\Delta_n - \theta_6) \left(1 + \frac{\theta_7}{2N} \right) = \Delta_n - \theta_6 + \frac{\theta_7 \log N}{4N},$$

где $0 \leqslant \theta_6 \leqslant 1$. Лемма доказана.

Лемма 3.7. *При любом* n, $N < n \leqslant N + M$, *имеют место равенства:*

$$S(\gamma_n + 0) = -\Delta_n + \theta \kappa_n + \frac{\theta_1 (\log N)^2}{80N}, \quad S(\gamma_n - 0) = -\Delta_n - (1 - \theta)\kappa_n + \frac{\theta_2 (\log N)^2}{80N},$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Доказательство. Согласно формуле Римана-Мангольдта и равенству (3.6), имеем:

$$S(\gamma_n + 0) = N(\gamma_n + 0) - \frac{1}{\pi}\, \vartheta(\gamma_n) - 1 = n - 1 - \frac{1}{\pi}\, \vartheta(\gamma_n) + \theta_1 (\kappa_n - 1).$$

Из определения дробей q_n получаем:

$$\gamma_n = t_n + h_n, \quad h_n = q_n (t_{n+1} - t_n),$$
$$\vartheta(\gamma_n) = \vartheta(t_n) + h_n\, \vartheta'(t_n) + \frac{h_n^2}{2}\, \vartheta''(\xi), \quad \xi = t_n + \theta_2 h_n.$$

Далее, в силу лемм 1.1 и 3.6 имеем:

$$h_n\, \vartheta'(t_n) = \pi q_n,$$
$$\frac{1}{2}\, h_n^2\, \vartheta''(\xi) \leqslant \frac{1}{2}\, h_n^2\, \vartheta''(t_n) = \frac{\pi q_n^2}{2N} \left(1 + \big(1 + o(1)\big) \frac{\log \log N}{\log N} \right) < \frac{2\pi |q_n|}{25}\, \frac{\log N}{N},$$

откуда

$$\frac{\vartheta(\gamma_n)}{\pi} = n - 1 + q_n + \frac{2\theta_2 |q_n|}{25}\, \frac{\log N}{N}.$$

Таким образом,

$$S(\gamma_n+0) = -\,q_n + \theta_1(\kappa_n-1) + \frac{2\theta_2|q_n|}{25}\,\frac{\log N}{N} \;=\; -\,\Delta_n \;+\; \theta_3\kappa_n \;+\; \frac{\theta_4(\log N)^2}{80N},$$

где $0 \leqslant \theta_3 \leqslant 1$. Второе утверждение леммы следует из равенства $S(\gamma_n+0)-S(\gamma_n-0) = \kappa_n$. Лемма доказана.

Формулы леммы 3.7 показывают, что для вычисления моментов величин $S(\gamma_n \pm 0)$ необходимы оценки моментов кратностей κ_n.

Цель приводимых ниже утверждений – показать, что в среднем эти кратности ведут себя как постоянные величины. Доказательство этого факта основано на том, что вблизи ординат большой кратности разность

$$S(t+2h) - S(t), \quad h \asymp \left(\log\frac{t}{2\pi}\right)^{-1}, \tag{3.23}$$

оказывается достаточно большой и положительной (лемма 3.16). Вместе с тем, верхняя оценка среднего значения функции (3.23) (лемма 3.14) показывает, что мера множества тех точек t, в которых разность (3.23) велика по модулю, является очень маленькой (лемма 3.15. Сопоставление перечисленных утверждений приводит к верхней оценке для числа ординат очень большой кратности и искомой оценке моментов κ_n (леммы 3.17 и 3.18).

Леммы 3.8 – 3.13 носят вспомогательный характер и необходимы для оценки среднего значения разности (3.23). Они представляют собой интегральные аналоги лемм 2.2, 2.3, 1.3, 2.5, 2.6 и 2.7 первой главы. Как и выше, мы предполагаем, что $T \geqslant T_0(\varepsilon) > 0$, $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\varepsilon}$, $\alpha = \frac{27}{82}$, $\varepsilon_1 = 0.9\,\varepsilon$. Кроме того, положим $Y = T^{0.1\,\varepsilon}$.

Лемма 3.8. *Пусть $c > 0$, m - целое число,*

$$1 \leqslant m \leqslant 0.1\log M, \quad 18 \leqslant z \leqslant \left(\frac{M}{5\log N}\right)^{1/(3m)},$$

и пусть последовательности вещественных чисел $a_1(p)$ и $a_2(p)$ подчинены условиям $|a_1(p)| \leqslant c\,\dfrac{\log p}{\log z}$, $|a_2(p)| \leqslant c$, когда p пробегает простые числа промежутка $(1, z]$. Тогда для интегралов

$$I_1 = \int_T^{T+H}\left|\sum_{p\leqslant z}\frac{a_1(p)}{\sqrt{p}}\,p^{it}\right|^{2m}dt, \quad I_2 = \int_T^{T+H}\left|\sum_{p\leqslant z}\frac{a_2(p)}{p}\,p^{2it}\right|^{2m}dt$$

справедливы следующие оценки: $I_1 < 1.1H(c^2m)^m$, $I_2 < 1.1H(0.5c^2m)^m$.

Доказательство. Первое утверждение получим, если воспользуемся леммой 9.П, предварительно положив в ней

$$a_n \;=\; \sum_{\substack{p_1\ldots p_m=n\\ p_1,\ldots,p_m\leqslant z}} a_1(p_1)\ldots a_1(p_m)$$

и заметим, что $|a_n| \leqslant m!c^m$. Подобным образом получается и вторая оценка. Лемма доказана.

Лемма 3.9. *Пусть $\nu \geqslant 0$ - целое число, $y \geqslant 2$, $z \geqslant 1$, $y^3 z^2 \leqslant Y$. Тогда имеет место оценка*

$$\int_T^{T+H} \bigl(\sigma_{y,t} - \tfrac{1}{2}\bigr)^\nu z^{\sigma_{y,t}-\frac{1}{2}}\, dt < \left(\frac{2}{\log y}\right)^\nu H\left(e^{2\frac{\log z}{\log y}} + 52.1\nu!\,\frac{\log T}{\log y}\left(\frac{\log y}{\log Y}\right)^\nu\right).$$

Доказательство. Все точки t промежутка $(T, T+H]$ разобьём на два класса, относя к первому те, для которых любой нуль $\beta + i\gamma$ с условием

$$|t-\gamma| \leqslant \frac{y^{3\left|\beta-\frac{1}{2}\right|}}{\log y} = \delta(\varrho) = \delta$$

удовлетворяет также и неравенству $\left|\beta - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{\log y}$. Все остальные точки отнесём ко второму классу.

Тогда интеграл I_1 по всем точкам первого класса не превзойдёт величины

$$\left(\frac{2}{\log y}\right)^\nu z^{\frac{2}{\log y}} H = \left(\frac{2}{\log y}\right)^\nu H e^{2\frac{\log z}{\log y}}.$$

Далее, рассуждая точно так же, как и при доказательстве леммы 1.9, заключаем, что интеграл I_2 по точкам второго класса не превосходит

$$2 \sum_{\substack{T-\sqrt{Y}<\gamma\leqslant T+H+\sqrt{Y}\\ \beta>0.5}} \int_{\gamma-\delta}^{\gamma+\delta} 2^\nu \bigl(\beta-\tfrac{1}{2}\bigr)^\nu z^{2\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}\, dt =$$

$$= \frac{2^{\nu+2}}{\log y} \sum_{\substack{T-\sqrt{Y}<\gamma\leqslant T+H+\sqrt{Y}\\ \beta>0.5}} \bigl(\beta-\tfrac{1}{2}\bigr)^\nu (y^3z^2)^{\beta-\frac{1}{2}}.$$

Как было установлено при доказательстве леммы 2.3, последняя сумма ограничена сверху величиной

$$\bigl(1+o(1)\bigr) 6.5 H (\log T)\,\frac{2\nu!}{(\log Y)^\nu}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 3.10. *Пусть k, m, r – целые числа, $m \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, $m+r = k$, $e^2 \leqslant y \leqslant T^{1/(3k)}$. Пусть, далее, $p_1, \dots, p_m$, $q_1, \dots, q_r$ пробегают значения простых чисел из промежутка $(1, y]$, удовлетворяющие условию $p_1 \dots p_m \neq q_1 \dots q_r$. Пусть, наконец, все члены последовательности $a(p)$ при $p \leqslant y$ подчинены условию $|a(p)| \leqslant \delta$. Тогда для интеграла*

$$I = \int_T^{T+H} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_m\\ q_1,\dots,q_r}} \frac{a(p_1)\dots a(p_m)\overline{a}(q_1)\dots\overline{a}(q_r)}{(p_1\dots p_m\, q_1\dots q_r)^{0.5}} \left(\frac{q_1\dots q_r}{p_1\dots p_m}\right)^{it} dt$$

имеет место оценка: $|I| < (\delta y)^k$.

Доказательство. Пусть μ и ν - целые числа, причём $m > \nu \geqslant 1$. Тогда имеем, очевидно:

$$\left| \int_T^{T+H} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{it} dt \right| \leqslant 2\left(\log \frac{\mu}{\nu}\right)^{-1} \leqslant \frac{2\nu}{\log 2} < 3\sqrt{\mu\nu}.$$

Интегрируя в I почленно и пользуясь последним неравенством в случае, когда μ и ν обозначают, соответственно, наибольшее и наименьшее из чисел $p_1 \dots p_m$ и $q_1 \dots q_r$, получим:

$$|I| < \delta^k \sum_{\substack{p_1,\dots,p_m \\ q_1,\dots,q_r}} (p_1 \dots q_r)^{-0.5} \cdot 3(p_1 \dots q_r)^{0.5} \leqslant 3\delta^k \big(\pi(y)\big)^k < (\delta y)^k.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.11. *Пусть k - целое число, $1 \leqslant k \leqslant c \log Y$, где c - достаточно малая абсолютная постоянная, $y = Y^{1/(8k+3)}$. Тогда справедливо неравенство:*

$$\int_T^{T+H} \left| S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{m \leqslant y^3} \frac{\Lambda_y(m)}{m^{\sigma_{y,t}}} \frac{\sin(t \log m)}{\log m} \right|^{2k} dt < \frac{101}{\varepsilon} \left(\frac{1440}{\varepsilon}\right)^{2k} H$$

Доказательство. Из леммы 2.4 следует, что исходный интеграл не превосходит величины

$$2^{2k-1}\big((a_1 \log(T+H))^{2k} j_1 + a_2^{2k} j_2\big),$$

где

$$j_1 = \int_T^{T+H} \big(\sigma_{y,t} - \tfrac{1}{2}\big)^{2k} dt \quad j_2 = \int_T^{T+H} \big(\sigma_{y,t} - \tfrac{1}{2}\big)^{2k} \left| \sum_{p \leqslant y^3} \frac{\Lambda_y(p)}{p^{\sigma_{y,t}+it}} \right|^{2k} dt.$$

Практически дословно повторяя доказательство леммы 2.5 и пользуясь в соответствующих местах леммой 3.9 вместо леммы 2.3, последовательно получим:

$$j_1 < \frac{201}{\varepsilon} H \left(\frac{160k}{\varepsilon \log T}\right)^{2k}, \quad j_2 < \frac{1}{2}(2 \log y)^{2k} \big(\sqrt{j_3 j_5} + \sqrt{j_4 j_6}\big),$$

где

$$j_3 = \int_T^{T+H} \big(\sigma_{y,t} - \tfrac{1}{2}\big)^{4k} dt < \frac{9.5H}{\varepsilon} \left(\frac{2}{\log y}\right)^{4k},$$

$$j_4 = \int_T^{T+H} \big(\sigma_{y,t} - \tfrac{1}{2}\big)^{4k} y^{4k\left(\sigma_{y,t} - \frac{1}{2}\right)} < \frac{H}{240\,\varepsilon} \left(\frac{2e^2}{\log y}\right)^{4k},$$

$$j_{5,6} = \int_T^{T+H} \left| \sum_{p \leqslant y^3} \frac{a_j(p)}{\sqrt{p}} p^{it} \right|^{4k} dt, \quad j = 1, 2, \quad a_1(p) = \frac{\Lambda_y(p)}{\log y}, \quad |a_2(p)| \leqslant \frac{\Lambda_y(p)(\log p) \log yp}{(\log y)^3}.$$

Оценивая интегралы j_5 и j_6 с помощью леммы 3.8 подобно тому, как это делалось при оценке сумм Σ_7, Σ_8 из леммы 2.5, получим:

$$j_5 < 1.1H(18k)^{2k}, \quad j_6 < 1.1H(18a^2k)^{2k}, \quad a = 3.44608\,8218\dots,$$

откуда

$$\sqrt{j_3 j_5} < \frac{4H}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{(72k)^k}{(\log y)^{2k}}, \quad \sqrt{j_4 j_6} < \frac{H}{14\sqrt{\varepsilon}} \frac{(72e^4a^2k)^k}{(\log y)^{2k}},$$

и, наконец,

$$j_1 < \frac{H}{2\sqrt{\varepsilon}}\left(4(288k)^k + \frac{1}{14}\,(288e^4a^2k)^k\right) < \frac{H}{25\sqrt{\varepsilon}}\,(288e^4a^2k)^k.$$

Таким образом, исходный интеграл не превосходит

$$\frac{1}{2}\left((4a_1^2)^k\,\frac{201H}{\varepsilon}\left(\frac{160k}{\varepsilon}\right)^{2k}\left(\frac{\log(T+H)}{\log T}\right)^{2k} + (4a_2^2)^k\,\frac{H}{25\sqrt{\varepsilon}}\,(288e^4a^2k)^k\right) < \\ < \frac{101}{\varepsilon}\left(\frac{1440k}{\varepsilon}\right)^{2k}H.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.12. *Если выполнены условия леммы* 3.11, *то имеет место неравенство*

$$\int_T^{T+H}\left|\sum_{m\leqslant y^3}\frac{\Lambda_y(m)}{m^{\sigma_{y,t}}}\frac{\sin(t\log m)}{\log m} - \sum_{p\leqslant y}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}\right|^{2k}dt < \frac{H}{2\,\varepsilon}\,(1552e^4k)^k.$$

Доказательство. Практически дословно повторяя доказательство леммы 2.6 и пользуясь соответствующими обозначениями, заключаем, что интеграл из условия леммы не превосходит

$$4^{2k-1}\big(I_1+I_2+I_3+I_4\big),\quad I_\nu=\int_T^{T+H}R_\nu(t)dt,$$

где

$$R_1(t)=\left|\sum_{p\leqslant y^3}\frac{a_1(p)}{\sqrt{p}}\,p^{it}\right|,\quad R_2(t)=\frac{1}{2}\left|\sum_{p\leqslant y^3}\frac{a_2(p)}{p}\,p^{2it}\right|,$$

$$R_3(t)=\frac{y^{\sigma_{y,t}-\frac{1}{2}}}{\log y}\int_0^{+\infty}y^{-v}\left|\sum_{p\leqslant y^3}\frac{\Lambda_y(p)\log(py)}{p^{\frac{1}{2}+v}}\,p^{it}\right|dv,\quad R_4(t)=2\big(\sigma_{y,t}-\tfrac{1}{2}\big)\log y,$$

причём

$$|a_1(p)|\leqslant\frac{3\log p}{\log(y^3)},\quad |a_2(p)|\leqslant 1$$

при $p\leqslant y^3$.

Оценивая интегралы I_1, I_2 по лемме 3.8, находим:

$$I_1<1.1H(9k)^k,\quad I_2<1.1Hk^k.$$

Далее, применив к $R_3(t)$ неравенство Гёльдера, будем иметь:

$$I_3\leqslant\frac{1}{(\log y)^{4k-1}}\int_0^{+\infty}y^{-v}\int_T^{T+H}y^{2k(\sigma_{y,t}-\frac{1}{2})}\left|\sum_{p\leqslant y^3}\frac{\Lambda_y(p)\log(py)}{p^{\frac{1}{2}+v}}\,p^{it}\right|^{2k}dtdv\leqslant \\ \leqslant\int_T^{T+H}y^{2k(\sigma_{y,t}-\frac{1}{2})}\left|\sum_{p\leqslant y^3}\frac{a_3(p)}{\sqrt{p}}\,p^{it}\right|^{2k}dt\leqslant\sqrt{I_5}\sqrt{I_6},$$

где

$$|a_3(p)| \leqslant \frac{\Lambda_y(p)\log(py)}{(\log y)^2} \leqslant \frac{6\log p}{\log(y^3)},$$

$$I_5 = \int_T^{T+H} y^{4k(\sigma_{y,t}-\frac{1}{2})}dt, \quad I_6 = \int_T^{T+H}\left|\sum_{p\leqslant y^3}\frac{a_3(p)}{\sqrt{p}}\,p^{it}\right|^{4k}dt.$$

Оценивая последние интегралы с помощью лемм 3.9 и 3.8, получим:

$$I_5 < H\left(e^{8k} + 52.1\,\frac{\log T}{\log y}\right) < \frac{2H}{\varepsilon}\,e^{8k}, \quad I_6 < 1.1H(72k)^{2k},$$

откуда

$$I_3 < \frac{3H}{2\sqrt{\varepsilon}}\,(72e^4k)^k.$$

Наконец, в силу леммы 3.9 имеем:

$$I_4 < (2\log y)^{2k}\left(\frac{2}{\log y}\right)^{2k} H\left(1 + 52.1\frac{\log T}{\log y}\,(2k)!\left(\frac{\log y}{\log Y}\right)^{2k}\right) =$$
$$= 16^k H\left(1 + \frac{521}{\varepsilon}\,\frac{(2k)!}{(8k+3)^{2k-1}}\right) < 16^k\,\frac{95H}{\varepsilon}.$$

Сложив полученные оценки, находим:

$$4^{2k-1}\sum_{\nu=1}^{4} I_\nu <$$
$$< \frac{H}{4\,\varepsilon}\big(16\cdot 72e^4k\big)^k\left\{1.1\,\varepsilon\left(\frac{1}{8e^4}\right)^k + 1.1\,\varepsilon\left(\frac{1}{144e^4}\right)^k + \frac{3\sqrt{\varepsilon}}{2} + 95\,\varepsilon\left(\frac{2}{9e^4k}\right)^k\right\} <$$
$$< \frac{H}{4\,\varepsilon}\,\big(1152e^4k\big)^k.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.13. *Если выполнены условия леммы* 3.11, *то имеет место неравенство*

$$\int_T^{T+H}\left|S(t) + \frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant y}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}\right|^{2k}dt < \frac{c_0}{56}\,(c_0k)^{2k}H.$$

Доказательство. Воспользовавшись оценками лемм 3.11 и 3.12 наряду с неравенством Гёльдера, получим:

$$\int_T^{T+H}\left|S(t) + \frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant y}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}\right|^{2k}dt \leqslant$$
$$\leqslant 2^{2k-1}\left\{\int_T^{T+H}\left|S(t) + \frac{1}{\pi}\sum_{m\leqslant y^3}\frac{\Lambda_y(m)}{m^{\sigma_{y,t}}}\frac{\sin(t\log m)}{\log m}\right|^{2k}dt +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\pi^{2k}}\int_T^{T+H}\left|\sum_{m\leqslant y^3}\frac{\Lambda_y(m)}{m^{\sigma_{y,t}}}\frac{\sin(t\log m)}{\log m} - \sum_{p\leqslant y}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}\right|^{2k}dt\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{2k-1}H\left\{\frac{101}{\varepsilon}\left(\frac{1440k}{\varepsilon}\right)^{2k} + \frac{1}{2\,\varepsilon}\left(\frac{1152e^4k}{\pi^2}\right)^k\right\} < \frac{51H}{\varepsilon}\left(\frac{2880k}{\varepsilon}\right)^{2k} < \frac{c_0}{56}\,(c_0k)^{2k}H.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.14. *Пусть k - целое число, $1 \leqslant k \leqslant c \log Y$, где c - достаточно малая абсолютная постоянная, и пусть $h = \pi v (\log T)^{-1}$, где $0 < v < \log T$ - произвольное число. Тогда для интеграла*

$$I_{2k} = \int_T^{T+H} \big(S(t+2h) - S(t)\big)^{2k} dt$$

имеет место оценка:

$$I_{2k} \,<\, \exp\left\{\frac{v\,\varepsilon}{40c_0\sqrt{ke}}\right\} \frac{c_0}{56}(2c_0k)^{2k} H,$$

где $c_0 = 2880\,\varepsilon^{-1}$.

Доказательство. Полагая $y = Y^{1/(8k+3)}$, находим:

$$S(t+2h) - S(t) = -V(t) + W(t),$$

где

$$V(t) = \frac{1}{\pi}\big(U(t) + \overline{U}(t)\big), \quad U(t) = \sum_{p \leqslant y} \frac{a(p)}{\sqrt{p}}\, p^{it}, \quad a(p) = p^{ih} \sin(h \log p),$$

$$W(t) = R(t+2h) - R(t), \quad R(t) = S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p \leqslant y} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}}.$$

Следовательно,

$$I_{2k} = \sum_{\nu=0}^{2k} (-1)^\nu \binom{2k}{\nu} I(\nu), \quad I(\nu) = \int_T^{T+H} V^{\,\nu}(t) W^{2k-\nu}(t) dt.$$

В силу неравенства Гёльдера имеем оценку

$$|I(\nu)| \leqslant \left(\int_T^{T+H} V^{2k}(t) dt\right)^{\frac{\nu}{2k}} \left(\int_T^{T+H} W^{2k}(t) dt\right)^{1-\frac{\nu}{2k}} = \big(I(2k)\big)^{\frac{\nu}{2k}} \big(I(0)\big)^{1-\frac{\nu}{2k}},$$

откуда

$$I_{2k} \leqslant \sum_{\nu=0}^{2k} \binom{2k}{\nu} |I(\nu)| \leqslant \Big\{\big(I(2k)\big)^{\frac{1}{2k}} + \big(I(0)\big)^{\frac{1}{2k}}\Big\}^{2k}.$$

Согласно лемме 3.10, имеем:

$$I(2k) = \pi^{-2k} \int_T^{T+H} \big(U(t) + \overline{U}(t)\big)^{2k} dt = \pi^{-2k} \sum_{\nu=0}^{2k} \binom{2k}{\nu} \int_T^{T+H} U^{\,\nu}(t) \overline{U}^{\,2k-\nu}(t) dt <$$

$$< \pi^{-2k} \left\{ \binom{2k}{k} k! H \left(\sum_{p \leqslant y} \frac{|a(p)|^2}{p} \right)^k + \sum_{\nu=0}^{2k} \binom{2k}{\nu} \big(y \max_{p \leqslant y} |a(p)|\big)^{2k} \right\}.$$

Поскольку

$$|a(p)| \leqslant h \log p \leqslant h \log y, \quad y^{2k} = Y^{\frac{2k}{8k+3}} < Y^{\frac{1}{4}},$$

из леммы 2.П получаем оценку:

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{|a(p)|^2}{p}\leqslant h^2(\log y)\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p}<(h\log y)^2.$$

Далее, воспользовавшись неравенством $\dfrac{(2k)!}{k!}<\sqrt{2}\Big(\dfrac{4k}{e}\Big)^k$, находим:

$$I(2k)\leqslant\pi^{-2k}\left\{\sqrt{2}\left(\frac{4k}{e}\right)^k H(\log y)^{2k}+3Y^{\frac{3}{8}}(2h\log y)^{2k}\right\}<$$
$$<\frac{3}{2}\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{k}{e}}\,h\log y\right)^{2k}H=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{k}{e}}\,\frac{\pi v}{\log T}\,\frac{0.1\,\varepsilon\log T}{8k+3}\right)^{2k}H\leqslant\frac{3}{2}\left(\frac{v\,\varepsilon}{40\sqrt{ek}}\right)^{2k}H.$$

В силу леммы 3.14

$$I(0)\leqslant 2^{2k-1}\int_T^{T+H}\big(R^{2k}(t+2h)+R^{2k}(t)\big)dt<\frac{c_0}{56}(2c_0k)^{2k}H.$$

Поэтому, возвращаясь к оценке I_{2k}, будем иметь:

$$I_{2k}\leqslant H\left\{\left(\frac{c_0}{56}\right)^{\frac{1}{2k}}2c_0k+\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2k}}\frac{v\,\varepsilon}{40\sqrt{ek}}\right\}^{2k}=$$
$$=\frac{c_0}{56}(2c_0k)^{2k}H\left\{1+\left(\frac{84}{c_0}\right)^{\frac{1}{2k}}\frac{v\,\varepsilon}{40c_0\sqrt{ke}}\,\frac{1}{2k}\right\}^{2k}\leqslant\frac{c_0}{56}(2c_0k)^{2k}\,\exp\left\{\frac{v\,\varepsilon}{40c_0\sqrt{ke}}\right\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.15. *Пусть h удовлетворяет условиям леммы 3.14 и пусть $D(\lambda)$ - множество тех t из промежутка $T\leqslant t\leqslant T+H$, для которых*

$$|S(t+2h)-S(t)|\geqslant\lambda.$$

Тогда при любом $\lambda>0$ справедлива оценка:

$$\operatorname{mes}D(\lambda)\leqslant\frac{c_0e^2}{56}\exp\left\{\frac{v\,\varepsilon}{20\sqrt{c_0\lambda}}\right\}H\exp\left\{-\frac{\lambda}{ec_0}\right\}.$$

Доказательство. Если $\lambda>0.3\log T$, то $\operatorname{mes}D(\lambda)=0$ в силу леммы 9.П. Если $0<\lambda\leqslant 4ec_0$, то искомая оценка следует из тривиальной:

$$\operatorname{mes}D(\lambda)\leqslant H\leqslant e^{4-\lambda/(ec_0)}H<\frac{c_0e^2}{56}\,H\exp\left\{-\frac{\lambda}{ec_0}\right\}.$$

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $4ec_0<\lambda\leqslant 0.3\log T$. Положим $k=\big[\lambda/(2ec_0)\big]$, так что

$$2\leqslant k\leqslant\frac{\log Y}{1980e}\leqslant c\log Y.$$

Интегрируя обе части неравенства

$$\big(S(t+2h)-S(t)\big)^{2k}\geqslant\lambda^{2k}$$

по множеству $D(\lambda)$, в силу леммы 3.14 получим:

$$\lambda^{2k}\cdot \operatorname{mes} D(\lambda)\leqslant \int_T^{T+H}\big(S(t+2h)-S(t)\big)^{2k}dt\leqslant \frac{c_0}{56}\exp\left\{\frac{v\,\varepsilon}{40c_0\sqrt{ek}}\right\}(2c_0k)^{2k}H,$$

откуда

$$\operatorname{mes} D(\lambda)\leqslant \frac{c_0}{56}\exp\left\{\frac{v\,\varepsilon}{40c_0\sqrt{ek}}\right\}\left(\frac{2c_0k}{e\lambda}\right)^{2k}H\leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_0}{56}\exp\left\{\frac{v\,\varepsilon}{40c_0\sqrt{e}}\sqrt{\frac{4ec_0}{\lambda}}\right\}e^{-2k}H\leqslant \frac{c_0e^2}{56}\exp\left\{\frac{v\,\varepsilon}{20\sqrt{c_0\lambda}}\right\}H\exp\left\{-\frac{\lambda}{ec_0}\right\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.16. *Пусть h удовлетворяет условиям леммы 3.14 и пусть γ - ордината нуля $\zeta(s)$ с условием $T\leqslant\gamma-h<\gamma\leqslant T+H$. Пусть, наконец, промежуток $(\gamma-h,\gamma]$ содержит ровно m ординат нулей $\zeta(s)$, кратность каждой из которых равна j. Тогда при любом t из промежутка $(\gamma-2h,\gamma-h]$ справедливо неравенство*

$$S(t+2h)-S(t)\geqslant mj-v.$$

Доказательство. Возьмём произвольное число t, $\gamma-2h<t\leqslant\gamma-h$. Пусть $\gamma^{(1)}<\ldots<\gamma^{(l)}$ - все различные ординаты нулей $\zeta(s)$, попавшие в промежуток $(t,t+2h]$, и пусть $\kappa^{(1)},\ldots,\kappa^{(l)}$ - их кратности.

Пусть, далее, (a,b) - промежуток, целиком лежащий в $(t,t+2h]$ и не содержащий точек разрыва $S(t)$. Записывая разность значений $S(t)$ на концах этого промежутка с помощью формулы конечных приращений, получим:

$$S(b)-S(a)=(b-a)S'(\xi)=-(b-a)\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{\xi}{2\pi}+O\Big(\frac{1}{\xi^2}\Big)\right),$$

где $a<\xi<b$. Так как $\log\xi=\log T+O\big(HT^{-1}\big)$, то

$$S(b)-S(a)=-(b-a)\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}+O\Big(\frac{H}{T}\Big)\right)=-(b-a)\left(\frac{v}{2h}-\frac{\log 2\pi}{2\pi}+O\Big(\frac{H}{T}\Big)\right).$$

Пользуясь этим соотношением, преобразуем тождество

$$S(t+2h)-S(t)=\big\{S(t+2h)-S(\gamma^{(l)}+0)\big\}+\sum_{r=1}^{l}\big(S(\gamma^{(r)}+0)-S(\gamma^{(r)}-0)\big)+$$
$$+\sum_{r=2}^{l}\big(S(\gamma^{(r)}-0)-S(\gamma^{(r-1)}+0)\big)+\big(S(\gamma^{(1)}-0)-S(t)\big).$$

Замечая, что $S(\gamma^{(r)}+0)-S(\gamma^{(r)}-0)=\kappa^{(r)}$, получим:

$$S(t+2h)-S(t)=\kappa^{(1)}+\ldots+\kappa^{(l)}-$$
$$-\left(\frac{v}{2h}-\frac{\log 2\pi}{2\pi}+O\Big(\frac{H}{T}\Big)\right)\big\{(t+2h-\gamma^{(l)})+(\gamma^{(l)}-\gamma^{(l-1)})+\ldots+(\gamma^{(2)}-\gamma^{(1)})+(\gamma^{(1)}-t)\big\}=$$
$$=\kappa^{(1)}+\ldots+\kappa^{(l)}-2h\left(\frac{v}{2h}-\frac{\log 2\pi}{2\pi}+O\Big(\frac{H}{T}\Big)\right).$$

Поскольку $\gamma - h \geqslant t$ и $\gamma \leqslant t + 2h$, то промежуток $(\gamma - h, \gamma]$ целиком содержится в промежутке $(t, t + 2h]$. Но тогда из условия леммы следует, что в ряде $\kappa^{(1)}, \ldots, \kappa^{(l)}$ найдётся не менее m чисел, бóльших или равных j. Следовательно,

$$S(t + 2h) - S(t) \geqslant mj - 2h\left(\frac{v}{2h} - \frac{\log 2\pi}{2\pi} + O\Big(\frac{H}{T}\Big)\right) > mj - v.$$

Лемма доказана.

Пусть $N_j(T)$ обозначает количество ординат нулей $\zeta(s)$, лежащих в прямоугольнике $0 < \operatorname{Re} s < 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leqslant T$, кратность которых равна j.

Лемма 3.17. *При любом $j \geqslant ec_0 + 1$ имеет место оценка:*

$$N_j(T + H) - N_j(T) < 0.832\,\frac{H}{2\pi}(\log T)\exp\left\{-\frac{j}{ec_0}\right\}.$$

Доказательство. Положим $h = \pi v(\log T)^{-1}$, где $v = ec_0$. Пусть $\gamma^{(1)}$ - наибольшая из ординат кратности j на промежутке $(T, T+H]$. Положим $E_1 = (\gamma^{(1)} - h, \gamma^{(1)}]$ и обозначим через $\gamma^{(2)}$ наибольшую из ординат кратности j на промежутке $(T, \gamma^{(1)} - h]$. Полагая $E_2 = (\gamma^{(2)} - h, \gamma^{(2)}]$, через $\gamma^{(3)}$ обозначим наибольшую из ординат кратности j на промежутке $(T, \gamma^{(2)} - h]$ и так далее.

Продолжим это построение до тех пор, пока не отыщем ординату $\gamma^{(r)}$ кратности j такую, что $\gamma^{(r)} - h < T \leqslant \gamma^{(r)}$ или же такую, что промежуток $(T, \gamma^{(r)} - h]$ не будет содержать ни одной ординаты кратности j. В каждом из случаев положим $E_r = (\gamma^{(r)} - h, \gamma^{(r)}]$.

Промежутки $E_1, E_2, \ldots, E_r$ попарно не пересекаются, имеют одинаковую длину h и в их объединении содержатся все ординаты кратности j, попавшие в промежуток $(T, T + H]$. Разобьём множество $E_1, E_2, \ldots, E_r$ на классы $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots$, относя к классу $\mathcal{E}_m$ те из промежутков, которые содержат ровно m ординат кратности j. Если k_m - число элементов в $\mathcal{E}_m$, то

$$N_j(T + H) - N_j(T) \leqslant 1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \ldots + m \cdot k_m + \ldots\ . \tag{3.24}$$

Оценим сверху каждую из величин k_m. Допустим, что промежуток $E = (\gamma - h, \gamma]$ принадлежит $\mathcal{E}_m$. Обозначим $E' = E - h = (\gamma - 2h, \gamma - h]$. Согласно лемме 3.16, при любом $t \in E'$ имеем неравенство

$$S(t + 2h) - S(t) \geqslant mj - v.$$

Так как E' содержится в $(T - 2h, T + H]$, то, обозначая через $D(\lambda)$ множество точек $t \in (T - 2h, T + H]$, для которых $\big|S(t + 2h) - S(t)\big| \geqslant \lambda$, заключаем, что E' целиком содержится в $D(mj - v)$.

Проведя подобные рассуждения для каждого промежутка E из $\mathcal{E}_m$, убеждаемся, что все k_m промежутков лежат в $D(mj - v)$. Так как все они имеют одинаковую длину h и попарно не пересекаются, то их общая длина не превосходит меры множества $D(mj - v)$, т.е. $k_m h \leqslant \operatorname{mes} D(mj - v)$. Согласно лемме 3.15, имеем оценки

$$\operatorname{mes} D(mj - v) \leqslant \frac{c_0 e^2}{56}\ \exp\left\{\frac{v\,\varepsilon}{20\sqrt{c_0}}\,\frac{1}{\sqrt{mj - v}}\right\} H \exp\left\{-\frac{mj - v}{ec_0}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_0 e^3}{56}\ \exp\left\{\frac{e}{20}\sqrt{c_0}\,\varepsilon\right\} H \exp\left\{-\frac{mj}{ec_0}\right\}.$$

откуда

$$k_m \leqslant \frac{c_0 e^3}{56h}\,\exp\left\{6e\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\right\} H \exp\left\{-\frac{mj}{ec_0}\right\} = \\ = \frac{e^2}{28}\,\frac{H}{2\pi}(\log T)\,\exp\left\{6e\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\right\}\exp\left\{-\frac{mj}{ec_0}\right\}.$$

Возвращаясь к неравенству (3.24), получим:

$$N_j(T+H) - N_j(T) < \frac{e^2}{28}\,\frac{H}{2\pi}(\log T)\,\exp\left\{6e\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\right\}\sum_{m=1}^{+\infty} m\exp\left\{-\frac{mj}{ec_0}\right\} \leqslant \\ \leqslant \frac{e^2}{28}\,\exp\left\{6e\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\right\}\left(1-e^{-j/ec_0}\right)^{-2}\frac{H}{2\pi}(\log T)\exp\left\{-\frac{mj}{ec_0}\right\} < \\ < \frac{e^2}{28}\left(1-\frac{1}{e}\right)^{-2}\exp\left\{6e\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\right\}\frac{H}{2\pi}(\log T)\exp\left\{-\frac{mj}{ec_0}\right\}.$$

Пользуясь неравенством $\varepsilon < 10^{-3}$, окончательно находим:

$$N_j(T+H) - N_j(T) < 0.832\,\frac{H}{2\pi}(\log T)\,\exp\left\{-\frac{j}{ec_0}\right\}.$$

Лемма доказана.

Пусть $a > 0$. Под суммой

$$K_0(a) = K_0(a; N, M) = \sum_n \kappa_n^a$$

будем понимать сумму величин κ_n^a по всем подряд идущим ординатам γ_n, $N < n \leqslant N+N$. Через

$$K_1(a) = K_1(a; N, M) = \sum_n{}' \kappa_n^a$$

будем обозначать сумму, распространённую лишь на различные ординаты γ_n, $N < n \leqslant N+M$.

Так, если выполнены соотношения (3.3), то в $K_0(a)$ войдут все слагаемые $\kappa_l^a, \ldots, \kappa_{l+p-1}^a$, в то время как в $K_1(a)$ из всех перечисленных войдёт лишь слагаемое κ_l^a.

Несложно заметить, что так определённые суммы K_0 и K_1 при любом $a \geqslant 0$ связаны соотношением

$$K_0(a) = \sum_n{}' \kappa_n \cdot \kappa_n^a = K_1(a+1).$$

Лемма 3.18. *Для любого $a \geqslant 1$ справедлива оценка:*

$$K_1(a) < 2.3 c_0 (ec_0)^a \Gamma(a+1) M.$$

Доказательство. Положим $T = \gamma_N$, $H = \gamma_{N+M} - \gamma_N$. Замечая, что

$$N(T+H) - N(T) = \big(1+o(1)\big)\,\frac{H}{2\pi}(\log T) = \big(1+o(1)\big)M,$$

с помощью леммы 3.17 находим:

$$K_1(a) = \Biggl(\sum_{n\,:\,\kappa_n < ec_0+1} + \sum_{n\,:\,\kappa_n \geqslant ec_0+1} \Biggr) \kappa_n^a \leqslant (ec_0+1)^a \bigl(N(T+H) - N(T)\bigr) + \\ + 0.832\,\frac{H}{2\pi}(\log T) \sum_{j \geqslant ec_0+1} j^a \exp\left\{-\frac{j}{ec_0}\right\} = \\ = \bigl(1+o(1)\bigr) M\biggl((ec_0+1)^a + 0.832 \sum_{j \geqslant ec_0+1} j^a \exp\left\{-\frac{j}{ec_0}\right\}\biggr). \quad (3.25)$$

Функция $f(u) = u^a \exp\bigl(-u/(ec_0)\bigr)$ возрастает на промежутке $1 \leqslant u \leqslant u_a$, где $u_a = aec_0$, достигает в точке u_a максимума, равного

$$u_a^a e^{-a} = (ac_0)^a, \quad (3.26)$$

после чего монотонно убывает. Определяя целое число m из условий $m < u_a \leqslant m+1$ и оценивая слагаемые суммы в правой части (3.25), отвечающие $j = m, m+1$, величиной (3.26), а сумму всех прочих - интегралами от функции $f(u)$, находим:

$$\sum_{j \geqslant ec_0+1} j^a \exp\left\{-\frac{j}{ec_0}\right\} \leqslant \biggl(\int_0^m + \int_{m+1}^{+\infty} \biggr) u^a \exp\left\{-\frac{u}{ec_0}\right\} du + 2(ac_0)a < \\ < \int_0^{+\infty} u^a \exp\left\{-\frac{u}{ec_0}\right\} du + 2(ac_0)a = (ac_0)^{a+1}\Gamma(a+1) + 2(ac_0)a < \\ < (ec_0)^{a+1}\Gamma(a+1)\biggl(1 + \frac{2}{ec_0}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\biggr) \leqslant \biggl(1 + \frac{1}{ec_0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\biggr)(ec_0)^{a+1}\Gamma(a+1).$$

Таким образом,

$$K_1(a) < \bigl(1+o(1)\bigr) M\biggl((ec_0+1)^a + 0.832\biggl(1 + \frac{1}{ec_0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\biggr)(ec_0)^{a+1}\Gamma(a+1)\biggr) < \\ < (ec_0)^{a+1}\Gamma(a+1)\biggl(\frac{b}{ec_0} + 0.833\biggr),$$

где

$$b = \biggl(1 + \frac{1}{ec_0}\biggr)^a \frac{1}{\Gamma(a+1)}.$$

Если $1 \leqslant a \leqslant e$, то

$$b \leqslant \biggl(1 + \frac{1}{ec_0}\biggr)^e < \exp\left\{\frac{1}{c_0}\right\};$$

если же $a > e$, то в силу формулы Стирлинга

$$b < \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\biggl(\frac{e}{a}\biggr)^a \biggl(1 + \frac{1}{ec_0}\biggr)^a < \biggl(\frac{e}{a} + \frac{1}{ac_0}\biggr)^a < \biggl(1 + \frac{1}{ac_0}\biggr)^a < \exp\left\{\frac{1}{c_0}\right\}.$$

Следовательно, $b(ec_0)^{-1} < 10^{-3}$ и

$$K_1(a) < 0.834(ec_0)^{a+1}\Gamma(a+1) < 2.3c_0(ec_0)^a\Gamma(a+1).$$

Лемма доказана.

Теперь в нашем распоряжении имеются все средства, необходимые для доказательства теорем о моментах величин $S(\gamma_n \pm 0)$.

Теорема 3.12. *Пусть k - целое число, $1 \leqslant k \leqslant c_1 \sqrt[3]{\log\log N}$. Тогда имеют место соотношения:*

$$\sum_n S^{2k}(\gamma_n \pm 0) \;=\; \frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M}{(2\pi)^{2k}}\,(\log\log N)^k\left(1 \;+\; \frac{215\theta_1\sqrt{c_0}(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\log\log N}}\right),$$
$$\left|\sum_n S^{2k-1}(\gamma_n \pm 0)\right| < 28.2c_0^2\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{M(\log\log N)^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}.$$

Доказательство. Докажем первое соотношение, выбрав для определённости знак «+» в выражении $S(\gamma_n \pm 0)$. Если $|\theta| \leqslant 1$, то из леммы 9.П и формулы конечных приращений следует, что

$$\left(S(\gamma_n + 0) + \frac{\theta\,(\log N)^2}{80N}\right)^{2k} \;=\; S^{2k}(\gamma_n + 0) \;+\; \frac{2\theta_1 k}{N}\,(0.15\log N)^{2k+1}.$$

Отсюда и из леммы 3.7 несложно теперь заключить, что суммы

$$\sum_n S^{2k}(\gamma_n + 0) \quad \text{и} \quad \sum_n \Delta_n^{2k}$$

отличаются по модулю на величину, не превосходящую

$$\sum_{\nu=1}^{2k}\binom{2k}{\nu} w_\nu \;+\; \frac{2kM}{N}\,(0.15\log N)^{2k+1},$$

где

$$w_\nu = \sum_n |\Delta_n|^{2k-\nu}\kappa_n^\nu.$$

Пользуясь оценкой леммы 3.18 наряду с утверждением теоремы 3.1 и обозначениями теоремы 2.1, находим:

$$w_\nu \leqslant \left(\sum_n \Delta_n^{2k}\right)^{1-\frac{\nu}{2k}}\left(\sum_n \kappa_n^{2k}\right)^{\frac{\nu}{2k}} = \left(\sum_n \Delta_n^{2k}\right)^{1-\frac{\nu}{2k}}\left(\sum_n{}' \kappa_n^{2k+1}\right)^{\frac{\nu}{2k}} \leqslant$$
$$\leqslant \big(2.03\mathcal{L}_k\big)^{1-\frac{\nu}{2k}}\big(2.3ec_0^2(ec_0)^{2k}(2k+1)!M\big)^{\frac{\nu}{2k}} \leqslant 2.03\mathcal{L}_k\,q^\nu,$$

где

$$q = \left\{\frac{2.3c_0(ec_0)^{2k+1}(2k+1)!M}{2.03\mathcal{L}_k}\right\}^{\frac{1}{2k}} < \frac{2\pi ec_0}{\sqrt{L}}\left(3.08c_0^2(2k+1)k!\right)^{\frac{1}{2k}} < \frac{6.08\pi e\sqrt{k}c_0^{\,1+\frac{1}{k}}}{\sqrt{L}}. \tag{3.27}$$

Несложно проверить, что $q < \dfrac{1}{116k}$ при любом k. Действительно, если $1 \leqslant k \leqslant 100$, то

$$q < \frac{60.8\pi ec_0^2}{\sqrt{L}} < \frac{1}{116k};$$

если же $100 < k \leqslant c_1 \sqrt[3]{L}$, то

$$q \leqslant \frac{6.08\pi e}{k}\,\frac{(c_0 k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\,c_0^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{6.08\pi e}{k}\,\frac{3}{4\pi}\,c_0^{-0.49} < \frac{1}{116k}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{2k}\binom{2k}{\nu}w_\nu \,<\, 2.03\mathcal{L}_k\sum_{\nu=1}^{2k}\binom{2k}{\nu}q^\nu = 2.03\mathcal{L}_k\big((1+q)^{2k}-1\big) <$$

$$< 4.06kq(1+q)^{2k}\mathcal{L}_k < 4.06\Big(1+\frac{1}{116k}\Big)^{2k} 6.08\pi e\,\frac{(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\,c_0^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}\mathcal{L}_k < 214.5\sqrt{c_0}\,\frac{(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\,\mathcal{L}_k.$$

Дословно повторяя приведённые выше рассуждения, найдём, что модуль разности между суммами

$$\sum_n S^{2k-1}(\gamma_n+0) \quad \text{и} \quad \sum_n \Delta_n^{2k-1}$$

не превосходит величины

$$\sum_{\nu=1}^{2k-1}\binom{2k-1}{\nu}w_\nu \,+\, \frac{kM}{N}(0.15\log N)^{2k}, \quad w_\nu = \sum_n |\Delta_n|^{2k-\nu-1}\kappa_n^\nu.$$

Дважды применим к w_ν неравенство Гёльдера; получим:

$$w_\nu \leqslant \Big(\sum_n \Delta_n^{2k}\Big)^{1-\frac{\nu+1}{2k}}\Big(\sum_n \kappa_n^{\frac{2k\nu}{\nu+1}}\Big)^{\frac{\nu+1}{2k}} \leqslant \Big(\sum_n \Delta_n^{2k}\Big)^{1-\frac{\nu+1}{2k}}\Big(\sum_n \kappa_n^{2k}\Big)^{\frac{\nu}{2k}} M^{\frac{1}{2k}}.$$

Далее, воспользовавшись теоремой 3.1 и леммой 3.18, будем иметь:

$$w_\nu \leqslant M^{\frac{1}{2k}}\big(2.03\mathcal{L}_k\big)^{1-\frac{\nu+1}{2k}}\,\big(2.3c_0(ec_0)^{2k+1}(2k+1)!M\big)^{\frac{\nu}{2k}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2.03\mathcal{L}_k}{\sqrt{L}}\,2\pi\Big(\frac{k!}{(2k)!}\Big)^{\frac{1}{2k}}q^\nu < \frac{4.06\pi\mathcal{L}_k}{\sqrt{kL}}\,\frac{\sqrt{e}}{2}\,q^\nu < \frac{10.52\mathcal{L}_k}{kL}\,q^\nu,$$

где q определено равенством (3.27). Таким образом,

$$\sum_{\nu=1}^{2k-1}\binom{2k-1}{\nu}w_\nu \,<\, \frac{10.52\mathcal{L}_k}{\sqrt{kL}}\big((1+q)^{2k-1}-1\big) < \frac{10.52\mathcal{L}_k}{\sqrt{kL}}\,2kq(1+q)^{2k} <$$

$$< 1092.5\,\frac{kc_0^{1+\frac{1}{k}}}{L}\left(1+\frac{1}{116k}\right)^{2k}\mathcal{L}_k \,<\, 1111.5\,\frac{kc_0^2}{L}\,\mathcal{L}_k < 28.16c_0^2\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.13. *Пусть a - произвольное число, отличное от чётного натурального числа и удовлетворяющее условию $0 < a \leqslant c_3\sqrt[3]{\log\log N}$, $c_3 = (6c_0)^{-2}$. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_n |S(\gamma_n \pm 0)|^a \,=\, \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)(\log\log N)^{\frac{a}{2}}\big(1 \,+\, \theta\, r(a)\big),$$

где

$$r(a) \;=\; \begin{cases} 22.2c_0^2\Big(\dfrac{\log\log\log N}{\log\log N}\Big)^{0.5a}, & \textit{если}\;\; 0 < a \leqslant 1, \\ \dfrac{782a}{\sqrt{\log\log N}}\big(\sqrt{\log\log\log N} \,+\, 8.6c_0^3\sqrt{a}\big), & \textit{если}\;\; a > 1. \end{cases}$$

Доказательство. Положив

$$\delta_n \;=\; \kappa_n \,+\, \frac{(\log N)^2}{80N},$$

в силу леммы 3.7 получим: $|S(\gamma_n \pm 0)| \;=\; |\Delta_n| + \theta\,\delta_n$. В случае, когда $0 \,<\, a \leqslant 1$, пользуясь утверждениями теоремы 3.2 и леммы 3.18, находим:

$$\sum_n |S(\gamma_n \pm 0)|^a \;=\; \sum_n |\Delta_n|^a \,+\, \theta\bigg(\sum_n \kappa_n \,+\, \Big(\frac{(\log N)^2}{80N}\Big)^a\bigg) \;=$$

$$= \sum_n |\Delta_n|^a \,+\, \theta_1\big(2.3c_0(ec_0)^{1+a}\Gamma(a+2)+1\big)M \;=\; \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\,\Gamma\Big(\frac{a+1}{2}\Big)L^{\frac{a}{2}}\,\big(1 \,+\, \theta_2 R_a\big),$$

где

$$R_a \;=\; 14.1\Big(\frac{\log L}{L}\Big)^{\frac{a}{2}} \,+\, 2.31e\sqrt{\pi}\,c_0^2\,\frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma\Big(\dfrac{a+1}{2}\Big)}\left\{\frac{\pi e c_0}{\sqrt{L}}\right\}^a \,<\, 22.2c_0^2\Big(\frac{\log L}{L}\Big)^{\frac{a}{2}}.$$

В случае $a > 1$ применим рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 2.3. Получим:

$$\sum_n |S(\gamma_n \pm 0)|^a \;=\; \sum_n |\Delta_n|^a \,+\, \theta\big(u + 3v + 9w\big),$$

где

$$u \;=\; \sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}u_\nu \quad v \;=\; \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}v_\nu, \quad w \;=\; \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}w_\nu,$$

а u_ν, v_ν, w_ν - суммы вида

$$\tau_{\nu,c} \;=\; \sum_n |\Delta_n|^{a-\nu-c}\,\delta_n^{\nu+c}.$$

Здесь, как и выше, a представлено в виде $k + b$, где $k \geqslant 0$ - целое, $1 \leqslant b \leqslant 2$, а c принимает значения $0, 1$ и b соответственно.

Далее, при $1 \leqslant a \leqslant c_3\,\sqrt[3]{L}$ из теоремы 3.2 получаем оценку

$$\sum_n |\Delta_n|^a \leqslant \mathcal{L}_a\left(1 \,+\, 782\bigg(c_3\,\frac{\sqrt{\log L}}{\sqrt[6]{L}} \,+\, \frac{6.6}{\pi}\sqrt{\frac{2}{e}}\,c_0^{-1.5}\bigg)\right) \,<\, 1.00025\mathcal{L}_a \;=\; I_a,$$

где обозначено:

$$\mathcal{L}_a \;=\; \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\,\Gamma\Big(\frac{a+1}{2}\Big)\,L^{\frac{a}{2}}.$$

В силу леммы 3.18,

$$\sum_n \delta_n^a \,<\, 1.001 \sum_n \kappa_n^a \,<\, 2.301 c_0 (ec_0)^{1+a} \Gamma(a+2) M \,=\, J_a.$$

Следовательно,

$$\tau_{\nu,c} \leqslant I_a \, q^{\nu+c}, \quad q \,=\, \left(\frac{J_a}{I_a}\right)^{1/a}.$$

Заметим теперь, что

$$\frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma\Big(\dfrac{a+1}{2}\Big)} \,=\, \frac{2^a(a+1)}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right) \leqslant \sqrt{2e}\,a^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2a}{e}\right)^{\frac{a}{2}}.$$

Поэтому

$$q^a = \frac{J_a}{I_a} < 25.85 a^{\frac{3}{2}}\left(\pi c_0 \sqrt{\frac{2ae}{L}}\right)^a, \quad q < 190 c_0^3 \sqrt{\frac{a}{L}} \,<\, \frac{1}{a},$$

откуда $u < I_a aeq$, $v, w < I_a eq$, так что

$$u + 3v + 9w \,<\, I_a(a+12)eq \,<\, 6716\,\frac{a^{\frac{3}{2}} c_0^3}{\sqrt{L}}.$$

Таким образом,

$$\sum_n |S(\gamma_n \pm 0)|^a \,=\, \mathcal{L}_a\big(1 \,+\, \theta\, R_a\big),$$

где

$$R_a \leqslant \frac{782a}{\sqrt{L}}\left(\sqrt{\log L} \,+\, 2.2 c_0^{1.5}\sqrt{a}\right) \,+\, 6716\,\frac{a^{\frac{3}{2}} c_0^3}{\sqrt{L}} \,<\, \frac{782a}{\sqrt{L}}\left(\sqrt{\log L} \,+\, 8.6 c_0^3\sqrt{a}\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 3.14. *Пусть $\Theta(v) = \Theta_{\pm}(v)$ - функция распределения величин $S(\gamma_n + 0)$ (соответственно, $S(\gamma_n - 0)$), т.е.*

$$\Theta_{\pm}(v) \,=\, \frac{1}{M}\,\#\left\{n \,|\, N < n \leqslant N+M,\; S(\gamma_n \pm 0) \leqslant \frac{v}{\pi\sqrt{2}}\,\sqrt{\log\log N}\right\}.$$

Тогда при любом u имеет место равенство:

$$\Theta(u) = G(u) + \frac{1.79\theta}{\sqrt{\log\log\log N}}.$$

Кроме того, если $1.5 \leqslant u \leqslant \sqrt[6]{\log\log N}$, то эта функция удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\Theta(-u)}{G(-u)} \,=\, 1 \,+\, O(R), \quad \frac{1-\Theta(u)}{1-G(u)} \,=\, 1 \,+\, O(R),$$

в которых

$$R \,=\, \frac{u(u^2 + \log\log\log N)}{\sqrt{\log\log N}},$$

а постоянные в знаках O зависят от ε.

Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству теорем 2.5 и 3.3.

Следствие. *Пусть $f(x)$ - монотонная положительная функция, неограниченно возрастающая при $x \to +\infty$. Тогда неравенства*

$$\frac{1}{f(n)}\sqrt{\log\log n} < |S(\gamma_n \pm 0)| \leqslant f(n)\sqrt{\log\log n}$$

имеют место для «почти всех» n.

Теорема 3.15. *Пусть $f(x)$ - произвольная монотонно возрастающая и неограниченная при $x \to +\infty$ функция, удовлетворяющая при $N \leqslant x \leqslant N+M$ условиям $a \leqslant f(x) \leqslant b\sqrt{\log\log x}$, где a и b - абсолютные постоянные. Пусть, далее,*

$$\mathcal{F} = f(N), \quad \delta = 0.5\exp\left\{-(ec_0)^2\,\frac{\log\log N}{\mathcal{F}}\right\}.$$

Тогда на промежутке $N \leqslant n \leqslant N+M$ найдётся не менее $M\delta$ номеров n, удовлетворяющих условию

$$S(\gamma_n \pm 0) \leqslant -\frac{1}{\mathcal{F}}\log\log N,$$

и не менее $M\delta$ номеров, удовлетворяющих условию

$$S(\gamma_n \pm 0) > \frac{1}{\mathcal{F}}\log\log N.$$

Доказательство этих утверждений почти дословно повторяет доказательство теоремы 2.6.

§6. Промежутки Грама с аномальным числом ординат нулей $\zeta(s)$

Пусть $m \geqslant 2$ - целое число. Рассмотрим m прилегающих друг ко другу промежутков Грама $G_{n+1}, G_{n+2}, \ldots, G_{n+m}$ или, что то же, промежуток $(t_n, t_{n+m}]$. Согласно формуле Римана-Мангольдта, количество попавших в него ординат нулей $\zeta(s)$ выражается числом

$$N(t_{n+m}+0) - N(t_n+0) = \frac{1}{\pi}\big(\vartheta(t_{n+m}) - \vartheta(t_n)\big) + S(t_{n+m}+0) - S(t_n+0) = \\ = m + \Delta(n+m) - \Delta(n). \quad (3.28)$$

Поскольку «в среднем» на один промежуток Грама приходится одна ордината нуля $\zeta(s)$, естественно считать m «средним», «нормальным» числом ординат в промежутке $(t_n, t_{n+m}]$. Следовательно, разность

$$S(t_{n+m}+0) - S(t_n+0) = \Delta(n+m) - \Delta(n) \quad (3.29)$$

равна отклонению количества ординат, попавших на промежуток $(t_n, t_{n+m}]$, от «нормального» значения. Если $\Delta(n+m)-\Delta(n) \neq 0$, то такой промежуток будем считать «аномальным», т.е. содержащим «аномальное» число ординат.

Настоящий параграф посвящён нижней оценке числа аномальных промежутков Грама G_n. Именно, мы докажем, что положительная доля промежутков Грама не содержит ни одной ординаты, и вместе с тем положительная доля промежутков Грама содержит не менее двух ординат нулей $\zeta(s)$ (теорема 3.18).

Этот результат является усилением теоремы Т.С. Труджиана [11] о том, что положительная доля промежутков Грама является аномальной. Следует, впрочем, отметить, что аналог теоремы 3.18 для «длинного» промежутка суммирования типа $1 \leqslant n \leqslant N$ приведён без доказательства в работе А. Фуджи [46].

Коротко поясним идею, которая лежит в основе приводимых ниже рассуждений. Теорема 3.18 означает, что для положительной доли случаев имеет место равенство

$$\Delta(n+1) - \Delta(n) = -1,$$

и в то же время в положительной доле случаев выполнено следующее соотношение:

$$\Delta(n+1) - \Delta(n) \geqslant 1.$$

Эти факты могут быть выведены, например, из оценки вида

$$\sum_n |\Delta(n+1) - \Delta(n)|^k = \sum_n \big|S(t_{n+1}+0) - S(t_n+0)\big|^k \geqslant cM, \tag{3.30}$$

где $c > 0$ - постоянное число, зависящее разве что от k. Однако непосредственное применение формул Сельберга (леммы 2.4-2.7) к исследованию разностей (3.29) при $m = 1$ ничего не даёт. Близость точек t_{n+1} и t_n приводит к грубой оценке предполагаемого остаточного члена в (3.30), и, как следствие, к верхней оценке суммы (3.30), которая сама по себе недостаточна для доказательства теоремы 3.18.

Однако замена в подобных рассуждениях точки t_{n+1} точкой t_{n+m}, где m - очень большое, но фиксированное число, приводит к содержательной формуле для суммы, подобной (3.29), которая позволяет получить для неё правильную по порядку нижнюю оценку (теорема 3.16 и её следствие).

Ещё одно несложное соображение, в основе которого лежит неравенство Гёльдера, позволяет перейти от моментов величин $\Delta(n+m) - \Delta(n)$ к суммам (3.29) и получить для них правильные по порядку нижние оценки (теорема 3.17).

Отметим ещё, что аналог теоремы 3.17 для случаев «длинного» промежутка суммирования и параметра m, растущего вместе с N, содержится в работе А. Фуджи [46]. Её доказательство приводится здесь по той причине, что при выводе теоремы 3.18 мы существенно пользуемся тем, что величина m может быть постоянным (хотя и очень большим) числом.

Для вывода формул теоремы 3.16 нам потребуется одна вспомогательная формула.

Лемма 3.19. *Пусть* $0 < h_0 < 0.5$ – *достаточно малая постоянная*, $0 < h < h_0$, $h \log x > 2$, *и пусть*

$$V(x;h) = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \sin^2\left(\frac{h}{2}\log p\right).$$

Тогда справедливо равенство:

$$V(x;h) \,=\, \frac{1}{2}\log\left(h\log x\right) \,+\, 1.05\theta.$$

Доказательство. Положив $y = e^{\lambda/h}$, где $1 < \lambda < 2$, будем иметь:

$$V(x;h) \,=\, \Big(\sum_{p\leqslant y} + \sum_{y<p\leqslant x}\Big)\frac{1}{p}\,\sin^2\left(\frac{h}{2}\log p\right) \,=$$
$$=\, \sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p}\,\sin^2\left(\frac{h}{2}\log p\right) \,+\, \frac{1}{2}\sum_{y<p\leqslant x}\frac{1-\cos\left(h\log p\right)}{p} \,=\, V_1 + \frac{1}{2}(V_2 - V_3).$$

Воспользовавшись оценками леммы 1.5, получаем:

$$V_1 \leqslant \Big(\frac{h}{2}\Big)^2\sum_{p\leqslant y}\frac{(\log p)^2}{p} \leqslant \Big(\frac{h}{2}\Big)^2(\log y)\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p} \,<\, \Big(\frac{h}{2}\log y\Big)^2 = \frac{\lambda^2}{4},$$
$$V_2 = \Big(\sum_{p\leqslant x} - \sum_{p\leqslant y}\Big)\frac{1}{p} \,=\, \log(h\log x) \,-\, \log\lambda \,+\, 2\theta\Big(\frac{h}{\lambda}\Big)^2.$$

Чтобы оценить V_3, разобьём область изменения p точками вида $a = 2^k y$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ на промежутки вида $a < p \leqslant b$, где $y \leqslant a < x$, $b \leqslant 2a$. Так находим:

$$V_3 \,=\, \mathrm{Re}\sum_{y<p\leqslant x}\frac{p^{ih}}{p} \,=\, \mathrm{Re}\sum_a V_3(a), \quad V_3(a) \,=\, \sum_{a<p\leqslant b}\frac{p^{ih}}{p}.$$

Полагая

$$\mathbb{C}(u) \,=\, \sum_{a<p\leqslant u}\frac{1}{p} \,=\, \log\log u \,-\, \log\log a \,+\, \frac{2\theta}{\log^2 a}$$

и применяя к $V_3(a)$ преобразование Абеля, будем иметь:

$$V_3(a) \,=\, \mathbb{C}(b)b^{ih} \,-\, \int_a^b \mathbb{C}(u)du^{ih} \,=\, \int_a^b \frac{u^{ih}du}{u\log u} \,+\, \frac{3\theta_1}{\log^2 a},$$

откуда

$$V_3 \,=\, \mathrm{Re}(j) \,+\, 3\theta_2\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(k\log 2 + \log y)^2}, \quad j \,=\, \int_y^x \frac{u^{ih}du}{u\log u}.$$

Интегрирование по частям даёт:

$$j \,=\, \frac{1}{ih}\Big(\frac{x^{ih}}{\log x} \,-\, \frac{y^{ih}}{\log y} \,-\, \int_y^x u^{ih}d\,\frac{1}{\log u}\Big), \quad |j| \leqslant \frac{2}{h\log y} \,=\, \frac{2}{\lambda}.$$

Окончательно находим:

$$|V_3| \leqslant \frac{2}{\lambda} \,+\, \frac{9}{\log y} \,=\, \frac{2+9h}{\lambda},$$
$$V(x;h) \,=\, \frac{1}{2}\log\left(h\log x\right) \,+\, v(x;h),$$

где

$$|v(x;h)| \leqslant \frac{\lambda^2}{4} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}\log\lambda + \frac{9h}{\lambda} + \frac{h^2}{\lambda^2}.$$

Полагая $\lambda = 1.5$, приходим к утверждению леммы.

Теорема 3.16. *Пусть k и m - целые числа, удовлетворяющие условиям $k \geqslant 1$, $k\,\varepsilon^{-1}\exp\{(4c_0k)^3\} < m \leqslant c\log N$, где c - достаточно малая абсолютная постоянная. Тогда справедливо равенство:*

$$\sum_n \big(\Delta(n+m) - \Delta(n)\big)^{2k} = \frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M}{(2\pi^2)^k}\left(\log\frac{m\,\varepsilon}{k}\right)^k\left(1 + \frac{5.4\theta(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\log(m\,\varepsilon/k)}}\right).$$

Доказательство. Положим, как и выше,

$$x = X^{\frac{1}{8k+3}}, \quad W(t) = -\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}, \quad R(t) = S(t) - W(t),$$

так что

$$\Delta(n) = R(t_n + 0) + W(t_n). \tag{3.31}$$

Для рассматриваемых значений n, m из леммы 1.1 получаем:

$$t_{n+m} - t_n = h + \varepsilon_n, \quad h = \frac{\pi m}{\vartheta'(t_N)}, \quad |\,\varepsilon_n\,| \leqslant \frac{2\pi mM}{N(\log N)^2},$$

откуда

$$W(t_{n+m}) = W(t_n + h) + \frac{2\pi\theta_1 mM\sqrt{x}}{N(\log N)^2},$$

$$W(t_{n+m}) - W(t_n) = -\frac{1}{\pi}\big(U(t_n) + \overline{U}(t_n)\big) + \frac{2\pi\theta_1 mM\sqrt{x}}{N(\log N)^2},$$

где

$$U(t) = \sum_{p\leqslant x}\frac{a(p)}{\sqrt{p}}\,p^{it}, \quad a(p) = p^{\frac{ih}{2}}\sin\left(\frac{h}{2}\log p\right).$$

Согласно лемме 2.1 имеем:

$$W = \sum_n \big(W(t_{n+m}) - W(t_n)\big)^{2k} = \pi^{-2k}\sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}\sum_n U^\nu(t_n)\overline{U}^{2k-\nu}(t_n) + \theta_2 N^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= \pi^{-2k}\binom{2k}{k}M\mathfrak{S} + \theta_3\sqrt{X},$$

где

$$\mathfrak{S} = k!\big(\mathfrak{S}_1^k + \theta_4 k^2\mathfrak{S}_1^{k-2}\mathfrak{S}_2\big), \quad \mathfrak{S}_1 = \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\sin^2\left(\frac{h}{2}\log p\right), \quad \mathfrak{S}_2 \leqslant \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p^2} < \frac{1}{2}.$$

Воспользовавшись леммой 3.19 наряду с равенствами

$$h\log x = \frac{\pi m\log x}{\vartheta'(t_N)} = \frac{\pi m\,\varepsilon}{10(8k+3)}\,\frac{\log N}{\vartheta'(t_N)} = \big(1 + o(1)\big)\,\frac{\pi m\,\varepsilon}{40k}\left(1 + \frac{3}{8k}\right)^{-1},$$

получим:

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{2}\log\frac{\pi m \log x}{40k} - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{3}{8k}\right) + 1.05\theta_5 + o(1) = \frac{\Lambda}{2} + 2.52\theta_6,$$

где $\Lambda = \log\dfrac{m\,\varepsilon}{k}$. Из условия на k и m следует, что $\Lambda \geqslant (4c_0k)^3$. Поэтому

$$\mathfrak{S}_1^k = \left(\frac{\Lambda}{2}\right)^k\left(1+\frac{5.04\theta_6}{\Lambda}\right)^k = \left(\frac{\Lambda}{2}\right)^k\left(1+\frac{5.05\theta_6 k}{\Lambda}\right),$$
$$\mathfrak{S}_1^{k-2} < 1.001\left(\frac{\Lambda}{2}\right)^k,$$

и, наконец,

$$S = k!\left(\frac{\Lambda}{2}\right)^k\left(1+\frac{5.06\theta_8 k}{\Lambda}\right).$$

Таким образом,

$$W = \frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k}\left(1+\frac{5.07\theta_9 k}{L}\right).$$

В частности, для рассматриваемых k имеем оценку:

$$W < 1.001\,\frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k}. \tag{3.32}$$

Обозначая через V сумму из условия леммы и пользуясь равенством (3.31), находим:

$$V = W + \sum_{\nu=1}^{2k}(-1)^\nu\binom{2k}{\nu}V_\nu,$$

где

$$V_\nu = \sum_n \big(W(t_{n+m}) - W(t_n)\big)^{2k-\nu}\big(R(t_{n+m}+0) - R(t_n+0)\big)^\nu.$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера наряду с утверждением леммы 2.7 и оценкой (3.32), получим:

$$|V_\nu| \leqslant V^{1-\frac{\nu}{2k}}\left\{\sum_n\big(R(t_{n+m}+0) - R(t_n+0)\big)^{2k}\right\}^{\frac{\nu}{2k}} \leqslant$$
$$\leqslant\left\{1.001\,\frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k}\right\}^{1-\frac{\nu}{2k}}\left\{\frac{c_0}{56}(2c_0k)^{2k}M\right\}^{\frac{\nu}{2k}} < 1.001\,\frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k}\,q^\nu,$$

где

$$q = \left(\frac{c_0}{56}\right)^{\frac{1}{2k}}\pi c_0\sqrt{\frac{2ke}{\Lambda}} \leqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{e}{7}}\,c_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{k}{\Lambda}}.$$

Заметим, что

$$q \leqslant \frac{1}{k}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{e}{7}}\frac{(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Lambda}} < \frac{1}{8k}.$$

Поэтому, переходя к оценке суммы по ν в (3.32), будем иметь:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{2k}(-1)^{\nu}\binom{2k}{\nu}V_{\nu}\right| <$$

$$< 1.001\,\frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k}\left\{(1+q)^{2k}-1\right\} < 1.001\cdot 2kq(1+q)^{2k-1}\,\frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k} <$$

$$< 1.001\cdot 2k\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{e}{7}}\,c_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{k}{L}}\left(1+\frac{1}{8k}\right)^{2k}\frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k} <$$

$$< 1.001\,\frac{\pi e^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{7}}\,\frac{(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Lambda}}\,\frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k} < 2.12\,\frac{(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Lambda}}\,\frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k}.$$

Возвращаясь к исходной сумме, находим:

$$V = \frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k}\big(1+\theta\delta\big),$$

$$\delta = \frac{5.07k}{\Lambda} + 2.12\,\frac{(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Lambda}} < 2.2\,\frac{(c_0k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Lambda}}.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $m=[\mu]+1$, *где* $\mu=\varepsilon^{-1}\exp\left\{(4c_0)^3\right\}$. *Тогда*

$$\sum_n\big(\Delta(n+m)-\Delta(n)\big)^2 > 2c_0^3M.$$

Теорема 3.17. *Справедлива оценка:*

$$\sum_n\big|\Delta(n+1)-\Delta(n)\big| > K_1M,$$

где $K_1=\dfrac{c_0^2\,\varepsilon^3}{4}\exp\left\{-192c_0^3\right\}$.

Доказательство. Положим, как и выше, $r(n)=\Delta(n)-\Delta(n-1)$ и обозначим сумму k-х степеней величин $|r(n)|$ через V_k. Пусть, далее, $m=[\mu]+1$, где $\mu=\varepsilon^{-1}\exp\left\{(4c_0)^3\right\}$. Из тождества

$$\Delta(n+m)-\Delta(n) = r(n+1)+r(n+2)+\ldots+r(n+m)$$

с помощью неравенства Коши получаем:

$$\big(\Delta(n+m)-\Delta(n)\big)^2 \leqslant m\sum_{\nu=1}^{m}r^2(n+\nu).$$

Суммируя обе части этого соотношения по n, находим:

$$\sum_n\big(\Delta(n+m)-\Delta(n)\big)^2 \leqslant m\sum_{\nu=1}^{m}\sum_n r^2(n+\nu) \leqslant$$

$$\leqslant m\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{N<n\leqslant N+M+m}r^2(n) \leqslant m^2\sum_{N<n\leqslant N+M+m}r^2(n).$$

Воспользовавшись следствием теоремы 3.16 наряду с оценкой леммы 3.1, будем иметь:

$$\sum_{N<n\leqslant N+M+m} r^2(n) \geqslant \frac{1}{m^2}\sum_n \big(\Delta(n+m)-\Delta(n)\big)^2 \geqslant \frac{2c_0^3}{m^2}M > \\ > 1.5c_0^3\,\varepsilon^2 \exp\big\{-128c_0^3\big\}M,$$

$$V_2 = \sum_n r^2(n) > 1.5c_0^3\,\varepsilon^2\exp\big\{-128c_0^3\big\}M - m(0.3\log N)^2 > \\ > c_0^3\,\varepsilon^2\exp\big\{-128c_0^3\big\}M = K_2M.$$

С другой стороны, применяя к V_2 неравенство Гёльдера, будем иметь:

$$V_2 = \sum_n |r(n)|^{\frac{2}{3}}\cdot|r(n)|^{\frac{4}{3}} \leqslant \left(\sum_n |r(n)|\right)^{\frac{2}{3}}\left(\sum_n r^4(n)\right)^{\frac{1}{3}} = V_1^{\frac{2}{3}}V_4^{\frac{1}{3}},$$

откуда $V_1 \geqslant V_2^{\frac{3}{2}}V_4^{-\frac{1}{2}}$. Пользуясь найденной выше оценкой суммы V_2 и неравенством теоремы 3.5 с $k=2$, получим:

$$V_4 \leqslant K_4M, \quad K_4 = \frac{256}{17}\,c_0^5,$$
$$V_1 = \sum_n |r(n)| \geqslant \frac{(K_2M)^{3/2}}{(K_1M)^{1/2}} = K_1M,$$

где

$$K_1 = K_2^{\frac{3}{2}}K_4^{-\frac{1}{2}} > \frac{c_0^2\,\varepsilon^3}{4}\,\exp\big\{-192c_0^3\big\}.$$

Теорема доказана.

Пусть $\nu_k(N)$ обозначает число промежутков Грама G_n, $1\leqslant n\leqslant N$, каждый из которых содержит в точности k ординат нулей $\zeta(s)$. Имеет место

Теорема 3.18. *Существуют положительные постоянные $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ такие, что среди промежутков Грама G_n, $N<n\leqslant N+M$, найдётся по крайней мере $\varkappa_1 M$ таких, которые не содержат ни одной ординаты нулей $\zeta(s)$, и по крайней мере $\varkappa_2 M$ таких, что содержат две и более ординат нулей дзета-функции Римана. Иначе говоря, имеют место следующие неравенства:*

$$\nu_0(N+M)-\nu_0(N) \geqslant \varkappa_1 M, \quad \sum_{k\geqslant 2}\big(\nu_k(N+M)-\nu_k(N)\big) \geqslant \varkappa_2 M.$$

Доказательство. Из леммы 3.3 следует, что число M_1 «пустых» промежутков Грама совпадает с числом тех n, для которых величина

$$r(n) = \Delta(n)-\Delta(n-1) = S(t_n+0)-S(t_{n-1}+0)$$

отрицательна, а число M_2 промежутков Грама с более чем одной ординатой совпадает с числом тех n, для которых величина $r(n)$ строго положительна.

Воспользовавшись соотношением

$$\frac{1}{2}\big(|r(n)| - r(n)\big) = \begin{cases} 1, & \text{если } r(n) < 0, \\ 0, & \text{если } r(n) > 0 \end{cases}$$

наряду с оценкой теоремы 3.17, находим:

$$M_1 = \sum_n \frac{1}{2}\big(|r(n)| - r(n)\big) = \frac{1}{2}\sum_n |r(n)| - \frac{1}{2}\sum_n \big(\Delta(n) - \Delta(n-1)\big) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_n |r(n)| - \frac{1}{2}\big(\Delta(N+M) - \Delta(N)\big) > 0.5\, K_1 M - 0.15 \log N > \varkappa_1 M, \quad \varkappa_1 = 0.4\, K_1.$$

Далее, M_2 совпадает с числом ненулевых слагаемых в сумме

$$W = \sum_n \frac{1}{2}\big(|r(n)| + r(n)\big).$$

Применяя к W неравенство Коши наряду с оценкой леммы 3.3, будем иметь:

$$W \leqslant \left(M_2 \sum_n r^2(n)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(M_2 \cdot \frac{4c_0^3}{17}\, M\right)^{\frac{1}{2}}.$$

С другой стороны, $W > \varkappa_1 M$ в силу теоремы 3.17. Таким образом,

$$M_2 \geqslant \frac{17}{4}\, \frac{\varkappa_1^2 M^2}{c_0^3 M} > 4c_0^{-3}\, \varkappa_1^2 M = \varkappa_2 M.$$

Теорема доказана.

Замечание. Значения постоянных $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ в теореме 3.18 чрезвычайно малы. Так, даже в случае $\varepsilon = 10^{-3}$ они не превосходят $\exp\big\{-4.5 \cdot 10^{21}\big\}$ и $\exp\big\{-9 \cdot 10^{21}\big\}$ соответственно. В то же время приближённые вычисления нулей $\zeta(s)$ позволяют предположить, что $\varkappa_1 > 0.1$, $\varkappa_2 > 0.1$. В связи с этим было бы интересно получить аналог теоремы 3.18 с более-менее разумными значениями этих постоянных (скажем, порядка $0.001 - 0.01$).

§7. Новый эквивалент «почти» гипотезы Римана

В настоящем параграфе рассматривается следующий вопрос: что именно подразумевал Сельберг под величинами γ_n в докладе [12] при формулировке своих результатов и предположений относительно величин Δ_n - положительные ординаты нулей дзета-функции, лежащих на критической прямой (в наших обозначениях - $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n, \ldots$) или же ординаты всех вообще комплексных нулей $\zeta(s)$, лежащих в верхней полуплоскости?

Этот на первый взгляд искусственный вопрос имеет, между тем, принципиальное значение. Постановка его объясняется следующими причинами.

В начале упомянутого доклада Сельберг оговаривает, что символ $\beta + i\gamma$ будет служить ему для обозначения нулей $\zeta(s)$, лежащих в критической полосе выше вещественной оси (в наших обозначениях - $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$). Вместе с тем, при определении величин Δ_n Сельбергом цитируется результат Титчмарша [9] о неограниченности дробей

$$\tau_n = \frac{\mathfrak{c}_n - t_n}{t_{n+1} - t_n}$$

и указывается на его непосредственную связь с неограниченностью величин Δ_n.

Если нуль $\mathfrak{c}_n$ функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ удовлетворяет условию

$$t_{m-1} < \mathfrak{c}_n \leqslant t_m, \tag{3.33}$$

то несложно показать (см., например, лемму 3.6), что

$$\frac{\mathfrak{c}_n - t_n}{t_{n+1} - t_n} = m - n + O(1).$$

Итак, неограниченность дробей Титчмарша влечёт и неограниченность разностей $m-n$, определённых соотношением (3.33). Но такие разности, вообще говоря, могут и не совпадать с определёнными во Введении величинами Δ_n. Этому может препятствовать наличие у дзета-функции нулей вне критической прямой.

Таким образом, имеются две исключающие друг друга возможности: либо 1) Сельберг обозначал через Δ_n именно те разности, что определяются соотношением (3.33) и доказывал для них формулы (12) и (13), либо 2) Сельберг не вполне корректно процитировал результат Титчмарша, неявно заменив $\mathfrak{c}_n$ на γ_n в определении дробей τ_n. Нам предстоит определить, какая из этих альтернатив имела место.

Так, реализация первой возможности обесценивает большинство результатов этой работы, поскольку в этом случае формулы, доказанные в §§1-3 главы 3, не являются формулами Сельберга и их следствиями. Таким образом, одна из целей работы - строгое обоснование формул Сельберга - остаётся недостигнутой.

Напротив, реализация второй возможности означала бы, например, ликвидацию пробела, который возник благодаря тому, что бóльшая часть исследований Сельберга, касающаяся закона Грама, осталась неопубликованной.

Ниже приводятся аргументы в пользу того, что на самом деле имела место вторая из перечисленных выше альтернатив. Суть их сводится к следующему.

Допустив первую возможность, мы выведем из формул Сельберга утверждение, эквивалентное «почти гипотезе Римана», т.е. гипотезе, согласно которой «почти все» комплексные нули $\zeta(s)$ лежат на критической прямой:

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{N_0(T)}{N(T)} = 1$$

(здесь и далее $N_0(T)$ - число нулей $\zeta(s)$, лежащих на критической прямой, ординаты которых положительны и не превосходят T). Без сомнения, такой эквивалент должен был быть известен Сельбергу. Доказав его, он не преминул бы в той или иной форме упомянуть о столь значительном результате.[3)] Поскольку ни Сельбергом, ни

[3)] Очевидно, такой результат явился бы сенсацией. В частности, его доказательство упразднило бы непрекращающуюся и по сей день обширную деятельность, связанную с уточнением постоянной κ в неравенстве Сельберга $N_0(T) \geqslant \kappa \cdot N(T)$.

кем-либо другим подобных заявлений сделано не было, естественно заключить, что первая альтернатива не могла иметь место[4)].

Во избежание путаницы в обозначениях в случае, когда имеют место неравенства (3.33), разность $m-n$ будет обозначаться через D_n. Разумеется, если гипотеза Римана верна, то $\mathfrak{c}_n = \gamma_n$ и $D_n = \Delta_n$ для любого n.

Теорема 3.19. *Необходимым и достаточным условием для справедливости «почти» гипотезы Римана является выполнение при $N \to +\infty$ условия*

$$\sum_{n \leqslant N} |D_n| \;=\; o\big(N^{\,2}\big). \tag{3.34}$$

Доказательство. Заметим сперва, что

$$N_0(\mathfrak{c}_n + 0) = n + O(\log n). \tag{3.35}$$

Действительно, обозначая через κ кратность нуля $\frac{1}{2} + i\mathfrak{c}_n$, из леммы 9.П получим:

$$\kappa \leqslant S(\mathfrak{c}_n + 0) - S(\mathfrak{c}_n - 0) < 0.3 \log \mathfrak{c}_n.$$

Таким образом,

$$N_0(\mathfrak{c}_n + 0) = n + \theta_1 \kappa = n + 0.3\theta_2 \log \mathfrak{c}_n. \tag{3.36}$$

Полагая $t = \mathfrak{c}_n + 0$ в неравенствах $0.4N(t) < N_0(t) \leqslant N(t)$, которые следуют из леммы 11.П и определения $N_0(t)$, и учитывая (3.36), найдём:

$$\big(1 + o(1)\big)\, \frac{\mathfrak{c}_n}{5\pi} \log \frac{\mathfrak{c}_n}{2\pi} < n \leqslant \big(1 + o(1)\big)\, \frac{\mathfrak{c}_n}{2\pi} \log \frac{\mathfrak{c}_n}{2\pi},$$

откуда $\log \mathfrak{c}_n = \log n + O(\log \log n)$. Так приходим к равенству (3.35).

Предположим теперь, что «почти» гипотеза Римана верна. Тогда, пользуясь (3.35), будем иметь:

$$N(\mathfrak{c}_n + 0) \;=\; (1 \,+\, o(1)) N_0(\mathfrak{c}_n + 0) \;=\; (1 \,+\, o(1))(n \,+\, O(\log n)) \;=\; n \,+\, o(n)$$

С другой стороны, из (3.33) находим:

$$m - 1 + S(t_{m-1} + 0) \;<\; N(\mathfrak{c}_n + 0) \leqslant m + S(t_m + 0),$$

откуда

$$D_n = m - n = o(n) + O(\log m) = o(n) \tag{3.37}$$

и, следовательно,

$$\sum_{n \leqslant N} |D_n| \;=\; o(N^2).$$

Обратно, пусть выполняется условие (3.34). Замечая, что $N(\mathfrak{c}_n + 0) \geqslant n + \varepsilon(n)$, где $\varepsilon(n)$ – число нулей $\zeta(s)$ с условием $0 < \operatorname{Im} s \leqslant \mathfrak{c}_n$, $\operatorname{Re} s \neq \frac{1}{2}$, получим:

$$n + \varepsilon(n) \leqslant N(t_m + 0) \;=\; m + S(t_m + 0),$$

[4)] См. также замечание в конце §1 главы 4.

откуда $0 \leqslant \varepsilon(n) \leqslant |D_n| + |S(t_m + 0)|$. Суммируя эту оценку по $n \leqslant 2N$ и применяя неравенство Коши, будем иметь:

$$\sum_{n \leqslant 2N} \varepsilon(n) \leqslant \sum_{n \leqslant 2N} |D_n| + \sum_{\substack{n \leqslant 2N \\ m = m(n)}} |S(t_m + 0)| \leqslant \sqrt{2N}\sqrt{W} + o(N^2),$$

где

$$W = \sum_{\substack{n \leqslant 2N \\ m = m(n)}} S^2(t_m + 0).$$

Пусть μ – наибольшее значение, которое принимает величина $m(n)$ при $n \leqslant 2N$. Тогда $t_{\mu-1} < \mathfrak{c}_{2N} \leqslant t_\mu$, откуда

$$N(\mathfrak{c}_{2N}) \geqslant N(t_{\mu-1}) = \mu + O(\log \mu).$$

С другой стороны, из леммы 11.П при $t = \mathfrak{c}_{2N}$ получаем:

$$N(\mathfrak{c}_{2N}) \leqslant \left(\tfrac{5}{2} - 10^{-3}\right) N_0(\mathfrak{c}_{2N}) = \left(\tfrac{5}{2} - 10^{-3}\right)(2N + O(\log N)),$$

откуда $\mu < 5N$. Меняя в сумме W порядок суммирования, будем иметь:

$$W \leqslant \sum_{l \leqslant 5N} S^2(t_l + 0) \sum_{\substack{n \leqslant 2N \\ m(n) = l}} 1.$$

Если l фиксировано, то количество чисел n, удовлетворяющих условиям $n \leqslant 2N$, $m(n) = l$, не превосходит числа всех ординат нулей $\zeta(s)$, попавших в промежуток $(t_{l-1}, t_l]$, т.е. величины

$$N(t_l + 0) - N(t_{l-1} + 0) = 1 + S(t_l + 0) - S(t_{l-1} + 0) = 1 + r(l).$$

Поэтому

$$W \leqslant \sum_{l \leqslant 5N} S^2(t_l + 0)(1 + r(l)).$$

Пользуясь равенством теоремы 2.1 наряду со второй оценкой теоремы 3.6, последовательно находим:

$$W \leqslant \frac{5N}{2\pi^2} \log\log N + O\left(N\sqrt{\log\log N}\right) < \tfrac{1}{3} N \log\log N,$$
$$\sum_{n \leqslant 2N} \varepsilon(n) < N\sqrt{\log\log N} + o(N^2) = o(N^2).$$

Замечая теперь, что $\varepsilon(N+1) + \varepsilon(N+2) + \ldots + \varepsilon(2N) \geqslant N\,\varepsilon(N)$, получим:

$$N\,\varepsilon(N) = o(N^2), \quad \varepsilon(N) = o(N).$$

Если число t достаточно велико, то, определяя N из неравенств $\mathfrak{c}_{N-1} < t \leqslant \mathfrak{c}_N$ и пользуясь доказанным выше соотношением, будем иметь:

$$N(t) \geqslant N - 1, \quad N(t) - N_0(t) \leqslant \varepsilon(N) = o(N) = o(N(t)),$$

что и требовалось. Теорема доказана.

Следствие 1. *Выполнение хотя бы при одном фиксированном $k \geqslant 1$ оценки*

$$\sum_{n \leqslant N} |D_n|^k \,=\, o\big(N^{k+1}\big)$$

при $N \to +\infty$ является необходимым и достаточным условием для выполнения «почти» гипотезы Римана.

Доказательство аналогично приведённому выше с той лишь разницей, что при установлении достаточности необходимо воспользоваться неравенствами

$$N\,\varepsilon(N) \leqslant \sum_{n \leqslant 2N} |D_n| \,+\, N\sqrt{\log\log N} \leqslant (2N)^{1-\frac{1}{k}} \Bigg(\sum_{n \leqslant 2N} |D_n|^k \Bigg)^{\frac{1}{k}} \,+\, N\sqrt{\log\log N}.$$

Это утверждение, в частности, показывает, что если бы формулы Сельберга (12), (13) оставались верны и при замене Δ_n величинами D_n, то из них следовала бы «почти» гипотеза Римана.

Следствие 2. *Соотношение $D_n = o(n)$ при $n \to +\infty$ является необходимым и достаточным условием для справедливости «почти» гипотезы Римана.*

Доказательство. Необходимость следует из (3.37), а достаточность - из следствия 1 при $k = 1$.

Глава 4

Порядок роста величин Δ_n

Теоремы 3.3 и 3.4 о распределении величин Δ_n позволяют сделать вывод о существовании таких номеров n, для которых величина $|\Delta_n|$ существенно превышает своё «среднее» значение $\sqrt{\log\log n}$.

Например, при сколь угодно малом фиксированном δ с условием $0 < \delta < 0.5$ и $N \geqslant N_0(\varepsilon, \delta)$ из теоремы 3.4 следует существование по крайней мере

$$M \exp\left(-\left(\log\log N\right)^{1-\delta}\right) \;>\; \frac{M}{\log N}$$

номеров n, $N < n \leqslant N + M$, для которых выполнено неравенство

$$\Delta_n \geqslant (\log\log N)^{1-\delta}. \tag{4.1}$$

Вместе с тем, «зазор» между (4.1) и верхней оценкой $|\Delta_n| \ll \log n$ из леммы 3.1 слишком велик. Это наводит на мысль о том, что, во-первых, оценка леммы 3.1 достаточно груба и что, во-вторых, должны существовать значения Δ_n, по абсолютной величине значительно превосходящие правую часть (4.1).

Первое из этих предположений является, по-видимому, верным, однако средствами для его проверки мы не располагаем. Единственным аргументом в его пользу служит условная верхняя оценка $|\Delta_n|$, которая опирается на гипотезу Римана (теорема 4.4).

Обоснованию второго предположения мы посвящаем первый параграф настоящей главы. Именно, мы покажем, что Δ_n может принимать как положительные, так и отрицательные значения, превышающие по модулю

$$c\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad \text{или даже} \qquad c\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

если гипотеза Римана верна. В последнем случае оказывается также, что большие значения $|\Delta_n|$ могут встречаться и на очень коротких промежутках изменения n (теоремы 4.2 и 4.3).

Однако ни теоремы 3.3, 3.4 о распределении значений Δ_n, ни утверждения §4.1 не позволяют ответить на следующий вопрос: принимает ли величина Δ_n заданное целочисленное значение k при изменении n на промежутке $N < n \leqslant N + M$, и если принимает, то как часто? Вопрос этот[1)] представляется не лишённым интереса по

[1)] Поставленный автору (в несколько иной форме) его учителем Анатолием Алексеевичем Карацубой 31 июля 2008 года.

той ещё причине, что ответ на него в частном случае $k = 0$ позволил бы узнать, как часто на заданном промежутке наблюдается явление Грама-Сельберга.

Задачи такого рода и рассматриваются во втором параграфе этой главы. Оказывается, что всякое целочисленное значение k, находящееся между «экстремальными» значениями (существование которых гарантируется теоремами 4.2 и 4.3), принимается величиной Δ_n, и притом достаточно часто (теоремы 4.7-4.9).

§1. O - и Ω - теоремы для Δ_n

Хорошо известно, что функция $S(t)$ может принимать очень большие по модулю как положительные, так и отрицательные значения (см., например, [38]). Используя особенности этой функции, связанные с формулой Римана-Мангольдта, а также «регулярный» характер последовательности $\{t_n\}$, можно показать, что утверждения всех омега-теорем для $S(t)$ остаются в силе и тогда, когда параметр t пробегает множество точек Грама.

Применив лемму 3.3 о связи последовательностей $S(t_n+0) = \Delta(n)$ и Δ_n, несложно вывести отсюда и соответствующие аналоги омега-теорем для Δ_n.

Однако рассуждения такого рода приводят к потери точности ряда оценок. Чтобы избежать этого, мы отказываемся от использования здесь леммы 3.3. Вместо этого мы сперва докажем соответствующие омега-теоремы для дробей

$$q_n = \frac{\gamma_n - t_n}{t_{n+1} - t_n},$$

после чего с помощью леммы 3.7 осуществим переход от q_n к Δ_n.

Теорема 4.1. *Существует положительная постоянная c, зависящая лишь от ε и такая, что*

$$\max_{N<n\leqslant N+M}\{\pm\Delta_n\} \geqslant c\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Доказательство. Положим

$$q = a_1\left(\frac{\ln N}{\ln\ln N}\right)^{\frac{1}{3}},$$

где точное значение постоянной a_1 будет выбрано ниже. Допустим сперва, что для всех n из рассматриваемого промежутка выполнены неравенства

$$q_n = \frac{\gamma_n - t_n}{t_{n+1} - t_n} < q.$$

Полагая $u_n = t_n + q(t_{n+1} - t_n)$, для таких n будем иметь: $\gamma_n < u_n$, и, следовательно,

$$n \leqslant N(\gamma_n + 0) \leqslant N(u_n + 0) = \frac{\vartheta(u_n)}{\pi} + 1 + S(u_n + 0). \tag{4.2}$$

По формуле конечных приращений,

$$\vartheta(u_n) = \vartheta(t_n) + \vartheta'(t_n)(t_{n+1} - t_n)q + \frac{1}{2}\,\vartheta''(\xi)(t_{n+1} - t_n)^2q^2 =$$
$$= \pi(n-1) + \pi q\left(1 + O\left(\frac{q}{N\log N}\right)\right) = \pi(n - 1 + q) + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

где $t_n < \xi < t_{n+1}$. Подставив последнее выражение в (4.2), получим:

$$S(u_n + 0) \geqslant n - \frac{\vartheta(u_n)}{\pi} - 1 = -q + O\left(\frac{1}{N}\right). \tag{4.3}$$

Покажем теперь, что неравенство (4.3) не может иметь место для всех без исключения значений n, $N < n \leqslant N + M$.

Рассмотрим при произвольном (не обязательно целом) $x > 1$ величину t_x из соотношения $\vartheta(t_x) = (x-1)\pi$ и положим $u_x = t_x + (t_{x+1} - t_x)q$. Тогда при некотором η, $x < \eta < x + 1$, будем иметь:

$$u'_x = t'_x + (t'_{x+1} - t'_x)q = t'_x + t''_\eta q. \tag{4.4}$$

Пользуясь леммой 1.1 наряду с равенствами

$$t'_x = \frac{\pi}{\vartheta'(t_x)}, \quad t''_x = -\frac{\pi^2\,\vartheta''(t_x)}{(\vartheta'(t_x))^3},$$

при $N < x \leqslant N + M$ находим:

$$u'_x = \frac{\pi}{\vartheta'(t_x)} - \frac{\pi^2 q\,\vartheta''(t_\eta)}{(\vartheta'(t_\eta))^3} = \frac{\pi}{\vartheta'(t_x)}\left(1 - O\left(\frac{q}{x\log x}\right)\right) > \frac{\pi}{2\,\vartheta'(t_x)} > 0.$$

Итак, u_x как функция x монотонно возрастает. Вместе с нею возрастающей будет и последовательность u_n, $N < n \leqslant N + M$. Согласно лемме 12.П, на промежутке $(u_N, u_{N+M}]$ найдётся точка u такая, что

$$S(u) < -a\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{3}},$$

где $a = 0.5 \cdot 10^{-3}\delta^{5/4}$, $\delta = 10^{-4}\,\varepsilon$. Воспользовавшись монотонностью и неограниченностью последовательности u_n, определим номер n из неравенств $u_n < u \leqslant u_{n+1}$. Предположим, далее, что $\gamma^{(1)} < \gamma^{(2)} < \ldots < \gamma^{(k)}$ - все различные ординаты нулей $\zeta(s)$, попавшие на промежуток $(u_n, u]$. Тогда, записывая приращение функции $S(t)$ на этом промежутке подобно тому, как это делалось при доказательстве леммы 3.17, приходим к тождеству

$$\begin{aligned} S(u) - S(u_n + 0) = {} & \big\{S(\gamma^{(1)} - 0) - S(u_n + 0)\big\} + \\ & + \big\{S(\gamma^{(1)} + 0) - S(\gamma^{(1)} - 0)\big\} + \ldots + \big\{S(\gamma^{(k)} - 0) - S(\gamma^{(k-1)} + 0)\big\} + \\ & + \big\{S(\gamma^{(k)} + 0) - S(\gamma^{(k)} - 0)\big\} + \big\{S(u) - S(\gamma^{(k)} + 0)\big\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

(если u совпадает с ординатой нуля $\zeta(s)$, то во всех формулах $S(u)$ следует заменить на $S(u + 0)$).

Преобразуя (4.5) с помощью формулы конечных приращений, находим:

$$\begin{aligned} S(u) - S(u_n + 0) \geqslant \big\{(\gamma^{(1)} - u_n) + (\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}) + \ldots + (u - \gamma^{(k)})\big\}\left(-\frac{1}{2}\log\frac{u}{2\pi} + O\big(u^{-2}\big)\right) > \\ > -\frac{1}{2}\,(u - u_n)\log u. \end{aligned}$$

Согласно (4.4), имеем оценку:

$$u - u_n \leqslant u_{n+1} - u_n = u'_\zeta < t'_\zeta = \frac{\pi}{\vartheta'(t_\zeta)} < \frac{\pi}{\vartheta'(t_n)} < \frac{3\pi}{\log n},$$

где $n < \zeta < n+1$. Поэтому:

$$S(u) - S(u_n + 0) > -\frac{1}{2}\,\frac{3\pi}{\log n}\,\log u_N > -\,2\pi,$$

$$S(u_n + 0) \leqslant S(u) + 2\pi < -\,0.9\,a\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Последнее же неравенство противоречит (4.3), если положить $a_1 = 0.8a$. Итак, найдётся по крайней мере один номер n такой, что

$$S(u_n + 0) \leqslant -0.9a\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad q_n \geqslant 0.8a\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

В силу леммы 3.7, для такого n имеем:

$$\Delta_n \geqslant q_n - 1 - \frac{\log N}{4N} > 0.7a\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{3}},$$

что и требовалось.

Аналогично доказывается и существование больших по модулю отрицательных значений Δ_n. Именно, допустив, что для всех n из рассматриваемого промежутка выполняется неравенство $q_n > -q$, несложно заключить, что на всём промежутке выполняется и неравенство $\gamma_n > v_n$, где $v_n = t_n - q(t_{n+1} - t_n)$, и, следовательно,

$$N(v_n + 0) \leqslant N(\gamma_n - 0) < n. \tag{4.6}$$

Преобразуя левую часть (4.6) подобно тому, как это делалось выше, получим:

$$S(v_n + 0) \,<\, q + O\big(N^{-1}\big). \tag{4.7}$$

Отыскивая затем с помощью леммы 12.П точку v, $v_N < v \leqslant v_{N+M}$, такую, что

$$S(v) \,>\, a\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{3}},$$

определим номер n из неравенств $v_{n-1} < v \leqslant v_n$. Последнее возможно, так как величины v_n образуют на рассматриваемом промежутке строго монотонную и неограниченно возрастающую последовательность.

Рассуждая точно также, как и при доказательстве первого утверждения теоремы, и пользуясь тем, что $v_n - v_{n-1} < 3\pi(\log n)^{-1}$, получим:

$$S(v_n + 0) - S(v) > (v_n - v)\left(-\,\frac{1}{2}\log\frac{v}{2\pi} \,+\, O\big(v^{-2}\big)\right) > -2\pi,$$

$$S(v_n + 0) > S(v) - 2\pi > 0.9a\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Последнее неравенство, очевидно, противоречит (4.7). Следовательно, для такого n имеем:

$$q_n \leqslant -0.8a\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \Delta_n \leqslant q_n + 1 + \frac{1}{4N} < -0.7a\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Теорема доказана.

Следствие. *При $n \to +\infty$ справедливы следующие соотношения:*

$$\Delta_n = \Omega_{\pm}\left(\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{\frac{1}{3}}\right), \quad \gamma_n - t_n = \Omega_{\pm}\big((\log n)^{-\frac{2}{3}}(\log\log n)^{-\frac{1}{3}}\big),$$

$$S(\gamma_n + 0) = \Omega_{+}\left(\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{\frac{1}{3}}\right), \quad S(\gamma_n - 0) = \Omega_{-}\left(\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{\frac{1}{3}}\right).$$

Доказательство. Первое соотношение следует непосредственно из теоремы 4.1. Для доказательства второго следует воспользоваться равенством

$$\gamma_n - t_n = \frac{\pi(\Delta_n - \theta_1)}{\vartheta'(t_N)}\left(1 + \frac{\pi\theta_2 M}{N\log N}\right),$$

которое было установлено при доказательстве теоремы 3.8 в предположении $N < n \leqslant N + M$. Наконец, последние два соотношения следуют из леммы 3.8 и неравенства $\kappa_n = S(\gamma_n + 0) - S(\gamma_n - 0) > 0$.

Предположив справедливость гипотезы Римана, утверждение теоремы 4.1 можно значительно уточнить.

Теорема 4.2. *Если верна гипотеза Римана, то при любом μ с условием*

$$\frac{1}{2\pi}(\log N)^2(\log\log N)^{-\frac{3}{2}} < \mu \leqslant \frac{N}{4}$$

справедливы неравенства:

$$\max_{N-3\mu<n\leqslant N+2\mu}\{\pm\Delta_n\} \geqslant \frac{1}{400}\left(\frac{\log\mu}{\log\log\mu}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Будем следовать доказательству теоремы 4.1. Положим

$$q = c\left(\frac{\log\mu}{\log\log\mu}\right)^{\frac{1}{2}} - 3\pi, \quad c = \frac{1}{90\pi}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{10^4}},$$

и обозначим

$$T = \frac{2\pi(N-\mu)}{\log N}, \quad H = \frac{2\pi\mu}{\log N}.$$

Допустив, что для всех n из промежутка $N - 3\mu < n \leqslant N + 2\mu$ справедливо неравенство

$$q_n = \frac{\gamma_n - t_n}{t_{n+1} - t_n} < q,$$

заключаем отсюда, что

$$S(u_n+0)\geqslant -q-N^{-1}, \tag{4.8}$$

где $u_n=t_n+(t_{n+1}-t_n)q$. Заметив, что

$$u_{N-3\mu}<T-H<T+2H<u_{N+2\mu},$$

с помощью леммы 13.П отыщем на промежутке $(u_{N-3\mu},u_{N+2\mu}]$ точку u такую, что

$$S(u)\leqslant -\frac{1}{90\pi}\left(\frac{\log H}{\log\log H}\right)^{\frac12}<-c\left(\frac{\log\mu}{\log\log\mu}\right)^{\frac12}.$$

Отыскивая номер n так, чтобы выполнялись неравенства $u_n<u\leqslant u_{n+1}$, получим:

$$S(u)-S(u_n+0)\geqslant -\frac12\,(u-u_n)\log u\;>\;-2\pi,$$

$$S(u_n+0)\leqslant S(u)\;+\;2\pi\;<\;-c\left(\frac{\log\mu}{\log\log\mu}\right)^{\frac12}+2\pi,$$

что противоречит (4.8). Следовательно, найдётся по меньшей мере один номер n, для которого

$$q_n\geqslant q,\quad \Delta_n\geqslant q_n-1-\frac{\log N}{4N}\geqslant q-2>c\left(\frac{\log\mu}{\log\log\mu}\right)^{\frac12}-3\pi-2>\frac{1}{400}\left(\frac{\log\mu}{\log\log\mu}\right)^{\frac12}.$$

Доказательство второго неравенства теоремы 4.2 подобно доказательству второго неравенства теоремы 4.1.

Следствие. *Если гипотеза Римана верна, то при $n\to+\infty$ справедливы следующие соотношения:*

$$\Delta_n\;=\;\Omega_{\pm}\left(\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{\frac12}\right),\quad \gamma_n-t_n\;=\;\Omega_{\pm}\big((\log n)^{-\frac12}(\log\log n)^{-\frac12}\big),$$

$$S(\gamma_n+0)=\Omega_{+}\left(\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{\frac12}\right),\quad S(\gamma_n-0)=\Omega_{-}\left(\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{\frac12}\right).$$

Длина промежутка, на котором теорема 4.2 гарантирует существование больших по модулю положительных и отрицательных значений, может быть уменьшена - правда, с незначительной потерей точности утверждения.

Теорема 4.3. *Если верна гипотеза Римана, то при любом μ с условием*

$$\frac{1}{2\pi}\,(\log N)\sqrt{\log\log N}\leqslant\mu\leqslant\frac{1}{2\pi}\,(\log N)^2(\log\log N)^{-\frac32}$$

справедливы неравенства:

$$\max_{N-3\mu<n\leqslant N+2\mu}\big\{\pm\Delta_n\big\}\;\geqslant\;7.5\cdot10^{-4}\,\frac{\sqrt{\log\left(\mu/\log N\right)}}{\log\log\left(\mu/\log N\right)}, \tag{4.9}$$

$$\max_{N-3\mu<n\leqslant N+2\mu}\big\{\pm\Delta_n\big\}\;\geqslant\;7.4\cdot10^{-4}\,\frac{\sqrt{\log\log\mu}}{\log\log\log\mu}, \tag{4.10}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.2. Необходимо лишь положить

$$H = \frac{2\pi\mu}{\log N}, \quad T = \frac{2\pi(N-\mu)}{\log N}$$

и заметить, что для так определённых T и H будет выполнено неравенство

$$H \geqslant \sqrt{\log\log T}.$$

Беря

$$q = \frac{c\sqrt{\log\left(\mu/\log N\right)}}{\log\log\left(\mu/\log N\right)}, \quad c = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{10^4}}$$

и практически дословно повторяя вышеприведённые рассуждения (с использованием леммы 14.П вместо леммы 13.П), получим (4.9). Неравенства (4.10) легко получаются из (4.9), если заметить, что

$$\frac{\mu}{\log N} \geqslant \frac{1}{2\pi}\sqrt{\log\mu}.$$

Теорема доказана.

Докажем теперь теорему о верхней границе величины $|\Delta_n|$, уточняющую оценку леммы 3.2.

Теорема 4.4. *Пусть δ - сколь угодно малое фиксированное число. Тогда при любом $n \geqslant n_0(\delta)$ имеет место оценка*

$$|\Delta_n| \,<\, (0.138+\delta)\log n.$$

Если верна гипотеза Римана, то

$$|\Delta_n| \,<\, (0.5+\delta)\,\frac{\log n}{\log\log n}.$$

Доказательство. Согласно лемме 3.8, имеем равенство

$$\Delta_n = -S(\gamma_n+0) + \theta\,\kappa_n + \theta_1\,\frac{(\log n)^2}{79n},$$

где κ_n - кратность ординаты γ_n, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $|\theta_1| \leqslant 1$. Замечая, что

$$\kappa_n = S(\gamma_n+0) - S(\gamma_n-0),$$

получим:

$$\Delta_n = -S(\gamma_n+0) + \theta\big(S(\gamma_n+0) - S(\gamma_n-0)\big) \,+\, \theta_1\,\frac{(\log n)^2}{79n} \,=$$
$$= (\theta-1)S(\gamma_n+0) - \theta\,S(\gamma_n-0) \,+\, \theta_1\,\frac{(\log n)^2}{79n},$$

откуда

$$|\Delta_n| \leqslant (1-\theta)|S(\gamma_n+0)| + \theta\,|S(\gamma_n-0)| + \frac{(\log n)^2}{79n}.$$

Теперь утверждение теоремы следует из оценки леммы 3.1, а в случае, когда верна гипотеза Римана - из оценки

$$|S(t)| \leqslant \bigl(0.5 + o(1)\bigr)\,\frac{\log t}{\log\log t},$$

принадлежащей Д.А. Голдстону и С.М. Гонеку [47]. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть δ - сколь угодно малое фиксированное число. Тогда при любом $n \geqslant n_0(\delta)$ имеет место оценка:*

$$|\gamma_n - t_n| < 2\pi(0.138 + \delta).$$

Если верна гипотеза Римана, то

$$|\gamma_n - t_n| \,<\, \frac{\pi + \delta}{\log\log n}.$$

Доказательство. Пусть для заданного n выполнены неравенства

$$t_{m-1} < \gamma_n \leqslant t_m,$$

так что $\Delta_n = m - n$. Замечая, что

$$t_{m-1} - t_n < \gamma_n - t_n \leqslant t_m - t_n$$

и пользуясь равенством (1.8), находим:

$$t_m - t_n = \frac{\pi\Delta_n}{\vartheta'(t_n)}\bigl(1 + O\bigl(n^{-1}\bigr)\bigr), \quad t_{m-1} - t_n = \frac{\pi(\Delta_n - 1)}{\vartheta'(t_n)}\bigl(1 + O\bigl(n^{-1}\bigr)\bigr),$$

откуда

$$\gamma_n - t_n = \frac{\pi(\Delta_n - \theta)}{\vartheta'(t_n)}\bigl(1 + O\bigl(n^{-1}\bigr)\bigr) = \frac{2\pi(\Delta_n - \theta)}{\log n}\,\bigl(1 + o(1)\bigr),$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Теперь утверждение следует из оценок теоремы 4.4.

Последние из утверждений настоящего параграфа мы посвятим оценке величин D_n, определённых в §7 главы 3. Оказывается, что наибольшую сложность представляет уточнение верхней границы D_n.

Теорема 4.5. *Пусть при $t > t_0 > 1$ выполнено неравенство*

$$N_0(t) \geqslant \kappa\, N(t), \tag{4.11}$$

где κ - некоторое число с условием $0 < \kappa \leqslant 1$. Тогда при достаточно большом n справедливы неравенства:

$$-\,0.14\log n \leqslant D_n \leqslant \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)n + 0.14\left(\frac{2}{\kappa} + 1\right)\log n.$$

Доказательство. Пусть n-й вещественный нуль $\mathfrak{c}_n$ функции Харди $Z(t)$ удовлетворяет неравенствам $t_{m-1} < \mathfrak{c}_n \leqslant t_m$, так что $D_n = m - n$. Тогда имеем, очевидно:

$$N(\mathfrak{c}_n + 0) \geqslant N(t_{m-1} + 0) = m - 1 + S(t_{m-1} + 0). \tag{4.12}$$

Положив $t = \mathfrak{c}_n + 0$ в неравенстве (4.11), получим:

$$N(\mathfrak{c}_n + 0) \leqslant \frac{1}{\kappa}\, N_0(\mathfrak{c}_n + 0) \leqslant \frac{1}{\kappa}\,(n + \kappa_n), \tag{4.13}$$

где κ_n - кратность нуля $\mathfrak{c}_n$. Сравнивая (4.12) и (4.13), находим:

$$m - 1 + S(t_{m-1} + 0) \leqslant \frac{1}{\kappa}\,(n + \kappa_n).$$

В силу леммы 3.1,

$$\begin{aligned} D_n \leqslant 1 - S(t_{m-1} + 0) + \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)n + \frac{1}{\kappa}\big(S(\mathfrak{c}_n + 0) - S(\mathfrak{c}_n - 0)\big) \leqslant \\ \leqslant 1 + 0.138 \log n + \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)n + \frac{2}{\kappa}\, 0.138 \log n < \\ < \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)n + 0.14\left(\frac{2}{\kappa} + 1\right)\log n. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$n \leqslant N_0(\mathfrak{c}_n + 0) \leqslant N(\mathfrak{c}_n + 0) \leqslant N(t_m + 0) = m + S(t_m + 0),$$

откуда

$$D_n = m - n \geqslant -S(t_m + 0) > -0.14 \log n.$$

Теорема доказана.

Теорема 4.6. *Существует положительная постоянная c, зависящая лишь от ε, такая, что*

$$\max_{N < n \leqslant N + M} D_n \geqslant c\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Доказательство. Положим

$$q \,=\, a\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{3}},$$

где $a > 0$ - некоторая постоянная. Следуя доказательству леммы 3.6, находим:

$$\tau_n = \frac{\mathfrak{c}_n - t_n}{t_{n+1} - t_n} = D_n - \theta_1 + \frac{\theta_2 \log N}{4N},$$

где $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$, $|\theta_2| \leqslant 1$. Допустив, что для всех n с условием $N < n \leqslant N + M$ выполняется неравенство $\tau_n \leqslant q$, заключаем, что

$$\mathfrak{c}_n \leqslant u_n = t_n + q(t_{n+1} - t_n)$$

для всех n из указанного промежутка. Следовательно,

$$n \leqslant N(\mathfrak{c}_n + 0) \leqslant N(u_n + 0) = \frac{\vartheta(u_n)}{\pi} + 1 + S(u_n + 0) \leqslant n + q + S(u_n + 0) + O\left(\frac{\log N}{N}\right),$$

откуда $S(u_n+0)\geqslant -q+O\big((\log N)/N\big)$. Выше было показано (см. доказательство теоремы 4.1), что при надлежащем выборе постоянной a последнее неравенство не может выполняться для всех значений n, $N<n\leqslant N+M$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Следствие. *При $n\to+\infty$ справедливо соотношение:*

$$D_n \;=\; \Omega_+\left(\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{3}}\right).$$

Замечание. При попытке доказать с помощью рассуждений такого рода Ω_--оценку для D_n мы придём к неравенству

$$S(v_n+0)\;\leqslant\; q+\varepsilon(n)\;+\;O\left(\frac{\log N}{N}\right), \tag{4.14}$$

в котором $v_n=t_n-q(t_{n+1}-t_n)$, а $\varepsilon(n)$ обозначает (как и в теореме 3.19) число нулей $\zeta(s)$ с условием $0<\operatorname{Im}s\leqslant\mathfrak{c}_n$, $\operatorname{Re}s\neq\frac{1}{2}$. Отсутствие какой-либо информации о величине $\varepsilon(n)$ не позволяет привести (4.14) к противоречию с имеющимися омега-теоремами для функции $S(t)$.

Ещё раз отметим, что Сельберг, цитируя в [12] результат Титчмарша о неограниченности дробей

$$\tau_n \;=\; \frac{\mathfrak{c}_n-t_n}{t_{n+1}-t_n},$$

(совпадающих с D_n с точностью до слагаемого $O(1)$), фактически утверждал, что Титчмарш доказал соотношения

$$\limsup_{n\to+\infty} D_n \;=\; +\infty, \qquad \liminf_{n\to+\infty} D_n \;=\; -\infty$$

(см. Приложение II, стр. 275). Первое из них, как было показано выше, справедливо. В то же время доказательство второго требует глубоких результатов о поведении величин $\varepsilon(n)$, сравнимых по силе с «почти» гипотезой Римана.

Это ещё раз подтверждает отстаиваемое в данной работе мнение о том, что Сельберг не вполне корректно процитировал в [12] работу Титчмарша и «отождествил» величины Δ_n и D_n (см. §7 главы 3).

§2. Значения, которые принимает величина Δ_n

Ключевым обстоятельством, которое позволяет оценить снизу количество номеров n с условием $\Delta_n=0$, является то, что это число в силу леммы 3.3 практически совпадает с числом тех n из заданного промежутка, для которых $\Delta(n)=S(t_n+0)=0$.

Несложное рассуждение позволяет связать такие точки Грама t_n с точками, в которых функция $S(t)$ меняет знак. Нижняя оценка количества таких точек, полученная методом Сельберга, и приводит в итоге к искомому результату.

Обобщение оценки Сельберга числа точек перемены знака на случай функции $\varphi(t)=S(t+0)-k$, где $|k|$ - «не очень большое» целое число, позволяет оценить и число тех n, для которых $\Delta_n=k$.

В случае «больших» $|k|$ искомое утверждение получается как следствие омега-теорем для функции $S(t)$. Здесь мы существенно пользуемся особенностями графика $S(t)$, которые позволяют утверждать следующее: несмотря на наличие у этой функции точек разрыва, она принимает любое значение k, лежащее между любыми двумя её значениями $\alpha = S(a)$ и $\beta = S(b)$ с условиями $a < b$, $\alpha > \beta$ (лемма 4.3). Кроме того, доказательство опирается и на тот факт, что целочисленные значения k принимаются функцией $S(t)$ лишь в точках Грама t_n. Как и в случае «малых» $|k|$, переход от значений $\Delta(n) = S(t_n + 0)$ к величинам Δ_n осуществляется с помощью леммы 3.3.

Для доказательства утверждений этого параграфа придадим лемме 3.3 следующий, более удобный для дальнейшего, вид. С этой целью обозначим через F_m число номеров n, $N < n \leqslant N + M$, для которых $\Delta_n = m$, а через E_m - число номеров n, $N < n \leqslant N + M$, для которых $\Delta(n) = m$.

Лемма 4.1. *При любом целом k справедливо равенство:*

$$F_k \;=\; E_{(-k)} \;+\; \theta(2|k| + 4).$$

Точность ряда дальнейших утверждений о величинах Δ_n зависит, как оказывается, от степени точности асимптотических формул для первых моментов функций, связанных с $S(t)$. По этой причине нам потребуется следующее общее утверждение.

Лемма 4.2. *Пусть $T \geqslant T_0(\varepsilon) > 0$, H - произвольное число с условием $T^{\,\alpha+\varepsilon_1} \leqslant H \leqslant T^{\,\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon_1 = 0.9\,\varepsilon$. Пусть, далее, справедливы равенства*

$$\int_T^{T+H} |S(t)|dt \;=\; \frac{H}{\pi\sqrt{\pi}}\,\sqrt{\log\log T}\left(1 + \frac{\theta_1}{f(T)}\right), \tag{4.15}$$

$$\int_T^{T+H} \left|\int_0^h S(t+u)du\right| dt \;=\; \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}}\,\sqrt{\log\frac{1}{h}}\left(1 + \frac{\theta_2}{f(T)}\right), \tag{4.16}$$

в которых $f(T)$ - некоторая монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая при $T \geqslant T_0$ неравенствам $24 < f(T) < \sqrt{\log\log T}$. Пусть, наконец, k - произвольное целое число с условием

$$|k| < \frac{1}{12\pi\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{12}{f(T)}\right)\sqrt{\log\log T}. \tag{4.17}$$

Тогда для количества $\nu = \nu(T; H)$ точек перемены знака функции $\varphi(t) = S(t+0) - k$ на промежутке $(T, T + H]$ справедлива следующая оценка:

$$\nu \geqslant \frac{H\Delta}{2\pi}\,(\log T),$$

где

$$\Delta \;=\; \left(\frac{1}{f^2(T)} + \frac{\pi^3 k^2}{\log\log T}\right)\exp\left\{-\,\frac{6\log\log T}{f(T)}\right\}\exp\left\{-\,6\pi\sqrt{\pi}\,|k|\sqrt{\log\log T}\right\}.$$

Доказательство. Для оценки величины ν воспользуемся следующим неравенством, принадлежащим Сельбергу (см. [38]):

$$\nu \;\geqslant\; \frac{\left(I_1 - I_2\right)^2}{2hI_3} \;-\; 1. \tag{4.18}$$

Здесь h - некоторый параметр, удовлетворяющий условиям

$$\frac{(\log\log T)^2}{\log T} < h < \frac{1}{\sqrt{\log T}}, \tag{4.19}$$

точное значение которого будет выбрано ниже,

$$I_1 = \int_T^{T+H}\int_0^h \big|\varphi(t+u)\big|du\,dt, \quad I_2 = \int_T^{T+H}\left|\int_0^h \varphi(t+u)du\right|dt,$$
$$I_3 = \int_T^{T+H}\left(\int_0^h \big|\varphi(t+u)\big|\,du\right)^2 dt.$$

Оценим эти интегралы, пользуясь леммами 15.П и 16.П. Прежде всего, имеем:

$$I_1 = \int_0^h\int_{T+u}^{T+H+u} |\,\varphi(t)|dt\,du \geqslant \int_0^h\int_{T+u}^{T+H+u} |S(t)|dt\,du - |k|Hh \geqslant$$
$$\geqslant \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\log\log T}\left(1-\frac{1}{f(T)}\right) - |k|\pi\sqrt{\pi}\right),$$
$$I_2 = \int_T^{T+H}\left|\int_0^h S(t+u)\,du + kh\right|dt \leqslant \int_T^{T+H}\left|\int_0^h S(t+u)\,du\right|dt + Hh|k| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\log\frac{1}{h}}\left(1+\frac{1}{f(T)}\right) + |k|\pi\sqrt{\pi}\right).$$

Наконец, применив к I_3 неравенство Коши, получим:

$$I_3 \leqslant h\int_T^{T+H}\int_0^h \big|\varphi(t+u)\big|^2 du\,dt = h\int_0^h\int_{T+u}^{T+H+u} \big|\varphi(t)\big|^2 dt\,du =$$
$$= h\int_0^h\int_{T+u}^{T+H+u} \big(S^2(t+0) + 2kS(t+0) + k^2\big)dt\,du \leqslant$$
$$\leqslant h\int_0^h\left\{\frac{H}{2\pi^2}(\log\log T)\left(1+\frac{2.4}{\sqrt{\log\log T}}\right) + O\big(|k|\log T\big) + k^2H\right\}du < \frac{Hh^2}{\pi^2}(\log\log T).$$

Положим теперь $h = q(T)(\log T)^{-1}$, где

$$q(T) = \exp\left\{\frac{6\log\log T}{f(T)}\right\}\exp\left\{6\pi\sqrt{\pi}\,|k|\sqrt{\log\log T}\right\}.$$

Тогда из (4.17) следует, что условия (4.19) выполнены. Поэтому

$$I_1 - I_2 \geqslant \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\log\log T} - \sqrt{\log\frac{1}{h}} - \frac{2\sqrt{\log\log T}}{f(T)} - 2|k|\pi\sqrt{\pi}\right) =$$
$$= \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}}\left(\frac{\log q(T)}{\sqrt{\log\log T} + \sqrt{\log(1/h)}} - \frac{2\sqrt{\log\log T}}{f(T)} - 2|k|\pi\sqrt{\pi}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{2\sqrt{\log\log T}}\left(\frac{6\log\log T}{f(T)} + 6\pi\sqrt{\pi}\,|k|\sqrt{\log\log T}\right) - \frac{2\sqrt{\log\log T}}{f(T)} - 2|k|\pi\sqrt{\pi}\right\} =$$
$$= \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\log\log T}\left(\frac{1}{f(T)} + \frac{\pi\sqrt{\pi}|k|}{\sqrt{\log\log T}}\right).$$

Переходя к оценке (4.18), будем иметь:

$$\nu \geqslant \frac{(Hh)^2}{2\pi^3}(\log\log T)(\log T)\left(\frac{1}{f(T)}+\frac{\pi\sqrt{\pi}|k|}{\sqrt{\log\log T}}\right)^2\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{6\log\log T}{f(T)}-6\pi\sqrt{\pi}|k|\sqrt{\log\log T}\right\}\frac{\pi^2}{Hh^2\log\log T}-1>$$
$$>\frac{H}{2\pi}(\log T)\left(\frac{1}{f^2(T)}+\frac{\pi^3k^2}{\log\log T}\right)\exp\left\{-\frac{6\log\log T}{f(T)}-6\pi\sqrt{\pi}|k|\sqrt{\log\log T}\right\}.$$

Лемма доказана.

Теорема 4.7. *Пусть целое число k удовлетворяет условию*

$$|k|\leqslant\frac{1}{12\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\log\log N}.$$

Тогда для числа F_k выполнено неравенство

$$F_k\geqslant M\exp\left\{-6\pi\sqrt{\pi}(|k|+c)\sqrt{\log\log N}\right\},$$

где $c=c(\varepsilon)>0$ - постоянная леммы 15.П.

Доказательство. В силу леммы 4.1, достаточно получить подходящую оценку для числа E_k номеров n, $N<n\leqslant N+M$, удовлетворяющих условию $\Delta(n)=k$ или, что то же, условию $S(t_n+0)-k=0$.

Заметим теперь следующее. Имеется ровно два типа точек, в которых функция $\varphi(t)=S(t+0)-k$ меняет знак (см. рис. 5).

Первый тип - это точки разрыва $S(t)$ (совпадающие с ординатами нулей $\zeta(s)$), такие, что $\varphi(t-0)<0$, $\varphi(t+0)>0$. В каждой из точек разрыва функция $\varphi(t)$, как и функция $S(t)$, совершает скачок на положительную величину, равную кратности соответствующей ординаты. Следовательно, в точках перемены знака первого типа $\varphi(t)$ меняет знак только с минуса на плюс.

Второй тип - это нули $\varphi(t)$, расположенные на интервалах непрерывности $\varphi(t)$, которые имеют вид (γ_n,γ_{n+1}). Поскольку $S(t)$ строго убывает на таких интервалах, в точках второго типа функция $\varphi(t)$ может менять знак лишь с плюса на минус.

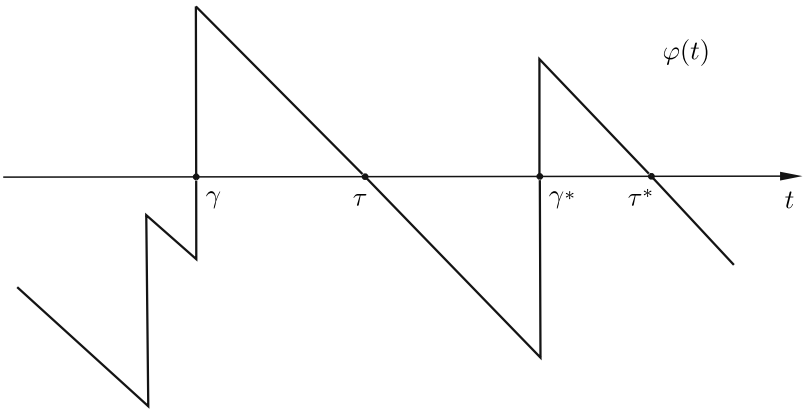


Рис. 5. Точки, в которых $\varphi(t)$ меняет знак: γ,γ^* - первого типа, τ,τ^* - второго типа.

Отметим, что нули $\varphi(t)$, совпадающие с точкой разрыва, не могут быть точками перемены знака (см. рис. 6). Действительно, если $t = \gamma$ - такая точка, то $\varphi(\gamma+0) = 0$. Так как

$$\varphi(\gamma + 0) - \varphi(\gamma - 0) = S(\gamma + 0) - S(\gamma - 0) \geqslant 1,$$

то $\varphi(\gamma-0) \leqslant \varphi(\gamma+0)-1 = -1$. Поэтому $\varphi(t)$ отрицательна при t, близких к γ слева. Вместе с тем, в достаточно малой окрестности вида $(\gamma, \gamma + h)$ как $S(t)$, так и $\varphi(t)$ монотонно убывают, так что $\varphi(t) < 0$ и при t, достаточно близких к γ справа. Итак, при переходе через точку $t = \gamma$ функция $\varphi(t)$ знака не меняет.

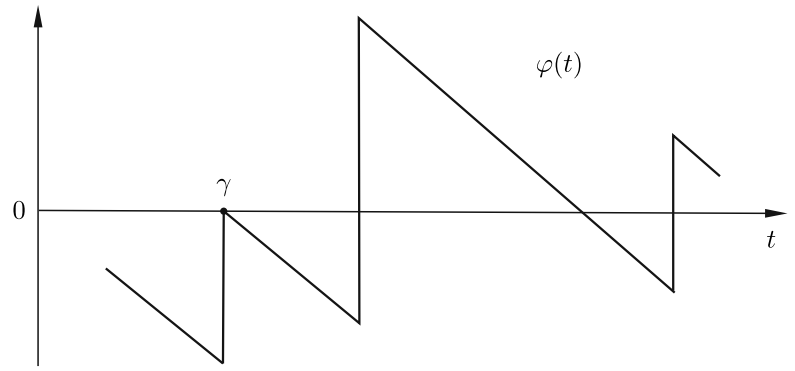


Рис. 6. Нули $\varphi(t)$ в точках Грама, совпадающие с ординатами, не могут быть точками перемены знака.

Далее, всякий нуль $\tau > t^* = 6.289836\ldots$ функции $\varphi(t)$ является точкой Грама (см. рис. 7).

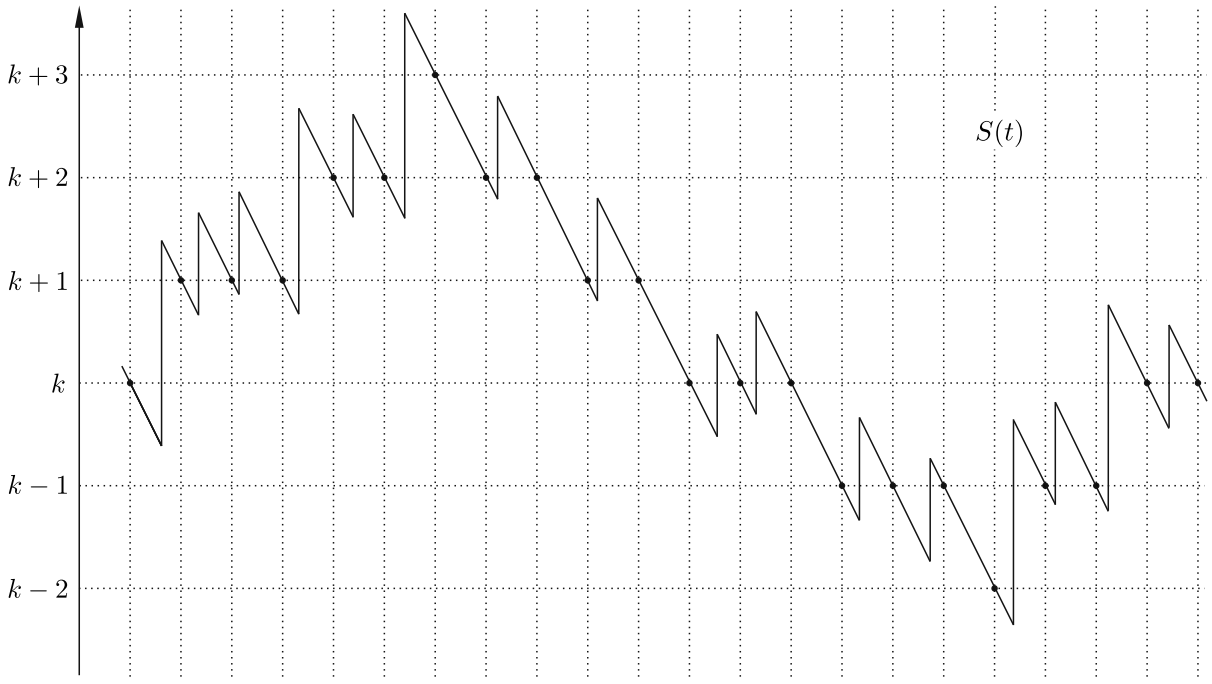


Рис. 7. Всякое значение τ, для которой число $S(\tau + 0)$ является целым, есть точка Грама: точки Грама совпадают с абсциссами точек пересечения графика $y = S(t)$ с горизонтальными прямыми $y = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Действительно, пусть $S(\tau+0)=k$. Обозначив через m число ординат нулей $\zeta(s)$, не превосходящих τ и взятых с учётом кратности, из формулы Римана-Мангольдта получаем:

$$m=N(\tau)=\frac{\vartheta(\tau)}{\pi}+1+S(\tau+0)=\frac{\vartheta(\tau)}{\pi}+k+1,$$

откуда $\vartheta(\tau)=\pi(m-k-1)$. В силу монотонности $\vartheta(t)$ заключаем: $\tau=t_{m-k}$ - точка Грама.

Из леммы 4.1 следует, что как $S(t)$, так и $\varphi(t)$ меняют знак на числовой прямой бесконечно много раз. Поэтому за всякой точкой первого типа необходимо следует точка второго типа, и наоборот.

Таким образом, число нулей $\varphi(t)$ на всяком промежутке $(T,T+H]$ не более чем на единицу отличается от числа точек разрыва $\varphi(t)$, в которых эта функция меняет знак. Иными словами, если ν - число точек перемены знака $\varphi(t)$, а E_k - число нулей $\varphi(t)$ на промежутке $(T,T+H]$, то

$$E_k\geqslant\frac{\nu}{2}-1.$$

Положим теперь $T=t_N$, $H=t_{N+M}-t_N$ и воспользуемся утверждениями леммы 15.П и леммы 4.2 с $f(T)=c^{-1}\sqrt{\log\log T}$. Получим:

$$\begin{aligned}E_k\geqslant\frac{H}{2\pi}(\log T)\,\frac{\pi^3k^2+c}{\log\log T}\,\exp\left\{-6c\sqrt{\log\log T}\right\}\,\exp\left\{-6\pi\sqrt{\pi}|k|\sqrt{\log\log T}\right\}\;>\\ >\;\frac{M(k^2+c)}{\log\log N}\,\exp\left\{-6\left(\pi\sqrt{\pi}|k|+c\right)\sqrt{\log\log N}\right\}\;>\\ >\;2M\exp\left\{-6\pi\sqrt{\pi}(|k|+c)\sqrt{\log\log N}\right\},\\ F_k\geqslant E_{(-k)}\;-\;2|k|\;-\;4\;>\;M\exp\left\{-6\pi\sqrt{\pi}(|k|+c)\sqrt{\log\log N}\right\}.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

В частности, при $k=0$ теорема 4.7 даёт неравенство

$$F_0\geqslant Me^{-c_1\sqrt{\log\log N}},\quad c_1>0.$$

Однако в этом случае функция $\varphi(t)$ совпадает с $S(t+0)$, так что нижняя оценка величины E_0 (и, таким образом, F_0) сводится, по сути, к оценке числа точек перемены знака $S(t)$. Метод такой оценки, не опирающийся на асимптотические формулы для первых моментов функций, связанных с $S(t)$, был разработан в начале 1980-х гг. А. Сельбергом и К.-М. Тсангом [40]. Применение оценки величины E_0, полученной с помощью этого метода, позволяет значительно уточнить и приведённую выше оценку числа F_0 ординат γ_n, для которых наблюдается явление Грама-Сельберга.

Так, из леммы 17.П и рассуждений, использованных для доказательства теоремы 4.7, сразу следует

Теорема 4.8. *Существуют положительные постоянные $b_1,b_2>0$, зависящие лишь от ε и такие, что число F_0 номеров n промежутка $N<n\leqslant N+M$ с условием $\Delta_n=0$ оценивается снизу величиной*

$$Me^{-b_1(\log\log\log N)^2},$$

а если верна гипотеза Римана - то величиной

$$Me^{-b_2 \log\log\log N} = \frac{M}{(\log\log N)^{b_2}}.$$

Замечание. Существует гипотеза (см. [40, гл. 7]), согласно которой число перемен знака $S(t)$ на промежутке $(T, T+H]$ асимптотически равно

$$\frac{H\log T}{\sqrt{\pi\log\log T}}.$$

Если эта гипотеза верна, то число номеров n, $N < n \leqslant N+M$, с условием $\Delta_n = 0$ асимптотически равно

$$\frac{\sqrt{\pi}M}{\sqrt{\log\log N}}.$$

Доказательства двух оставшихся теорем опираются на известные утверждения о существовании на любом достаточно коротком промежутке точек, в которых функция $S(t)$ принимает «аномально» большие по абсолютной величине положительные и отрицательные значения (лемма 12.П).

Хотя $S(t)$ и является разрывной функцией, пользуясь её спецификой можно показать (лемма 4.3), что $S(t)$ принимает на заданном отрезке любое промежуточное значение, находящееся между её минимумом и максимумом (при условии, что точка максимума лежит левее точки минимума). Эти соображения и лежат в основе доказательств теорем 4.9 и 4.10.

Лемма 4.3. *Пусть точки τ_1 и τ_2 таковы, что $\tau_1 < \tau_2$ и $S(\tau_1+0) > S(\tau_2-0)$. Тогда для всякого числа α с условием $S(\tau_2-0) < \alpha < S(\tau_1+0)$ на интервале (τ_1, τ_2) найдётся точка τ, отличная от ординаты нуля $\zeta(s)$ и такая, что $S(\tau) = \alpha$.*

Доказательство. Предположим сперва, что промежуток (τ_1, τ_2) не содержит ординат нулей $\zeta(s)$. Тогда функция $S(t)$ непрерывна и монотонно убывает на интервале (τ_1, τ_2), и в этом случае утверждение леммы очевидно (см. рис. 8а).

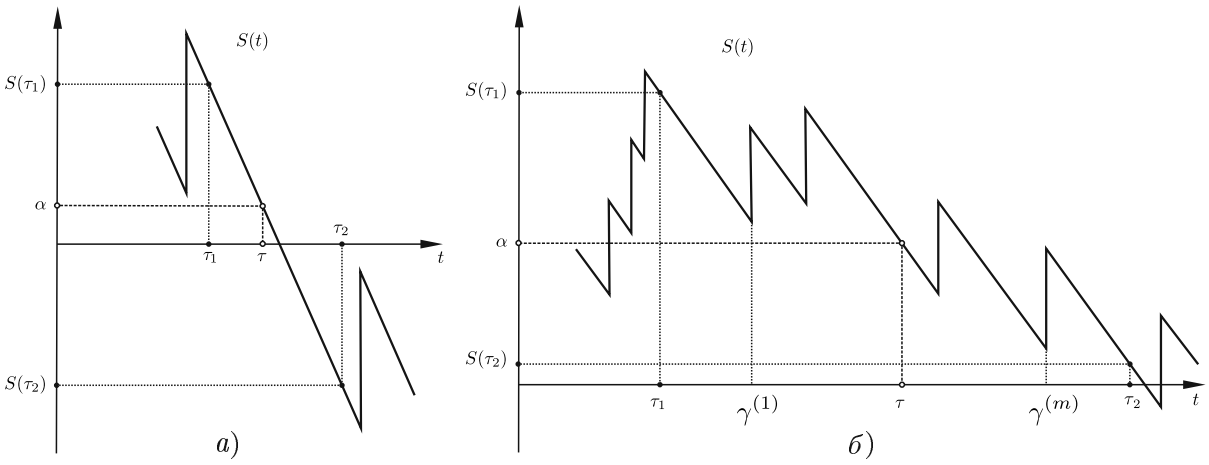


Рис. 8. Функция $S(t)$ принимает любое значение, лежащее между её максимумом и минимумом при условии, что точка минимума расположена правее точки максимума.

Предположим теперь противное (см. рис. 8б); пусть $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(m)}$ - все различные ординаты на рассматриваемом интервале, $\tau_1 \leqslant \gamma^{(1)} < \gamma^{(2)} < \dots < \gamma^{(m)} \leqslant \tau_2$. Если $S(\gamma^{(1)} - 0) < \alpha$, то из непрерывности $S(t)$ на $(\tau_1, \gamma^{(1)})$ следует, что искомая точка может быть выбрана на указанном интервале. Если же $S(\gamma^{(1)} - 0) \geqslant \alpha$, то

$$S(\gamma^{(1)} + 0) \geqslant S(\gamma^{(1)} - 0) + 1 \geqslant \alpha + 1 > \alpha,$$

и вышеприведённые рассуждения можно применить к промежутку $(\gamma^{(1)}, \tau_2)$.

Продолжая этот процесс далее, мы либо отыщем искомую точку τ на одном из интервалов $(\gamma^{(k)}, \gamma^{(k+1)})$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, либо придём к цепочке неравенств

$$S(\gamma^{(1)} + 0) > \alpha, \quad S(\gamma^{(2)} + 0) > \alpha, \quad \dots \quad S(\gamma^{(m)} + 0) > \alpha.$$

Так как интервал $(\gamma^{(m)}, \tau_2)$ уже не содержит точек разрыва $S(t)$, то существование искомой точки τ, $\gamma^{(m)} < \tau < \tau_2$, следует из неравенств $S(\tau_2 - 0) < \alpha < S(\gamma^{(m)} + 0)$. Отличие τ от ординат $\gamma^{(s)}$, $s = 1, 2, \dots, m$, следует из приведённых выше рассуждений. Лемма доказана.

Теорема 4.9. *Существует постоянная c, зависящая лишь от ε и такая, что для любого целого k с условием*

$$|k| \leqslant c\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{3}}$$

справедливо неравенство: $F_k \geqslant N^{0.8\,\varepsilon}$.

Доказательство. Положим $\delta = 10^{-4}\,\varepsilon$, так что $0 < \delta < 10^{-7}$, $M_1 = \left[N^{\alpha+\delta}\right]$. Пусть, далее, r - произвольное целое число с условием $1 \leqslant r \leqslant \left[MM_1^{-1}\right]$. Определим T и H из равенств

$$T - 4H = t_{N+(r-1)M_1}, \quad T + 2H = t_{N+rM}. \tag{4.20}$$

Тогда несложно проверить, что $T^{\alpha+0.9\delta} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\delta}$. Согласно лемме 12.П, на промежутке $(T - H, T + 2H]$ найдутся точки τ_1' и τ_2' такие, что

$$S(\tau_1' + 0) > K, \quad S(\tau_2' - 0) < -K, \quad K = \left[\frac{\delta^{\frac{5}{4}}}{2000}\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

Отыскивая на промежутке $(T - 4H, T - H]$ точки τ_1'' и τ_2'' с тем же свойством и полагая $\tau_1 = \tau_1''$, $\tau_2 = \tau_2'$, будем иметь:

$$S(\tau_1 + 0) > K, \quad S(\tau_2 - 0) < -K, \quad \tau_1 < \tau_2.$$

Зададимся теперь произвольным целым k с условием $|k| \leqslant K$ и воспользуемся леммой 4.3. Так мы заключаем о существовании точки t с условием

$$t_{N+(r-1)M_1} = T - 4H < \tau_1 < t < \tau_2 \leqslant T + 2H = t_{N+rM_1}, \tag{4.21}$$

отличной от ординаты нуля $\zeta(s)$ и такой, что $S(t) = k$. Как было замечено при доказательстве теоремы 4.7, такая точка t является точкой Грама: $t = t_n$. Из неравенств (4.21) следует, что $N + (r-1)M_1 < n \leqslant N + rM_1$. Придавая величине r

значения $1, 2, \ldots, \left[MM_1^{-1}\right]$, заключаем, что общее число номеров n промежутка $N < n \leqslant N + M$, для которых $S(t_n + 0) = \Delta(n) = k$, оценивается снизу величиной $MM_1^{-1} - 1 > 2N^{0.8\varepsilon}$. Теперь утверждение теоремы следует из леммы 4.1. Теорема доказана.

Теорема 4.10. *Пусть верна гипотеза Римана. Тогда при любом целом k с условиями*

$$\frac{1}{86\pi}\left(\frac{\log\log N}{\log\log\log N}\right)^{\frac{1}{2}} < |k| \leqslant \frac{1}{91\pi}\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{2}}$$

на промежутке $N < n \leqslant 2N$ найдётся не менее

$$\frac{N}{\log N}\,\exp\left\{-2(90\pi k)^2\log|k|\right\}$$

номеров n с условием $\Delta_n = k$. В частности, всякое значение k,

$$\frac{1}{92\pi}\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{2}} < |k| \leqslant \frac{1}{91\pi}\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{2}},$$

принимается величиною Δ_n на указанном промежутке не менее $N^{0.02}$ раз.

Доказательство подобно доказательству теоремы 4.9, с той лишь разницей, что вместо леммы 12.П необходимо воспользоваться леммой 13.П. Действительно, ограничиваясь случаем положительных k и полагая

$$h = \exp\left\{2(90\pi k)^2\log|k|\right\}, \quad M_1 = 6\left[\frac{h}{2\pi}\,\log N\right],$$

при произвольном r с условием $1 \leqslant r \leqslant \left[NM_1^{-1}\right]$ определим T и H из равенств (4.20). Замечая, что $H = h(1 + o(1))$, будем иметь:

$$H < \frac{3}{2}\,h \leqslant \frac{3}{2}\,\exp\left\{2(91\pi)^2\,\frac{\log N}{(91\pi)^2\log\log N}\cdot\frac{1}{2}(\log\log N - \log\log\log N)\right\} =$$

$$= N\exp\left\{-\frac{\log N}{\log\log N}\,\log\log\log N\right\} < \frac{T}{3},$$

$$H > \frac{h}{2} >$$

$$> \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{2(91\pi)^2\log\log N}{(86\pi)^2\log\log\log N}\cdot\frac{1}{2}(\log\log\log N - \log\log\log\log N - 2\log(86\pi))\right\} >$$

$$> \exp\left\{1.1\log\log N\right\} > (\log T)(\log\log T)^{-\frac{3}{2}}.$$

Условия леммы 13.П выполнены. Следовательно, для любого целого числа k из условия теоремы будем иметь:

$$\sup_{T-H<t\leqslant T+2H}\left\{\pm S(t)\right\} \geqslant \frac{1}{90\pi}\left(\frac{\log H}{\log\log H}\right)^{\frac{1}{2}} > k + 1.$$

Согласно лемме 4.3, между $n+(r-1)M_1$ и $N+rM_1$ найдётся номер n с условием $\Delta(n)=k$. Общее же число таких номеров на промежутке $(N,2N]$ оценивается снизу величиной

$$\left[NM_1^{-1}\right]-2k-4\ >\ \frac{N}{\log N}\exp\left\{-2(90\pi k)^2\log|k|\right\}.$$

Применяя лемму 4.1, приходим к первому утверждению теоремы. Второе утверждение получим, если подставим в последнее неравенство вместо k значение

$$\frac{1}{91\pi}\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема доказана.

Если целое число k превосходит по модулю $c\sqrt{\log\log N}$, $c=(12\pi\sqrt{\pi})^{-1}$, то для величины F_k мы имеем лишь очень слабую оценку теоремы 4.7. Вместе с тем, согласно теореме 3.3, при любом, даже сколь угодно большом (но фиксированном) A каждое из неравенств

$$\Delta_n\leqslant -A\sqrt{\log\log N},\quad \Delta_n\geqslant A\sqrt{\log\log N}$$

выполняется для положительной доли номеров n промежутка $N<n\leqslant N+M$.

Это позволяет предположить, что при k, близких к $\sqrt{\log\log N}$, оценка теоремы 4.7 может быть значительно уточнена. Пример такого уточнения даётся теоремой 4.11. Её доказательство опирается на два вспомогательных утверждения (леммы 4.3 и 18.П).

Теорема 4.11. *Пусть $A>0$ - сколь угодно большое фиксированное число, $N\geqslant N_0(\varepsilon,A)$. Тогда при любом целом k с условием $|k|\leqslant A\sqrt{\log\log N}$ справедлива следующая оценка:*

$$F_k\geqslant\frac{cM}{\log N}\,(\log\log\log\log N)^{-1},\quad c=\frac{\exp\left\{-(2\pi A)^2\right\}}{100A}.$$

Доказательство. Рассмотрим сперва случай положительных k. Положим $T=t_N$, $H=t_{N+M}-t_N$ и определим $E=E(A;T,H)$ как множество точек t промежутка $T\leqslant t\leqslant T+H$, удовлетворяющих условию

$$S(t)\ >\ 2A\sqrt{\log\log T}.$$

Согласно лемме 19.П имеем:

$$\operatorname{mes}(E)\ \sim\ \frac{H}{\sqrt{2\pi}}\int_{2\pi A\sqrt{2}}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du\ >\ b_1H, \tag{4.22}$$

где $b_1=\dfrac{0.07}{\pi A}\,e^{-(2\pi A)^2}$.

Множество E состоит из конечного числа непересекающихся интервалов (α_j,β_j), $j=1,2,\ldots,s$, левые и правые концы которых мы предполагаем занумерованными в порядке возрастания:

$$T\leqslant\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2<\ldots<\alpha_s<\beta_s\leqslant T+H.$$

Распределим эти интервалы по совокупностям $E_1, E_2, \ldots$ по следующему правилу. Интервал (α_1, β_1) относим к совокупности E_1. Если интервал (α_j, β_j) уже отнесён к совокупности E_m, то интервал $(\alpha_{j+1}, \beta_{j+1})$ относим к той же совокупности E_m в том случае, если отрезок $[\beta_j, \alpha_{j+1}]$ не содержит точек перемены знака функции $S(t)$, и относим к совокупности E_{m+1} в противном случае. Из этого построения следует, что для всякой совокупности отрезок минимальной длины, её покрывающий, не содержит точек перемен знака функции $S(t)$.

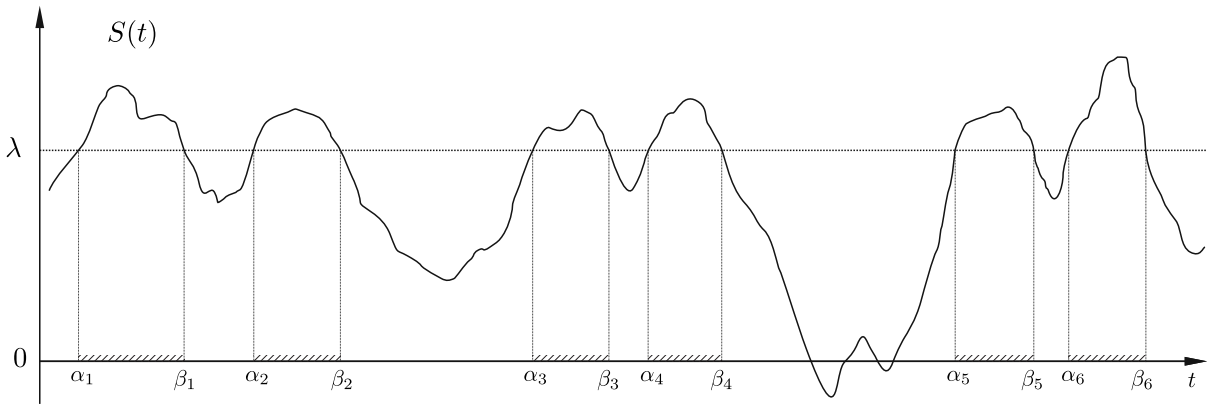


Рис. 9. На рисунке, схематически изображающем график функции $y = S(t)$ и прямую $y = \lambda = 2A\sqrt{\log\log T}$, промежутки (α_j, β_j), $j = 1, 2, 3, 4$, относятся к первой совокупности, а промежутки (α_5, β_5) и (α_6, β_6) - ко второй.

Положим теперь $h = 4.39 \log\log\log\log T$ и отнесём каждую из построенных совокупностей к первому или второму классу в зависимости от того, будет ли суммарная длина интервалов, составляющих эту совокупность, меньше $3h$, или нет. Обозначим, наконец, через L_1 и L_2 суммарные длины промежутков (α_j, β_j), образующих, соответственно, совокупности первого и второго классов. Тогда из (4.22) имеем оценку:

$$L_1 + L_2 > b_1 H. \tag{4.23}$$

Предположим, что совокупность E_m, образованная интервалами $(\alpha_\ell, \beta_\ell)$, $(\alpha_{\ell+1}, \beta_{\ell+1})$, $\ldots$, (α_n, β_n), отнесена ко второму классу. Из сказанного выше следует, что отрезок $[\alpha_\ell, \beta_n]$, с одной стороны, не содержит ни одной точки перемены знака $S(t)$ и, с другой стороны, имеет длину, не меньшую $3h$ (см. рис. 10). Но тогда интервал $(\alpha_\ell + h, \beta_n - h)$ непуст и обладает следующим свойством: для всякой его точки τ интервал $(\tau - h, \tau + h)$ не содержит точек перемены знака $S(t)$.

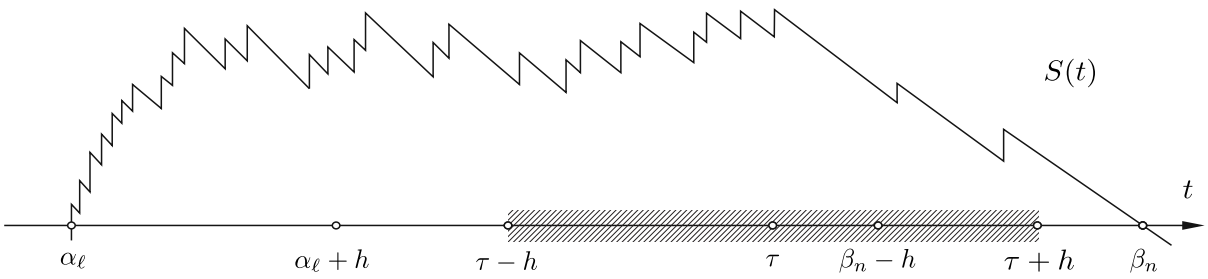


Рис. 10. Для всякой точки $\tau \in (\alpha_\ell + h, \beta_n - h)$ промежуток $(\tau - h, \tau + h)$ не содержит точек перемены знака $S(t)$.

Если теперь r обозначает число совокупностей, отнесённых ко второму классу, то мера μ множества точек τ, $T \leqslant \tau \leqslant T + H$, таких, что $S(t)$ не меняет знака на интервале $(\tau - h, \tau + h)$, оценивается снизу величиной

$$\sum_{\substack{E_m \text{ принадлежит} \\ 2 \text{ классу}}} \left(\beta_n - \alpha_\ell - 2h\right) = \sum_{\substack{E_m \text{ принадлежит} \\ 2 \text{ классу}}} \left(\beta_n - \alpha_\ell\right) - 2rh \geqslant L_2 - 2rh.$$

С другой стороны, из леммы 18.П следует, что

$$\mu \leqslant \frac{b_2 H}{\sqrt{\log\log T}},$$

где $b_2 > 0$ - некоторая постоянная, зависящая лишь от ε. Таким образом,

$$L_2 - 2rh \leqslant \frac{b_2 H}{\sqrt{\log\log T}}.$$

В то же время из определения совокупностей второго класса имеем оценку: $L_2 \geqslant r \cdot 3h$. Поэтому

$$rh \leqslant L_2 - 2rh \leqslant \frac{b_2 H}{\sqrt{\log\log T}},$$

$$L_2 \leqslant 2rh + \frac{b_2 H}{\sqrt{\log\log T}} \leqslant \frac{3b_2 H}{\sqrt{\log\log T}}. \tag{4.24}$$

Пользуясь (4.22) и (4.24), заключаем:

$$L_1 > b_1 H - \frac{3b_2 H}{\sqrt{\log\log T}} > (1-\delta) b_1 H, \tag{4.25}$$

где $\delta = 10^{-4}$.

Пусть теперь R - число совокупностей, отнесённых к первому классу. Поскольку суммарная длина интервалов, образующих каждую из таких совокупностей, не превосходит $3h$, то $L_1 < 3Rh$. Вместе с (4.25) это даёт:

$$3Rh > (1-\delta) b_1 H, \quad R > (1-\delta)\frac{b_1}{3} H h^{-1}.$$

Пусть k - заданное целое число с условиями

$$1 \leqslant k \leqslant A\sqrt{\log\log N} < 2A\sqrt{\log\log T},$$

E_m - произвольная совокупность первого класса, и пусть $(\alpha_\ell, \beta_\ell), (\alpha_{\ell+1}, \beta_{\ell+1}), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)$ - образующие её интервалы. Выберем на (α_n, β_n) произвольную точку τ_1 так, чтобы выполнялись неравенства:

$$S(\tau_1) \geqslant 2A\sqrt{\log\log T} > k.$$

Пусть, далее, τ_2 - ближайшая к β_n справа точка перемены знака функции $S(t)$. Поскольку $S(t)$ меняет знак с плюса на минус, точка τ_2 необходимо является точкой Грама[2)] и $S(\tau_2) = 0$. Итак,

$$S(\tau_1) > k > S(\tau_2), \quad \tau_1 < \tau_2.$$

[2)] См. доказательство теоремы 4.7.

Согласно лемме 18.П, между τ_1 и τ_2 найдётся по меньшей мере одна точка τ такая, что $S(\tau+0)=k$. Поскольку найденные выше точки τ_2 перемены знака, отвечающие различным совокупностям, различны (это следует из процедуры разбиения множества интервалов (α_j,β_j) на совокупности), то количество таких точек τ на промежутке $T<t\leqslant T+H$ оценивается снизу числом

$$R-1\ >\ (1-\delta)\,\frac{b_1}{3}\,Hh^{-1}\ >\ \frac{\pi b_1}{6.6}\,\frac{M}{\log N}\,\big(\log\log\log\log N\big)^{-1}.$$

Теперь утверждение леммы следует из леммы 4.1.

В случае отрицательных k доказательство проводится аналогично. Отличие заключается в том, что в качестве E следует рассматривать множество точек t промежутка $(T,T+H]$, для которых $S(t)\leqslant -2A\sqrt{\log\log T}$. Далее все промежутки, образующие E, следует разбить на совокупности, а совокупности - на классы подобно тому, как это делалось выше (полученные выше оценки величин L_1, L_2, R при этом, очевидно, сохраняют силу). На заключительном шаге при рассмотрении произвольной совокупности E_m первого класса в качестве τ_1 следует брать точку перемены знака $S(t)$, ближайшую к α_ℓ слева, а в качестве τ_2 - произвольную точку интервала (α_n,β_n), так что

$$S(\tau_2)<-2A\sqrt{\log\log T}<-A\sqrt{\log\log N}\leqslant k\leqslant -1<S(\tau_1)=0,\quad \tau_1<\tau_2.$$

Теперь утверждение теоремы следует из лемм 18.П и 4.1. Теорема доказана.

Глава 5

Соседние ординаты, не подчиняющиеся закону Грама

Настоящая глава посвящена изучению поведения чисел в наборах вида

$$(\Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1}), \tag{5.1}$$

где $s \geqslant 2$ - фиксированное целое число, а n неограниченно возрастает. Её появление явилось следствием попыток автора дать ответ на следующий вопрос, ранее, по всей видимости, не рассматривавшийся: как часто встречаются пары, тройки, четвёрки и т.д. подряд идущих ординат γ_n, для каждой из которых явление Грама-Сельберга не имеет места, и каково в таких случаях распределение знаков в соответствующих наборах (Δ_n, Δ_{n+1}), $(\Delta_n, \Delta_{n+1}, \Delta_{n+2})$, $(\Delta_n, \Delta_{n+1}, \Delta_{n+2}, \Delta_{n+4})$ и т.д.?

Из определения Δ_n следует, что одновременное выполнение неравенств

$$\Delta_n > 0, \qquad \Delta_{n+1} < 0$$

привело бы к противоречивому соотношению $\gamma_{n+1} \leqslant t_n < \gamma_n$. Таким образом, номера n, отвечающие соотношению $\Delta_n \Delta_{n+1} \neq 0$, можно разбить на три класса в зависимости от того, какое из следующих условий окажется выполненным:

$$1)\ \Delta_n > 0,\ \Delta_{n+1} > 0; \quad 2)\ \Delta_n < 0,\ \Delta_{n+1} < 0; \quad 3)\ \Delta_n < 0,\ \Delta_{n+1} > 0.$$

Вычисления показывают, что каждый из этих классов непуст, а наименьшие принадлежащие им значения n равны, соответственно, $4923, 3359$ и 379. Данные таблицы 2 Приложения III показывают, например, что среди первых 10 миллионов номеров n доли попавших в первый, второй и третий классы составляют 1.05%, 1.05% и 0.46%. Однако эта таблица плохо отражает истинное положение дел, поскольку (как будет показано ниже) при неограниченном возрастании N эти доли стремятся к $50\%, 50\%$ и 0% соответственно.

Похожая картина наблюдается и в случае, если вместо произведений двух соседних членов последовательности Δ_n рассматривать произведения трех, четырех, пяти и вообще любого фиксированного числа s подряд идущих величин $\Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1}$.

Именно, пусть E_s - множество номеров n с условием $\Delta_n \Delta_{n+1} \ldots \Delta_{n+s-1} \neq 0$, и пусть $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$ - произвольный набор, элементы которого равны ± 1. Пусть,

далее, $E_s(\mathbf{e})$ обозначает множество тех номеров $n \in E_s$, для которых знак Δ_{n+j-1} совпадает с ε_j для всех $j = 1, \ldots, s$:

$$\operatorname{sign} \Delta_n = \varepsilon_1, \quad \operatorname{sign} \Delta_{n+1} = \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \operatorname{sign} \Delta_{n+s-1} = \varepsilon_s \,.$$

Отметим, что бóльшая часть из 2^s множеств $E_s(\mathbf{e})$, отвечающих всем возможным наборам $\mathbf{e}$, являются пустыми. Действительно, рассмотренный выше пример (с $s = 2$, $\mathbf{e} = (1, -1)$) показывает, что непустому множеству не может отвечать набор $\mathbf{e}$, в котором найдется пара соседних элементов вида $\varepsilon_j = 1, \varepsilon_{j+1} = -1$. Иначе говоря, для того, чтобы множество $E_s(\mathbf{e})$ было непустым, необходимо, чтобы величины ε_j, составляющие набор $\mathbf{e}$, образовывали неубывающую последовательность: $\varepsilon_1 \leqslant \ldots \leqslant \varepsilon_s$. Так как $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, то это возможно лишь в случае, когда $\mathbf{e}$ имеет вид

$$\big(\underbrace{-1, \ldots, -1}_{r}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{s-r}\big),$$

где $0 \leqslant r \leqslant s$. Следовательно, общее число допустимых наборов равно $s + 1$.

Как и в случае $s = 2$, среди $s + 1$ множеств $E_s(\mathbf{e})$, отвечающих допустимым наборам $\mathbf{e}$, можно указать два «исключительных» множества, для каждого из которых число элементов, не превосходящих N, составляет $0.5N + o(N)$ при неограниченном возрастании N. Эти исключительные множества (обозначаемые в дальнейшем через E_s^+ и E_s^-) отвечают наборам $\mathbf{e}^+ = (1, \ldots, 1)$, $\mathbf{e}^- = (-1, \ldots, -1)$, составленным из чисел одного знака.

Этот неожиданный эффект «неравноправия» различных допустимых наборов можно пояснить следующим образом. Одновременному наличию в наборе $\mathbf{e}$ положительных и отрицательных чисел должны отвечать перемены знака в последовательности величин Δ_n, т.е. неравенства

$$\Delta_n < 0, \quad \Delta_{n+1} > 0. \tag{5.2}$$

Если Δ_n велико по модулю, то для выполнения неравенств (5.2) величина Δ_m при переходе от $m = n$ к $m = n + 1$ должна совершить достаточно резкий скачок. С другой стороны, этот скачок может быть и не таким резким, но для этого необходимо, чтобы модуль величины Δ_n был не очень велик. Таким образом, для частого осуществления условий (5.2) имеется два препятствия.

Первое препятствие заключается в том, что при больших n величина $|\Delta_n|$, как правило, очень велика. Согласно следствию из теоремы 3.3, для любой сколь угодно медленно растущей функции $\Phi(x) > 0$ количество номеров $n \leqslant N$ с условием

$$|\Delta_n| \leqslant \Phi^{-1}(n)\sqrt{\log\log n}$$

есть $o(N)$. Иными словами, «почти всегда» Δ_n имеет порядок $\Phi^{-1}(n)\sqrt{\log\log n}$ и выше.

Второе препятствие состоит в следующем. Согласно лемме 5.3, резкий скачок при переходе от Δ_n к Δ_{n+1} (и, как следствие, большое значение разности $\Delta_{n+1} - \Delta_n$) возникает в случае, когда соседние ординаты γ_n и γ_{n+1} разделены большим числом точек Грама. Можно, однако, показать (см. лемму 5.1), что доля номеров n, для которых промежуток $[\gamma_n, \gamma_{n+1})$ содержит не менее k таких точек, не превосходит ae^{-bk}, где $a, b > 0$, и, таким образом, чрезвычайно быстро убывает с ростом k.

Итак, если величина Δ_n положительна (отрицательна), то при любом фиксированном $s \geqslant 2$ все величины $\Delta_{n+1}, \dots, \Delta_{n+s-1}$ «почти всегда» будут иметь тот же знак, что и Δ_n. Поскольку число положительных (отрицательных) членов в последовательности Δ_n, $n \leqslant N$, эквивалентно $0.5N$, то и число номеров n из того же промежутка, попавших в каждое из множеств E_s^+, E_s^-, также эквивалентно $0.5N$.

Строгому обоснованию приведенных выше рассуждений посвящена первая часть главы (§§1,2).

Утверждения первых двух параграфов уточняются и дополняются в §3, где строится функция распределения для произведений

$$\Delta_n \Delta_{n+1} \dots \Delta_{n+s-1} \tag{5.3}$$

и доказываются теоремы о существовании наборов (5.1), состоящих из одних лишь аномально «малых» или одних лишь аномально «больших» значений Δ_n.

В отличие от остальных глав, здесь мы предполагаем, что $N \geqslant N_0$, где постоянная N_0 зависит не только от ε, но и от s.

§1. Большие расстояния между соседними ординатами нулей $\zeta(s)$

Приводимое ниже утверждение (лемма 5.1) имеет целью показать, что доля промежутков (γ_n, γ_{n+1}), длина которых в v раз превышает среднее значение $2\pi(\log \gamma_n)^{-1}$, убывает с ростом v как $O\big(e^{-cv}\big)$, где c - положительная постоянная.

Лемма 5.1. *Пусть $v > 0$ и пусть $\nu = \nu(v)$ - количество пар соседних ординат γ_n, γ_{n+1} нулей $\zeta(s)$, удовлетворяющих условиям*

$$T < \gamma_n < \gamma_{n+1} \leqslant T + H, \quad \gamma_{n+1} - \gamma_n > \frac{2\pi v}{\log T}. \tag{5.4}$$

Тогда для $\nu(v)$ справедлива оценка:

$$\nu(v) \leqslant \kappa(v) \frac{H}{2\pi} \log T, \quad \kappa(v) = e^4 \exp\left\{ -\frac{v}{2ec_0} + \frac{\varepsilon \sqrt{v}}{20\sqrt{2c_0}} \right\}.$$

Доказательство. Если $0 < v \leqslant 8ec_0$, то искомая оценка следует из тривиальной, поскольку

$$\nu(v) \leqslant N(T+H) - N(T) < \frac{H}{2\pi} \log T \leqslant e^4 \frac{H}{2\pi} (\log T) \exp\left\{ -\frac{v}{2ec_0} \right\} < \kappa(v) \frac{H}{2\pi} \log T.$$

Если же $v > \dfrac{16}{\pi} \dfrac{\log T}{\log\log\log T}$, то $\nu(v) = 0$ в силу теоремы Литтлвуда [15], согласно которой

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n < \frac{32}{\log\log\log \gamma_n}$$

для всех достаточно больших n.

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда

$$8ec_0 < v \leqslant \frac{16}{\pi}\,\frac{\log T}{\log\log\log T}.$$

Положим $h = \pi v(2\log T)^{-1}$ и рассмотрим произвольную пару γ_n, γ_{n+1}, отвечающую (5.4). При любом t с условием $\gamma_n < t < \gamma_n + 2h$ промежуток $(t, t+2h)$ целиком лежит в $(\gamma_n, \gamma_n + 4h)$ и, таким образом, не содержит ни одной ординаты нулей $\zeta(s)$. Следовательно,

$$N(t+2h) - N(t) = \frac{1}{\pi}\big(\vartheta(t+2h) - \vartheta(t)\big) + S(t+2h) - S(t) = 0$$

при всех t, $\gamma_n < t \leqslant \gamma_n + 2h$. Итак, для указанных значений t имеем:

$$\begin{aligned}|S(t+2h) - S(t)| = \frac{1}{\pi}\big(\vartheta(t+2h) - \vartheta(t)\big) &= \frac{1}{\pi}\big(2h\,\vartheta'(t) + 2h^2\,\vartheta''(t+2\theta h)\big) = \\ = \frac{1}{\pi}\left\{2h\left(\log\frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) + 2h^2\left(\frac{1}{2(t+2\theta h)} + O\left(\frac{1}{t^3}\right)\right)\right\} &> \\ > \frac{h}{\pi}\log\frac{t}{2\pi} > \frac{h}{\pi}\log\frac{T}{2\pi} &= \frac{v}{2}\left(1 - \frac{\log 2\pi}{\log T}\right).\end{aligned}$$

Положим $k = \big[v/(4ec_0)\big]$, так что

$$2 \leqslant k \leqslant \frac{2}{\pi ec_0}\,\frac{\log T}{\log\log\log T} < c\log Y,$$

где c - сколь угодно малое фиксированное число. Суммируя обе части неравенства

$$2h\left(\frac{v}{2}\right)^{2k}\left(1 - \frac{\log 2\pi}{\log T}\right)^{2k} \leqslant \int_{\gamma_n}^{\gamma_n+2h}\big(S(t+2h) - S(t)\big)^{2k}\,dt$$

по всем $\nu(v)$ парам γ_n, γ_{n+1}, отвечающим (5.4), и пользуясь леммой 3.15, находим:

$$\begin{aligned}2h\nu(v)\left(\frac{v}{2}\right)^{2k}\left(1 - \frac{\log 2\pi}{\log T}\right)^{2k} \leqslant \int_T^{T+H}\big(S(t+2h) - S(t)\big)^{2k}\,dt &\leqslant \\ \leqslant \exp\left\{\frac{v\,\varepsilon}{80c_0\sqrt{ke}}\right\}\frac{c_0}{56}\,(2c_0)^{2k}H,&\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\nu(v) \leqslant \frac{H}{2h}\,\frac{c_0}{56}\left(\frac{4c_0k}{v}\right)^{2k}\left(1 - \frac{\log 2\pi}{\log T}\right)^{-2k}\exp\left\{\frac{v\,\varepsilon}{80c_0\sqrt{ke}}\right\} &\leqslant \\ \leqslant \frac{c_0}{28v}\exp\left\{\frac{\varepsilon\sqrt{v}}{20\sqrt{2c_0}}\right\}\left(1 - \frac{\log 2\pi}{\log T}\right)^{-2k}e^{-2k}\,\frac{H}{2\pi}\log T.&\end{aligned}$$

Из неравенств, которым удовлетворяет v, находим:

$$\left(1-\frac{\log 2\pi}{\log T}\right)^{-2k}\leqslant\exp\left\{\frac{4k\log 2\pi}{\log T}\right\}\leqslant\exp\left\{\frac{v}{ec_0}\,\frac{\log 2\pi}{\log T}\right\}<$$
$$<\exp\left\{\frac{4\log 2\pi}{\pi ec_0}\,(\log\log\log T)^{-1}\right\},$$
$$\nu(v)\leqslant\frac{c_0}{28\cdot 8ec_0}\,\exp\left\{\frac{4\log 2\pi}{\pi ec_0}\,(\log\log\log T)^{-1}\right\}\exp\left\{-2\left(\frac{v}{4ec_0}-1\right)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{\varepsilon\sqrt{v}}{20\sqrt{2c_0}}\right\}\frac{H}{2\pi}\,\log T<\frac{1}{80}\,\exp\left\{-\frac{v}{2ec_0}+\frac{\varepsilon\sqrt{v}}{20\sqrt{2c_0}}\right\}\frac{H}{2\pi}\,\log T<$$
$$<\kappa(v)\,\frac{H}{2\pi}\,\log T.$$

Лемма доказана.

Неравенство леммы 5.1 позволяет получить верхнюю оценку суммы

$$S_\kappa(N;M)\,=\,\sum_n(\gamma_{n+1}-\gamma_n)^\kappa,\quad\kappa>0,$$

необходимую для доказательства основных утверждений главы.

Лемма 5.2. *При любом $\kappa\geqslant 1$ имеет место оценка:*

$$S_\kappa(N;M)\leqslant c_5\left(\frac{2\pi c_4}{\log N}\right)^\kappa\Gamma(\kappa+1)M,$$

где $c_4=8.7ec_0, c_5=9e^5c_0$.

Доказательство. Положим $T=\gamma_N, H=\gamma_{N+M}-\gamma_N$, так что

$$T=\big(1+o(1)\big)\,\frac{2\pi N}{\log N},\quad H=\big(1+o(1)\big)\frac{2\pi M}{\log N},$$

и, следовательно, $T^{\alpha+\varepsilon_1}\leqslant H\leqslant T^{\alpha+\varepsilon}$, где $\varepsilon_1=0.9\,\varepsilon$. Распределим все ординаты γ_n, $N<n\leqslant N+M$, по классам $E_0,E_1,E_2,\ldots$, относя к классу E_r те из них, которые удовлетворяют условию

$$\frac{2\pi r}{\log T}\leqslant\gamma_{n+1}-\gamma_n<\frac{2\pi(r+1)}{\log T}.$$

Согласно лемме 5.1, число элементов в классе E_r не превосходит

$$\kappa(r)\,\frac{H}{2\pi}\,\log T,\quad\kappa(r)=e^4\,\exp\left\{-\frac{r}{2ec_0}+\frac{\varepsilon\sqrt{r}}{20\sqrt{2c_0}}\right\}.$$

Замечая, что

$$-\frac{r}{2ec_0}+\frac{\varepsilon\sqrt{r}}{20\sqrt{2c_0}}\leqslant-\frac{r}{2ec_0}\left(1-6e\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\right)<-\frac{0.23r}{2ec_0}=-\beta\,r$$

при $\varepsilon < 10^{-3}$, находим:

$$S_\kappa(N;M) \leqslant e^4 \sum_{r=0}^{+\infty} \left(\frac{2\pi(r+1)}{\log T}\right)^\kappa e^{-\beta(r+1)+\beta} \frac{H}{2\pi} \log T \leqslant e^{4+\beta} \left(\frac{2\pi}{\log T}\right)^\kappa V_\kappa \frac{H}{2\pi} \log T,$$

$$V_\kappa = \sum_{r=1}^{+\infty} r^\kappa e^{-\beta r}.$$

Функция $f(r) = r^\kappa e^{-\beta r}$ монотонно возрастает на отрезке $1 \leqslant r \leqslant r_0 = \kappa\beta^{-1}$, достигает в точке $r = r_0$ максимума, равного

$$\left(\frac{\kappa}{e\beta}\right)^\kappa, \tag{5.5}$$

после чего монотонно убывает. Оценивая слагаемые суммы V_κ, отвечающие значениям $1 \leqslant r \leqslant r_1 - 1$ и $r \geqslant r_1 + 2$, $r_1 = [r_0]$, интегралами по соответствующим промежуткам, а слагаемые, отвечающие значениям $r = r_1, r_1 \pm 1$ - величиной (5.5), получим:

$$\begin{aligned} V_\kappa(N;M) &\leqslant \left(\int_0^{r_1} + \int_{r_1+1}^{+\infty}\right) f(r)dr + 3\left(\frac{\kappa}{e\beta}\right)^\kappa < \int_0^{+\infty} f(r)dr + 3\left(\frac{\kappa}{e\beta}\right)^\kappa = \\ &= \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\beta^{\kappa+1}} + 3\left(\frac{\kappa}{e\beta}\right)^\kappa = \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\beta^{\kappa+1}}\left(1 + 3\beta\,\frac{(\kappa e^{-1})^\kappa}{\Gamma(\kappa+1)}\right) \leqslant \\ &\leqslant \left(1 + \frac{3\beta}{e}\right)\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\beta^{\kappa+1}} < 8.9ec_0\Gamma(\kappa+1)\beta^{-\kappa}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_\kappa(N;M) &< e^{4+\beta}\left(\frac{2\pi}{\log T}\right)^\kappa \cdot 8.9ec_0\,\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\beta^\kappa} < \\ &< 9e^5c_0\left(\frac{2\pi}{\beta\log T}\right)^\kappa \Gamma(\kappa+1) < 9e^5c_0\left(\frac{2\pi\cdot 8.7ec_0}{\log N}\right)^\kappa \Gamma(\kappa+1). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§2. Распределение знаков в наборах $(\Delta_n, \ldots, \Delta_{n+s-1})$

Основное утверждение этого параграфа (теорема 5.1) показывает, что как бы ни было велико фиксированное число $s \geqslant 2$, «почти всегда» набор (5.1) состоит из чисел одного знака, причём асимптотически в половине случаев все элементы такого набора положительны, и в половине - отрицательны.

По аналогии с величинами $r(n) = \Delta(n) - \Delta(n-1)$, введёнными в §2 главы 3, определим величины $r_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$.

Лемма 5.3. *Величина $r_n + 1$ совпадает с числом точек Грама на промежутке $[\gamma_{n-1}, \gamma_n)$.*

Доказательство. Определив номера μ и ν из неравенств

$$t_{\mu-1} < \gamma_{n-1} \leqslant t_\mu, \quad t_{\nu-1} < \gamma_n \leqslant t_\nu,$$

будем иметь: $\Delta_n = \nu - n, \quad \Delta_{n-1} = \mu - n + 1, \quad 1 + r_n = \nu - \mu$. Но разность $\nu - \mu$ совпадает с числом точек Грама на промежутке $[\gamma_{n-1}, \gamma_n)$. Лемма доказана.

Следствие. *При любом n справедливо неравенство:* $r_n \geqslant -1$.

Лемма 5.4. *При любом $\kappa \geqslant 1$ справедлива оценка*:

$$\sum_n |r_n|^\kappa \leqslant 1.1 c_5 (c_4 \kappa)^\kappa M$$

(*здесь и далее c_4, c_5 - постоянные леммы* 5.2).

Доказательство. Пусть $t_{\nu-1} < \gamma_{N+M} \leqslant t_\nu$. В силу леммы 1.1 для длины G_ν наикратчайшего промежутка Грама, имеющего непустое пересечение с отрезком $[\gamma_N, \gamma_{N+M}]$, имеем оценку:

$$h = t_\nu - t_{\nu-1} > \frac{2\pi}{\ln N}.$$

Следовательно, при любом n, $N < n \leqslant N + M$, число точек Грама, попавших на $[\gamma_{n-1}, \gamma_n)$, не превосходит $(\gamma_n - \gamma_{n-1})h^{-1} + 1$. Отсюда, по лемме 5.3, заключаем: $r_n \leqslant (\gamma_n - \gamma_{n-1})h^{-1}$. Пользуясь оценкой леммы 5.2, будем иметь:

$$\sum_n |r_n|^\kappa \leqslant \sum_{n:\, r_n = -1} 1 + \sum_{n:\, r_n \geqslant 1} \big((\gamma_n - \gamma_{n-1})h^{-1}\big)^\kappa \leqslant M + c_5 \Gamma(\kappa + 1) \left(\frac{2\pi c_4}{h \ln N}\right)^\kappa M <$$
$$< M + c_5 (\kappa c_4)^\kappa M < 1.1 c_5 (\kappa c_4)^\kappa M.$$

Лемма доказана.

Для целых i, j с условием $0 \leqslant i < j$ положим $r_n(i,j) = \Delta_{n+j} - \Delta_{n+i}$.

Лемма 5.5. *Пусть $0 \leqslant i < j \leqslant s$. Тогда при любом $\kappa \geqslant 1$ справедлива оценка*:

$$\sum_n |r_n(i,j)|^\kappa \leqslant 1.2 c_5 (c_4 s \kappa)^\kappa M.$$

Доказательство. Из определения r_n и $r_n(i,j)$ следует тождество

$$r_n(i,j) = r_{n+j} + r_{n+j-1} + \ldots + r_{n+i+1}.$$

Применяя к нему неравенство Гёльдера наряду с оценкой леммы 5.4, получим:

$$\sum_n |r_n(i,j)|^\kappa \leqslant \sum_n (j-i)^{\kappa-1} \big(|r_{n+j}|^\kappa + |r_{n+j-1}|^\kappa + \ldots + |r_{n+i+1}|^\kappa\big) \leqslant$$
$$\leqslant s^{\kappa-1} \sum_n \sum_{t=i+1}^{j} |r_{n+t}|^\kappa \leqslant s^\kappa \sum_{N < n \leqslant N+M+s} |r_n|^\kappa \leqslant s^\kappa \cdot 1.1 c_5 (\kappa c_4)^\kappa (M + s) < 1.2 c_5 (\kappa c_4 s)^\kappa M.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.6. *Пусть $0 \leqslant j \leqslant s$ - целое число. Тогда при любом $\kappa \geqslant 1$ справедлива оценка*

$$\sum_n{}' |\Delta_{n+j}|^{-\kappa} \leqslant \frac{3.6 M}{\sqrt{\log L}}.$$

Доказательство. В обозначениях леммы 4.1 сумма $F_r + F_{-r} = \mathcal{F}_r$ равна числу величин Δ_n с условием $|\Delta_n| = r$, $N < n \leqslant N + M + s$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$. Положив $R = \sqrt[4]{L}$, будем иметь:

$$\sum_n{}' |\Delta_{n+j}|^{-\kappa} \leqslant \sum_{N<n\leqslant N+M+s} |\Delta_n|^{-\kappa} = \sum_{r\geqslant 1} \mathcal{F}_r \cdot r^{-\kappa} =$$
$$= \left(\sum_{r\leqslant R} + \sum_{r>R}\right)\mathcal{F}_r \cdot r^{-\kappa} \leqslant \left(\sum_{r\leqslant R} \mathcal{F}_r\right) + R^{-\kappa}\left(\sum_{r>R} \mathcal{F}_r\right).$$

Полагая $x = \pm y, y = \pi R\sqrt{2/L}$ в теореме 3.3, находим:

$$\sum_{r\leqslant R} \mathcal{F}_r \leqslant (M+s)\left(\frac{2y}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2\cdot 1.79}{\sqrt{\log L}}\right) < \frac{3.59M}{\sqrt{\log L}}.$$

Таким образом, исходная сумма не превосходит

$$\frac{3.59M}{\sqrt{\log L}} + MR^{-\kappa} < \frac{3.6M}{\sqrt{\log L}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.7. *Пусть $0 \leqslant i < j \leqslant s$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_n{}' \left|\frac{r_n(i,j)}{\Delta_{n+j}}\right| \leqslant \frac{4.8c_4 sM\log\log L}{\sqrt{\log L}}.$$

Доказательство. Положим $\kappa = 0.5\log\log L$. Применяя к исходной сумме неравенство Гёльдера наряду с оценками лемм 5.5 и 5.6, будем иметь:

$$\sum_n{}' \left|\frac{r_n(i,j)}{\Delta_{n+j}}\right| \leqslant \left(\sum_n |r_n(i,j)|^\kappa\right)^{\frac{1}{\kappa}} \left(\sum_n{}' |\Delta_{n+j}|^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}}\right)^{1-\frac{1}{\kappa}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(1.2c_5(c_4 s\kappa)^\kappa M\right)^{\frac{1}{\kappa}} \left(\frac{3.6M}{\sqrt{\log L}}\right)^{1-\frac{1}{\kappa}} = \left(\frac{c_5}{3}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \frac{3.6ec_4 s\kappa M}{\sqrt{\log L}} < \frac{4.8c_4 sM\log\log L}{\sqrt{\log L}}.$$

Лемма доказана.

Положим $e_n = \operatorname{sign}\Delta_n$, так что $e_n = |\Delta_n|/\Delta_n$ при $\Delta_n \neq 0$.

Лемма 5.8. *Пусть $0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{2m} < i_{2m+1}$ - целые числа. Тогда равенства*

$$e_{n+i_1} e_{n+i_2} \ldots e_{n+i_{2m}} = 1 + 2\theta_1 f_m, \tag{5.6}$$
$$e_{n+i_1} e_{n+i_2} \ldots e_{n+i_{2m+1}} = e_{n+i_{2m+1}} + 2\theta_2 f_m, \tag{5.7}$$

в которых

$$f_m = \left|\frac{r_n(i_1,i_2)}{\Delta_{n+i_2}}\right| + \left|\frac{r_n(i_3,i_4)}{\Delta_{n+i_4}}\right| + \ldots + \left|\frac{r_n(i_{2m-1},i_{2m})}{\Delta_{n+i_{2m}}}\right|,$$

имеют место в случае, когда произведения в левых частях (5.6),(5.7) *отличны от нуля.*

Доказательство. Докажем (5.6) индукцией по m. Не ограничивая общности, можем считать $i_1 = 0$. Полагая для краткости $i_2 = i$ и пользуясь тем, что $|x+y| = |x| + \theta|y|$ при любых x и y, в случае $m = 1$ получим:

$$e_n e_{n+i} = \frac{|\Delta_n \Delta_{n+i}|}{\Delta_n \Delta_{n+i}} = \frac{|\Delta_n(\Delta_n + r_n(0,i))|}{\Delta_n \Delta_{n+i}} = \frac{\Delta_n^2 + \theta_1 \Delta_n r_n(0,i)}{\Delta_n \Delta_{n+i}} =$$
$$= \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+i}} + \theta_1 \frac{r_n(0,i)}{\Delta_{n+i}} = \frac{\Delta_{n+i} - r_n(0,i)}{\Delta_{n+i}} + \theta_1 \frac{r_n(0,i)}{\Delta_{n+i}} = 1 + (\theta_1 - 1)\frac{r_n(0,i)}{\Delta_{n+i}} = 1 + 2\theta_2 f_1.$$

Допустим, что формула (5.6) верна при $m = 1, \ldots, \mu$. По предположению индукции, для $m = \mu + 1$ имеем:

$$e_{n+i_1} \ldots e_{n+i_{2\mu}} e_{n+i_{2\mu+1}} e_{n+i_{2\mu+2}} = (1 + 2\theta_3 f_\mu) e_{n+i_{2\mu+1}} e_{n+i_{2\mu+2}} =$$
$$= e_{n+i_{2\mu+1}} e_{n+i_{2\mu+2}} + 2\theta_4 f_\mu = 1 + 2\theta_5 \left| \frac{r_n(i_{2\mu+1}, i_{2\mu+2})}{\Delta_{n+i_{2\mu+2}}} \right| + 2\theta_4 f_\mu = 1 + 2\theta_6 f_{\mu+1},$$

что и требовалось. Формула (5.7) следует из (5.6). Лемма доказана.

Лемма 5.9. *Пусть $0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{2m} < i_{2m+1} \leqslant s$ - фиксированные целые числа. Тогда справедливы соотношения*

$$\sum_n e_{n+i_1} e_{n+i_2} \ldots e_{n+i_{2m+1}} = \theta_1 R, \quad \sum_n e_{n+i_1} e_{n+i_2} \ldots e_{n+i_{2m}} = M + \theta_2 R,$$

в которых

$$R = \frac{4.9 c_4 s^2 M \log\log L}{\sqrt{\log L}}.$$

Доказательство. Обозначим суммы из условия леммы через σ_1 и σ_2 соответственно. Согласно лемме 5.8,

$$\sigma_1 = \sum_n{}' (e_{n+i_{2m+1}} + 2\theta_1 f_m) = \sigma^{(0)} + 2\theta_2 \sum_{k=1}^{m} \sigma^{(k)},$$

где

$$\sigma^{(0)} = \sum_n{}' e_{n+i_{2m+1}}, \quad \sigma^{(k)} = \sum_n{}' \left| \frac{r_n(i_{2k-1}, i_{2k})}{\Delta_{n+i_{2k}}} \right|.$$

Заметим следующее: если l и r - количества нулевых членов некоторых последовательностей a_n и b_n, $N < n \leqslant N + M$, то число нулевых членов в последовательности $a_n b_n$ не превосходит $l + r$. Отсюда и из теоремы 3.3 заключаем, что число тех n из промежутка $N < n \leqslant N + M$, для которых $\Delta_{n+i_1} \Delta_{n+i_2} \ldots \Delta_{n+i_{2m}} = 0$, не превосходит

$$\frac{2 \cdot 1.79 \cdot 2mc_2 M}{\sqrt{\log L}} < \frac{3.59 s M}{\sqrt{\log L}}. \tag{5.8}$$

Следовательно,

$$\sigma^{(0)} = \sum_n e_{n+i_{2m+1}} + \theta_2 \frac{3.59 s M}{\sqrt{\log L}} = \sum_n e_n + \theta_3 \left(\frac{3.59 s M}{\sqrt{\log L}} + s \right).$$

Последняя сумма по n совпадает с разностью между числом положительных и отрицательных членов последовательности Δ_n, $N < n \leqslant N + M$, и в силу теоремы 3.3 не превосходит по модулю

$$M\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2/2}du + \frac{1.79}{\sqrt{\log L}}\right) - M\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{-u^2/2}du - \frac{1.79}{\sqrt{\log L}}\right) = \frac{3.58M}{\sqrt{\log L}}.$$

Оценивая каждую из сумм $\sigma^{(k)}$ по лемме 5.6, находим:

$$|\sigma_1| \leqslant \frac{3.58M}{\sqrt{\log L}} + \frac{3.59sM}{\sqrt{\log L}} + s + \frac{4.8c_4s^2M\log\log L}{\sqrt{\log L}} < \frac{4.9c_4s^2M\log\log L}{\sqrt{\log L}}.$$

С помощью тех же рассуждений, что и выше, заключаем, что число ненулевых слагаемых в σ_2 отличается от M не более чем на (5.8). Вновь применяя леммы 5.6 и 5.8, будем иметь:

$$\sigma_2 = \sum_n{}'(1 + 2\theta_4 f_m) =$$
$$= M + \theta_5\left(\frac{3.59sM}{\sqrt{\log L}} + s + \frac{4.8c_4s^2M\log\log L}{\sqrt{\log L}}\right) = M + \theta_6\frac{4.9c_4s^2M\log\log L}{\sqrt{\log L}}.$$

Лемма доказана.

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$ - *произвольный набор с условием* $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, $j = 1, \ldots, s$, $\varepsilon_1 \leqslant \ldots \leqslant \varepsilon_s$, *и пусть* $\mu(\mathbf{e}) = \mu(\mathbf{e}; N, M)$ – *число номеров* n *промежутка* $N < n \leqslant N + M$, *для которых выполнены равенства*

$$\operatorname{sign}(\Delta_{n+j-1}) = \varepsilon_j, \quad j = 1, \ldots, s. \tag{5.9}$$

Тогда

$$\mu(\mathbf{e}) = \kappa \cdot \frac{M}{2} + \theta R, \quad R = \frac{5c_4s^2M\log\log L}{\sqrt{\log L}},$$

где

$$\kappa = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{e} = \mathbf{e}^+ \text{ или } \mathbf{e} = \mathbf{e}^-; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим произведение

$$E_n = \frac{1 + \varepsilon_1 e_n}{2}\,\frac{1 + \varepsilon_2 e_{n+1}}{2}\ldots\frac{1 + \varepsilon_s e_{n+s-1}}{2}.$$

Так как

$$\frac{1 + \varepsilon_j e_{n+j-1}}{2} = \begin{cases} 1, & \text{если } e_{n+j-1} = \varepsilon_j, \\ 0, & \text{если } e_{n+j-1} = -\varepsilon_j, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } e_{n+j-1} = 0, \end{cases}$$

то $0 \leqslant E_n \leqslant \frac{1}{2}$ в случае, когда хотя бы одно из чисел Δ_{n+j}, $j = 0, 1, \ldots, s-1$, обращается в ноль. Как было отмечено по ходу доказательства леммы 5.9, общее число

таких номеров n не превосходит (5.8). Для оставшихся n имеем: $E_n = 1$ или $E_n = 0$ в зависимости от того, выполнены или нет условия (5.9). Следовательно,

$$\mu(\mathbf{e}) = \sum_n E_n + \frac{\theta}{2}\,\frac{3.59sM}{\sqrt{\log L}}.$$

Имеем, далее:

$$\sum_n E_n = 2^{-s}\sum_n (1+\varepsilon_1 e_n)\dots(1+\varepsilon_s e_{n+s-1}) = 2^{-s}\sum_n \Big(1+(\varepsilon_1 e_n+\ldots+\varepsilon_s e_{n+s-1})+\ldots$$
$$+\sum_{0<i_1<\ldots<i_k\leqslant s} \varepsilon_{i_1}\dots\varepsilon_{i_k} e_{n+i_1}\dots e_{n+i_k}+\ldots+\varepsilon_1\dots\varepsilon_s e_n\dots e_{n+s-1}\Big) =$$
$$= 2^{-s}\Bigg(\sum_n 1+\Big(\varepsilon_1\sum_n e_n+\ldots+\varepsilon_s\sum_n e_{n+s-1}\Big)+\ldots+$$
$$+\sum_{0<i_1<\ldots<i_k\leqslant s}\varepsilon_{i_1}\dots\varepsilon_{i_k}\sum_n e_{n+i_1}\dots\varepsilon_{n+i_k}+\ldots+\varepsilon_1\dots\varepsilon_s\sum_n e_n\dots e_{n+s-1}\Bigg).$$

Согласно лемме 5.9, общий вклад сумм, отвечающих произведениям нечётного числа сомножителей e_{n+i}, оценивается по модулю величиной

$$2^{-s}\sum_{1\leqslant k\leqslant(s+1)/2}\binom{s}{2k-1}R = 0.5R,\quad R = \frac{4.9c_1 s^2 M\log\log L}{\sqrt{\log L}}.$$

Согласно той же лемме, вклад сумм, отвечающих произведениям чётного числа сомножителей, представляется в виде $2^{-s}M(1+\sigma_2+\sigma_4+\ldots)$, где

$$\sigma_2 = \sum_{0<i<j\leqslant s}\varepsilon_i\,\varepsilon_j,\quad \sigma_4 = \sum_{0<i<j<k<r\leqslant s}\varepsilon_i\,\varepsilon_j\,\varepsilon_k\,\varepsilon_r,\quad \ldots$$

- элементарные симметрические функции величин $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s$.

Положим

$$f(x) = (x-\varepsilon_1)\dots(x-\varepsilon_s) = x^s-\sigma_1 x^{s-1}+\sigma_2 x^{s-2}-\ldots+(-1)^s\sigma_s.$$

Несложно проверить, что сумма $\sigma = 1+\sigma_2+\sigma_4+\ldots$ совпадает с суммою коэффициентов многочлена $g(x) = \frac{1}{2}\big(f(x)+(-1)^s f(-x)\big)$, так что $\sigma = g(1)$. Пусть теперь l и m обозначают количества положительных и отрицательных чисел в наборе $\mathbf{e} = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s)$, так что $l+m = s$. Тогда

$$f(x) = (x-1)^l(x+1)^m,\quad g(x) = \tfrac{1}{2}\big((x-1)^l(x+1)^m+(x-1)^m(x+1)^l\big).$$

Очевидно, $g(1) = 0$ при любых l и m, отличных от нуля (что отвечает наборам $\mathbf{e}$, содержащим числа разных знаков). Если же $m = 0$ или $l = 0$ (что соответствует наборам $\mathbf{e}^+, \mathbf{e}^-$), то $g(1) = \frac{1}{2}\cdot 2^s = 2^{s-1}$.

Собирая вместе полученные результаты, находим:

$$\sum_n E_n = \kappa\,\frac{M}{2}+\theta_1 R,$$
$$\mu(\mathbf{e}) = \kappa\,\frac{M}{2}+\theta_2\Big(R+\frac{1.8sM}{\sqrt{\log L}}\Big) = \kappa\,\frac{M}{2}+\theta_3\frac{5c_4 s^2 M\log\log L}{\sqrt{\log L}}.$$

Теорема доказана.

Результаты этого параграфа интересно сопоставить с численными данными, собранными в таблицах 2 - 5 Приложения III.

§3. Распределение произведений $\Delta_n \dots \Delta_{n+s-1}$

В настоящем параграфе исследуется распределение произведений (5.3) в случаях, когда n пробегает множества E_s^+, E_s^- (т.е. в случаях, когда числа набора (5.1) все положительны или все отрицательны). В частности, будет доказано, что при любом $s \geqslant 2$ произведения (5.3), должным образом нормированные, имеют распределение, сходящееся с ростом параметра N к гамма-распределению $\Gamma(1)$, т.е. к распределению с плотностью

$$\frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}}.$$

Построение функции распределения опирается, как и при доказательстве теоремы 2.4, на метод А.Гоша и использует асимптотические формулы для моментов произведений (5.3), но имеет свои особенности.

Несложно показать, что главные члены $2k$-х моментов

$$\sum_n \left|\Delta_n \dots \Delta_{n+s-1}\right|^{2k} \quad \text{и} \quad \sum_n \Delta_n^{2ks}$$

совпадают и равны, следовательно,

$$\frac{(2ks)!}{(ks)!}\,\frac{M(\log\log N)^{ks}}{(2\pi)^{2ks}}.$$

При попытке применить метод Гоша напрямую к произведениям (5.3) и построить для них характеристическую функцию возникает сумма типа

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant K} \left(-\frac{t^2}{2^s}\right)^k \frac{(2ks)!}{(2k)!(ks)!},$$

которая при $s = 1$ служит приближением к функции $e^{-t^2/2}$, но при $s \geqslant 3$ оказывается частичной суммой ряда, расходящегося всюду кроме точки $t = 0$.

Чтобы избежать трудностей такого рода, вместо произведений (5.3) приходится иметь дело с величинами

$$\kappa_n \;=\; \left|\Delta_n \dots \Delta_{n+s-1}\right|^{\frac{1}{s}}, \tag{5.10}$$

которые «в среднем» ведут себя как $|\Delta_n|$ и к которым применима техника А.Гоша. Однако появление дробного показателя $1/s$ в (5.10), а также необходимость учёта ограничений типа $n \in E_s^+$, $n \in E_s^-$ при вычислении моментов

$$\sum_{n \in E_s^{\pm}} \kappa_n^k$$

приводит к усложнению ряда выкладок. Этим объясняется большое число вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства теоремы 5.2.

Положим $\delta_n = \pi\Delta_n\sqrt{2/L}, \varepsilon_n(i,j) = \delta_{n+j} - \delta_{n+i}$, так что $\varepsilon_n(i,j) = \pi r_n(i,j)\sqrt{2/L}$. Вместо $\varepsilon_n(0,j)$ в ряде случаев будем писать $\varepsilon_n(j)$.

Лемма 5.10.*Пусть $0 \leqslant i < j \leqslant s$. Тогда при любом $\kappa \geqslant 1$ справедлива оценка*

$$\sum_n |\,\varepsilon_n(i,j)|^\kappa \leqslant 1.2c_5\left(\frac{4.5c_4\kappa s}{\sqrt{L}}\right)^\kappa M.$$

Доказательство. Действительно, согласно лемме 5.5,

$$\sum_n |r_n(i,j)|^\kappa \leqslant 1.2c_5(c_4 s\kappa)^\kappa M.$$

Значит,

$$\sum_n |\,\varepsilon_n(i,j)|^\kappa = \left(\pi\sqrt{\frac{2}{L}}\right)^\kappa \sum_n |r_n(i,j)|^\kappa \leqslant 1.2c_5\left(\frac{\pi\sqrt{2}c_4 s\kappa}{\sqrt{L}}\right)^\kappa M < \\ < 1.2c_5\left(\frac{4.5c_4 s\kappa}{\sqrt{L}}\right)^\kappa M.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.11. *Пусть i, j, k, l, r, s и t - целые числа, удовлетворяющие условиям: $0 \leqslant i < j \leqslant s$, $1 \leqslant t < s$, $0 \leqslant l \leqslant s$, $1 \leqslant r \leqslant c_1\sqrt[3]{L}$. Тогда справедливо неравенство:*

$$\sum_n |\delta_{n+l}|^r |\,\varepsilon_n(i,j)|^t \leqslant 68\sqrt{c_0}\left(\frac{2r}{e}\right)^{\frac{r}{2}}\left(\frac{9c_4 s^2}{\sqrt{L}}\right)^t M.$$

Доказательство. Пользуясь утверждениями леммы 5.10 и теоремы 3.1 наряду с неравенством Коши, будем иметь:

$$\sum_n |\delta_{n+l}|^r |\,\varepsilon_n(i,j)|^t \leqslant \left(\sum_{N<n\leqslant N+M+s} \delta_n^{2r}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_n \varepsilon_n^{2t}(i,j)\right)^{\frac{1}{2}} < \\ < \left(2.88\left(\frac{2r}{e}\right)^r (M+s)\cdot 1.2c_5\left(\frac{4.5c_4 s\cdot 2t}{\sqrt{L}}\right)^{2t} M\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ \leqslant 1.86\sqrt{c_1}\left(\frac{2r}{e}\right)^{\frac{r}{2}}\sqrt{c_5}\left(\frac{9c_4 st}{\sqrt{L}}\right)^t M < 68\sqrt{c_0}\left(\frac{2r}{e}\right)^{\frac{r}{2}} M\left(\frac{9c_4 s^2}{\sqrt{L}}\right)^t.$$

Лемма доказана.

Пусть t - произвольное целое число с условием $1 \leqslant t < s$. Положим

$$\xi_n(t) = \sum_{0<i_1<\ldots<i_t<s} |\,\varepsilon_n(i_1)\ldots\varepsilon_n(i_t)|,$$

где суммирование ведется по всем $\binom{s-1}{t}$ упорядоченным наборам $(i_1,\ldots,i_t)$ натуральных чисел, меньших s.

Лемма 5.12. *Пусть k - целое число, $2 \leqslant k \leqslant c_1 \sqrt[3]{L}$, $l = \min(k, s)$. Тогда справедлива оценка:*

$$\sum_n \sum_{t=1}^{l-1} |\delta_n|^{h-t} \xi_n(t) < 374 c_4 \sqrt{c_0}\, \frac{M s^3}{\sqrt{L}} \left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}},$$

где h - любое из чисел k, s.

Доказательство. Из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим, а также из леммы 5.11 следует, что исходная сумма не превосходит величины

$$\sum_n \sum_{t=1}^{l-1} |\delta_n|^{h-t} \sum_{0<i_1<\ldots<i_t<s} |\,\varepsilon_n(i_1) \ldots \varepsilon_n(i_t)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_n \sum_{t=1}^{l-1} |\delta_n|^{h-t} \sum_{0<i_1<\ldots<i_t<s} \frac{1}{t}\big(|\,\varepsilon_n(i_1)|^t + \ldots + |\,\varepsilon_n\,|^t\big) =$$

$$= \sum_{t=1}^{l-1} \frac{1}{t} \sum_{0<i_1<\ldots<i_t<s} \left\{ \sum_n |\delta_n|^{h-t} |\,\varepsilon_n(i_1)| + \ldots + \sum_n |\delta_n|^{h-t} |\,\varepsilon_n(i_t)| \right\} <$$

$$< \sum_{t=1}^{l-1} \frac{1}{t} \sum_{0<i_1<\ldots<i_t<s} t \cdot 68\sqrt{c_0}\, M \left(\frac{2(h-t)}{e}\right)^{\frac{h-t}{2}} \left(\frac{9c_4 s^2}{\sqrt{L}}\right)^t =$$

$$= 68\sqrt{c_0}\, M \sum_{t=1}^{l-1} \binom{s-1}{t} \left(\frac{2(h-t)}{e}\right)^{\frac{h-t}{2}} \left(\frac{9c_4 s^2}{\sqrt{L}}\right)^t.$$

Замечая, что

$$(h-t)^{\frac{h-t}{2}} \leqslant (k-t)^{\frac{k}{2}} = k^{\frac{k}{2}} \left(1 - \frac{t}{k}\right)^{\frac{k}{2}} < k^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{t}{2}},$$

заключаем, что сумма из условия леммы не превосходит

$$68\sqrt{c_0}\, M \sum_{t=1}^{l-1} \left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}} \binom{s-1}{t} e^{-\frac{t}{2}} \left(\frac{9c_4 s^2}{\sqrt{L}}\right)^t =$$

$$= 68\sqrt{c_0} \left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}} M \sum_{t=1}^{l-1} \binom{s-1}{t} q^t = 68\sqrt{c_0} \left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}} M\big\{(1+q)^{s-1} - 1\big\},$$

где обозначено: $q = \dfrac{9c_4 s^2}{\sqrt{eL}}$. Пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа, находим:

$$(1+q)^{s-1} - 1 \leqslant q(s-1)(1+q)^{s-2} < qs(1+q)^s = \frac{9c_4 s^3}{\sqrt{eL}} \left(1 + \frac{1}{s} \cdot \frac{9c_4 s^3}{\sqrt{eL}}\right)^s <$$

$$< \frac{9c_4 s^3}{\sqrt{eL}}\, \exp\left\{\frac{9c_4 s^3}{\sqrt{eL}}\right\} < \frac{5.5 c_4 s^3}{\sqrt{L}}.$$

Отсюда уже легко следует утверждение леммы.

Лемма 5.13. *Пусть k,t - целые числа, $k\geqslant 1$, $1\leqslant t<s$. Тогда справедлива оценка:*

$$\sum_n \xi_n^{2k}(t)\leqslant 1.2c_5\left(\frac{9c_4ks^3}{\sqrt{L}}\right)^{2kt}M.$$

Доказательство. Из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим, а также из неравенства Гёльдера заключаем:

$$\begin{aligned}\sum_n \xi_n^{2k}(t)&=\sum_n\left\{\sum_{0<i_1<\ldots<i_t<s}|\,\varepsilon_n(i_1)\ldots\varepsilon_n(i_t)|\right\}^{2k}\leqslant\\ &\leqslant\sum_n\left\{\sum_{0<i_1<\ldots<i_t<s}\frac{1}{t}\big(|\,\varepsilon_n(i_1)|^t+\ldots+|\,\varepsilon_n(i_t)|^t\big)\right\}^{2k}\leqslant\\ &\leqslant\sum_n t^{-2k}\binom{s-1}{t}^{2k-1}\sum_{0<i_1<\ldots<i_t<s}\big(|\,\varepsilon_n(i_1)|^t+\ldots+|\,\varepsilon_n(i_t)|^t\big)^{2k}\leqslant\\ &\leqslant\sum_n t^{-2k}\binom{s-1}{t}^{2k-1}\sum_{0<i_1<\ldots<i_t<s}t^{2k-1}\big(|\,\varepsilon_n(i_1)|^{2kt}+\ldots+|\,\varepsilon_n(i_t)|^{2kt}\big)=\\ &=\frac{1}{t}\binom{s-1}{t}^{2k-1}\sum_{0<i_1<\ldots<i_t<s}\left\{\sum_n|\,\varepsilon_n(i_1)|^{2kt}+\ldots+\sum_n|\,\varepsilon_n(i_t)|^{2kt}\right\}.\end{aligned}$$

Оценивая каждую из сумм по n с помощью леммы 5.10 и пользуясь неравенством

$$\binom{s-1}{t}=\frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-t)}{t!}<s^t,$$

находим:

$$\sum_n\xi_n^{2k}(t)\leqslant\frac{1}{t}\binom{s-1}{t}^{2k-1}\binom{s-1}{t}t\cdot 1.2c_5\left(\frac{9c_4s^2k}{\sqrt{L}}\right)^{2kt}M<1.2c_5\left(\frac{9c_4s^3k}{\sqrt{L}}\right)^{2kt}M.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.14. *Пусть k,t - целые числа, $1\leqslant t<s$, $1\leqslant k\leqslant c_1\sqrt[3]{L}$. Тогда справедлива оценка:*

$$\sum_n|\delta_n|^{\frac{k(s-t)}{s}}\big(\xi_n(t)\big)^{\frac{k}{s}}<8.25c_0^{\frac{1}{4}}M\left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}}\left(\frac{10.5c_4\sqrt{k}s^3}{\sqrt{L}}\right)^{\frac{kt}{s}}.$$

Доказательство. Обозначим сумму из условия леммы через C_t. Согласно неравенству Гёльдера,

$$C_t\leqslant\left(\sum_n\delta_n^{2k}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{t}{2s}}\left(\sum_n\big(\xi_n(t)\big)^{\frac{2k}{s+t}}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{t}{2s}}\leqslant\left(\sum_n\delta_n^{2k}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{t}{2s}}\left(\sum_n\xi_n^{2k}(t)\right)^{\frac{1}{2s}}M^{\frac{s+t-1}{2s}}.\quad(5.11)$$

Оценивая правую часть (5.11) с помощью теорем 3.1 и леммы 5.13, находим:

$$C_t \leqslant \left(2.88\left(\frac{2k}{e}\right)^k M\right)^{\frac{1}{2}-\frac{t}{2s}} \left(1.2c_5 M\left(\frac{9c_4 s^3 k}{\sqrt{L}}\right)^{2kt}\right)^{\frac{1}{2s}} M^{\frac{s+t-1}{2s}} <$$

$$< (2.88)^{\frac{1}{2}-\frac{t}{2s}} (1.2c_5)^{\frac{1}{2s}} \left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}\left(1-\frac{t}{s}\right)} \left(\frac{9c_4 s^3 k}{\sqrt{L}}\right)^{\frac{kt}{s}} M \leqslant$$

$$< 8.25 c_0^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}} \left\{\sqrt{\frac{e}{2k}}\,\frac{9c_4 s^3 k}{\sqrt{L}}\right\}^{\frac{kt}{s}} < 8.25 c_0^{\frac{1}{4}} M \left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{10.5 c_4 \sqrt{k} s^3}{\sqrt{L}}\right)^{\frac{kt}{s}}.$$

Лемма доказана.

Положим

$$\eta_n = \sum_{t=1}^{s-1} |\delta_n|^{s-t} \xi_n(t).$$

Лемма 5.15. *Пусть k- целое число, $1 \leqslant k \leqslant c_1 \sqrt[3]{L}$. Тогда справедлива оценка:*

$$\sum_n \eta_n^{\frac{k}{s}} < 8.3 c_0^{\frac{1}{4}} M \left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}} \left\{\frac{10.5 c_4 \sqrt{k} s^4}{\sqrt{L}}\right\}^{\frac{k}{s}}.$$

Доказательство. Из неравенства Гёльдера и очевидного соотношения

$$(a+b+\ldots+c)^{\frac{1}{s}} \leqslant a^{\frac{1}{s}} + b^{\frac{1}{s}} + \ldots + c^{\frac{1}{s}}, \quad a, b, \ldots, c \geqslant 0,$$

заключаем, что

$$\eta_n^k \leqslant (s-1)^{k-1} \sum_{t=1}^{s-1} |\delta_n|^{k(s-1)} \xi_n^k(t), \quad \eta_n^{\frac{k}{s}} \leqslant s^{\frac{k}{s}} \sum_{t=1}^{s-1} |\delta_n|^{\frac{k(s-t)}{s}} \big(\xi_n(t)\big)^{\frac{k}{s}}.$$

Полагая $q = \left\{\dfrac{10.5 c_4 \sqrt{k} s^3}{\sqrt{L}}\right\}^{k/s}$ и пользуясь оценкой леммы 5.14, будем иметь:

$$\sum_n \eta_n^{\frac{k}{s}} \leqslant s^{\frac{k}{s}} \sum_{t=1}^{s-1} 8.25 c_0^{\frac{1}{4}} M \left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}} q^t < 8.25 c_0^{\frac{1}{4}} M \left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{q s^{\frac{k}{s}}}{1-q} <$$

$$< 8.3 c_0^{\frac{1}{4}} M \left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}} \left\{\frac{10.5 c_4 \sqrt{k} s^4}{\sqrt{L}}\right\}^{\frac{k}{s}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.16. *Пусть k - целое число, $1 \leqslant k \leqslant c_1 \sqrt[3]{L}$. Тогда при любом r с условием $1 \leqslant r \leqslant k-1$ справедлива оценка:*

$$\sum_n |\delta_n|^{k-r} \eta_n^{\frac{r}{s}} < 1.7 M \big(4.9 c_0^{\frac{1}{4}}\big)^{\frac{r}{s}} \left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{10.5 c_4 s^4 \sqrt{k}}{\sqrt{L}}\right)^{\frac{r}{s}}.$$

Доказательство. Несложно проверить, что при $r = k$ искомая оценка следует из леммы 5.15. Поэтому далее считаем, что $1 \leqslant r \leqslant k-1$. Дважды применяя к сумме из условия леммы неравенство Гёльдера, получим:

$$\sum_n |\delta_n|^{k-r}\eta_n^{\frac{r}{s}} \leqslant \left(\sum_n \delta_n^{2k}\right)^{\frac{k-r}{2k}} \left(\sum_n \eta_n^{\frac{k}{s}\cdot\frac{2r}{k+r}}\right)^{\frac{k+r}{2k}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_n \delta_n^{2k}\right)^{\frac{k-r}{2k}} \left\{M^{\frac{k-r}{k+r}}\left(\sum_n \eta_n^{\frac{k}{s}}\right)^{\frac{2r}{k+r}}\right\}^{\frac{k+r}{2k}} = M^{\frac{k-r}{2k}}\left(\sum_n \delta_n^{2k}\right)^{\frac{k-r}{2k}}\left(\sum_n \eta_n^{\frac{k}{s}}\right)^{\frac{r}{k}}.$$

Оценивая последние суммы с помощью теоремы 3.1 и леммы 5.15, получим:

$$\sum_n |\delta_n|^{k-r}\eta_n^{\frac{r}{s}} \leqslant M^{\frac{k-r}{2k}}\left\{2.88\left(\frac{2k}{e}\right)^k M\right\}^{\frac{k-r}{2k}}\left\{8.3c_0^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}} M\left(\frac{10.5c_4 s^4\sqrt{k}}{\sqrt{L}}\right)^{\frac{k}{s}}\right\}^{\frac{r}{k}} =$$
$$= \sqrt{2.88}\, M\left(\frac{8.3c_0^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2.88}}\right)^{\frac{r}{k}}\left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}}\left(\frac{10.5c_4 s^4\sqrt{k}}{\sqrt{L}}\right)^{\frac{r}{s}} <$$
$$< 1.7M(4.9c_0^{\frac{1}{4}})^{\frac{r}{k}}\left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}}\left(\frac{10.5c_4 s^4\sqrt{k}}{\sqrt{L}}\right)^{\frac{r}{s}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.17. *Справедливо равенство:* $\delta_n\delta_{n+1}\dots\delta_{n+s-1} = \delta_n^s + \theta\eta_n$.

Доказательство. Из определения величин $\varepsilon_n(i)$ имеем:

$$\delta_n\delta_{n+1}\dots\delta_{n+s-1} = \delta_n(\delta_n+\varepsilon_n(1))(\delta_n+\varepsilon_n(2))\dots(\delta_n+\varepsilon_n(s-1)) =$$
$$= \delta_n^s + \sum_{t=1}^{s-1}\delta_n^{s-t}\sum_{0<i_1<\dots<i_t<s}\varepsilon_n(i_1)\dots\varepsilon_n(i_t) = \delta_n^s + \theta\cdot\sum_{t=1}^{s-1}|\delta_n|^{s-t}\xi_n(t) = \delta_n^s + \theta\eta_n.$$

Лемма доказана.

Положим $\kappa_n = |\delta_n\dots\delta_{n+s-1}|^{1/s}$.

Лемма 5.18. *Пусть E - любое из множеств E_s^+, E_s^-. Тогда для целого k с условием*

$$1 \leqslant k \leqslant \frac{L^{\frac{1}{2s+1}}}{136c_0^{3/5}}$$

справедливо равенство:

$$\sum_{n\in E}\kappa_n^k = \sum_{n\in E}|\delta_n|^k + 1180\theta M\varkappa(k)kc_0^{\frac{3}{4}}\left(\frac{k}{L}\right)^{\frac{1}{2s}}.$$

Доказательство. В силу леммы 5.17 имеем:

$$\kappa_n = \left|\delta_n^s + \theta_1\eta_n\right|^{\frac{1}{s}} = |\delta_n| + \theta_2\eta_n^{\frac{1}{s}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n\in E}\kappa_n^k \;=\; \sum_{n\in E}\bigl(|\delta_n|+\theta_2\eta_n^{\frac{1}{s}}\bigr)^k = \sum_{n\in E}|\delta_n|^k + \theta_3 R,$$

где

$$R=\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\sum_n |\delta_n|^{k-r}\eta_n^{\frac{r}{s}}.$$

Оценивая каждую из сумм по n в выражении для R с помощью леммы 5.16, находим:

$$R<1.7M\left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}}\sum_n\binom{k}{r}q^r<1.7M\left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}}kq(1+q)^k,$$

где

$$q \;=\; a^{\frac{1}{k}}b^{\frac{1}{s}}\left(\frac{k}{L}\right)^{\frac{1}{2s}},\quad a=4.9c_0^{\frac{1}{4}},\quad b=10.5c_4s^4.$$

Заметим теперь, что при любых $k\geqslant 1$ и $s\geqslant 2$ справедливы неравенства:

$$\begin{aligned}
&a^{\frac{2s}{k(2s+1)}}\leqslant a^{\frac{2s}{2s+1}}<4.9c_0^{\frac{2s}{2s+1}},\quad b^{\frac{2}{2s+1}}\;<\;27.6c_0^{\frac{2}{2s+1}},\\
&a^{\frac{2s}{k(2s+1)}}\cdot b^{\frac{2}{2s+1}}<136c_0^{\frac{s+4}{2(2s+1)}}\leqslant 136c_0^{\frac{3}{5}}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$k\leqslant\frac{L^{\frac{1}{2s+1}}}{136c_0^{3/5}}<a^{-\frac{2s}{k(2s+1)}}b^{-\frac{2}{2s+1}}L^{\frac{1}{2s+1}},$$

откуда

$$k^{2s+1}<a^{-\frac{2s}{k}}b^{-2}L,\quad k<a^{-\frac{1}{k}}b^{-\frac{1}{s}}\left(\frac{L}{k}\right)^{\frac{1}{2s}}$$

и, наконец,

$$q \;=\; a^{\frac{1}{k}}b^{\frac{1}{s}}\left(\frac{k}{L}\right)^{\frac{1}{2s}} \;<\; \frac{1}{k}.$$

Таким образом, $(1+q)^k<e$, так что

$$\begin{aligned}
R<1.7eM\left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}}ka^{\frac{1}{k}}b^{\frac{1}{s}}\left(\tfrac{k}{L}\right)^{\frac{1}{2s}}\leqslant\\
\leqslant 1.7eM\left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}}k\cdot 4.9c_0^{\frac{1}{4}}(10.5\cdot 8.7es^4)^{\frac{1}{s}}c_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{L}\right)^{\frac{1}{2s}}<\\
<1427.4Mk\left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}}c_0^{\frac{3}{4}}\left(\frac{k}{L}\right)^{\frac{1}{2s}}<1180Mk\,\varkappa(k)c_0^{\frac{3}{4}}\left(\frac{k}{L}\right)^{\frac{1}{2s}}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим $D_n=\frac{1}{2}\bigl(|\delta_n|+\delta_n\bigr),\quad d_n=\frac{1}{2}\bigl(|\delta_n|-\delta_n\bigr).$

Лемма 5.19. *Пусть k - целое число, $s \leqslant k \leqslant c_1 \sqrt[3]{L}$. Тогда справедливы соотношения:*

$$\sum_{n\in E_s^+} \delta_n^k = \sum_n D_n^k + \theta_1 R, \quad \sum_{n\in E_s^-} |\delta_n|^k = \sum_n d_n^k + \theta_2 R,$$

где

$$R = 614 c_4 c_0^{\frac{1}{2}} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}} \varkappa(k).$$

Доказательство. Согласно лемме 5.17, $\delta_n^s = \delta_n\delta_{n+1}\dots\delta_{n+s-1} - \theta_1\eta_n$, откуда

$$\delta_n^k = \delta_n^{k-s} \cdot \delta_n\delta_{n+1}\dots\delta_{n+s-1} + \theta_2|\delta_n|^{k-s}\eta_n. \tag{5.12}$$

Чтобы доказать первое соотношение, положим $D(n) = D_n \dots D_{n+s-1}$. Поскольку

$$D(n) = \begin{cases} \delta_n\delta_{n+1}\dots\delta_{n+s-1}, \text{ если } n \in E_s^+, \\ 0, \text{ если } n \notin E_s^+, \end{cases}$$

то, ввиду (5.12), получаем:

$$\sum_{n\in E_s^+} \delta_n^k = \sum_{n\in E_s^+} \left(\delta_n^{k-s} D(n) + \theta_2|\delta_n|^{k-s}\eta_n \right) = \sum_n \delta_n^{k-s} D(n) + \theta_3 \sum_n |\delta_n|^{k-s}\eta_n. \tag{5.13}$$

Далее, несложно заметить, что

$$D_{n+j} = \frac{1}{2}\big(|\delta_n + \varepsilon_n(j)| + (\delta_n + \varepsilon_n(j))\big) = \frac{1}{2}\big(|\delta_n| + \theta_4|\,\varepsilon_n(j)|\big) + \frac{1}{2}\big(\delta_n + \varepsilon_n(j)\big) = \\ = D_n + \theta_5|\,\varepsilon_n(j)|. \tag{5.14}$$

Следовательно,

$$D(n) = D_n(D_n + \theta'|\,\varepsilon_n(1)|)(D_n + \theta''|\,\varepsilon_n(2)|)\dots(D_n + \theta^{(s-1)}|\,\varepsilon_n(s-1)|) = \\ = D_n^s + \sum_{t=1}^{s-1} D_n^{s-t} \sum_{0<i_1<\dots<i_t<s} \theta^{(i_1)}\dots\theta^{(i_t)}|\,\varepsilon_n(i_1)\dots\varepsilon_n(i_t)| = \\ = D_n^s + \theta_6 \sum_{t=1}^{s-1} |\delta_n|^{s-t}\xi_n(t) = D_n^s + \theta_6\eta_n.$$

Возвращаясь к равенству (5.13), будем иметь:

$$\sum_{n\in E_s^+} \delta_n^k = \sum_n \delta_n^{k-s}(D_n^s + \theta_6\eta_n) + \theta_3 \sum_n |\delta_n|^{k-s}\eta_n = \sum_n \delta_n^{k-s} D_n^s + 2\theta_7 \sum_n |\delta_n|^{k-s}\eta_n.$$

Оценивая последнюю сумму с помощью леммы 5.12, находим:

$$\sum_n |\delta_n|^{k-s}\eta_n = \sum_{t=1}^{s-1}\sum_n |\delta_n|^{k-t}\xi_n(t) < 372 c_4 c_0^{\frac{1}{2}} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}} \left(\frac{2k}{e}\right)^{\frac{k}{2}} < 307 c_4 c_0^{\frac{1}{2}} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}}\ \varkappa(k).$$

Замечая, наконец, что $\delta_n^{k-s} D_n^s = D_n^k$, приходим к первому утверждению леммы. Второе утверждение доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 5.20. *Пусть $1 \leqslant k < s$. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k = \sum_n D_n^k + \theta_1 R, \quad \sum_{n \in E_s^-} |\delta_n|^k = \sum_n d_n^k + \theta_2 R,$$

где

$$R = 3\sqrt{e} s \, \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \, M \, \frac{(\log\log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}}.$$

Доказательство. Докажем первое соотношение (второе получается аналогично). Пусть A - множество тех n, $N < n \leqslant N + M$, для которых $\delta_{n+k} \dots \delta_{n+s-1} \neq 0$. Для $n \in A$ положим

$$D(n) = D_n D_{n+1} \dots D_{n+k-1} \, \frac{D_{n+k}}{\delta_{n+k}} \dots \frac{D_{n+s-1}}{\delta_{n+s-1}},$$

так что

$$D(n) = \begin{cases} \delta_n \dots \delta_{n+k-1}, & \text{если } \ n \in E_s^+, \\ 0, & \text{если } \ n \in A \backslash E_s^+. \end{cases}$$

Если $k = 1$, то имеем, очевидно:

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n = \sum_{n \in A} D(n). \tag{5.15}$$

В случае $k \geqslant 2$, пользуясь леммой 5.17, приходим к равенству

$$\delta_n \dots \delta_{n+k-1} = \delta_n^k + \theta_1 \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t),$$

из которого при $n \in E_s^+$ заключаем:

$$D(n) = \delta_n^k + \theta_1 \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t).$$

Применяя оценку леммы 5.12, будем иметь:

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k = \sum_{n \in E_s^+} \left(D(n) - \theta_1 \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t) \right) =$$

$$= \sum_{n \in A} D(n) + 18 \theta_2 c_0 \sqrt{c_1} \, \frac{M s^3}{\sqrt{L}} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2}. \tag{5.16}$$

Сравнивая (5.15) и (5.16), убеждаемся, что формула (5.16) верна и в случае $k = 1$ (при $\theta_2 = 0$).

Чтобы заменить сумму по $n \in A$ суммою по всем n, $N < n \leqslant N + M$, покажем сперва, что при любых $n, r \geqslant 1$ имеет место равенство:

$$D_n \frac{D_{n+1}}{\delta_{n+1}} \dots \frac{D_{n+r}}{\delta_{n+r}} = D_n + \theta \sum_{i=1}^{r} |\,\varepsilon_n(i-1,i)|. \tag{5.17}$$

Действительно, пусть сначала $r = 1$. Если $\delta_{n+1} > 0$, то

$$D_n \frac{D_{n+1}}{\delta_{n+1}} = D_n; \tag{5.18}$$

если же $\delta_{n+1} < 0$, то из равенства (5.14) следует, что

$$D_n \frac{D_{n+1}}{\delta_{n+1}} = 0 = D_{n+1} = D_n + \theta |\,\varepsilon_n(0,1)|. \tag{5.19}$$

Допустим теперь, что равенство (5.17) доказано для $r = 1, \dots, j$ и проверим его справедливость в случае $r = j+1$. Пользуясь предположением индукции, получаем:

$$D_n \frac{D_{n+1}}{\delta_{n+1}} \dots \frac{D_{n+j}}{\delta_{n+j}} \frac{D_{n+j+1}}{\delta_{n+j+1}} = \left(D_n + \theta_1 \sum_{i=1}^{j} |\,\varepsilon_n(i-1,i)| \right) \cdot \frac{D_{n+j+1}}{\delta_{n+j+1}}. \tag{5.20}$$

Если $\delta_{n+j+1} > 0$, то правая часть (5.20) совпадает с

$$D_n + \theta_1 \sum_{i=1}^{j} |\,\varepsilon_n(i-1,i)| = D_n + \theta_2 \sum_{i=1}^{j+1} |\,\varepsilon_n(i-1,i)|, \quad 0 \leqslant \theta_2 \leqslant \theta_1.$$

Если же $\delta_{n+j+1} < 0$, то $D_{n+j+1} = 0$ и правая часть (5.20) совпадает с

$$D_{n+j+1} = D_n + \theta_1 |\,\varepsilon_n(0, j+1)| = D_n + \theta_2 \sum_{i=1}^{j+1} |\,\varepsilon_n(i-1,i)|.$$

Формула (5.17) доказана.

Предположим, что $k \geqslant 2$. Полагая $r = s - 1$ и заменяя n на $n + k - 1$ в (5.17), получим:

$$\begin{aligned} D(n) = D_n \dots D_{n+k-2} \cdot D_{n+k-1} \frac{D_{n+k}}{\delta_{n+k}} \dots \frac{D_{n+s-1}}{\delta_{n+s-1}} = \\ = D_n \dots D_{n+k-2} \left(D_{n+k-1} + \theta_3 \sum_{i=1}^{s-k} |\,\varepsilon_{n+k-1}(i-1,i)| \right) = \\ = D_n \dots D_{n+k-1} + \theta_4 |\delta_n \dots \delta_{n+k-2}| \sum_{i=k}^{s-1} |\,\varepsilon_n(i-1,i)|. \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством (5.14), найдём:

$$\begin{aligned} D_n \dots D_{n+k-1} = D_n (D_n + \theta^{(1)} |\,\varepsilon_n(1)|) \dots (D_n + \theta^{(k-1)} |\,\varepsilon_n(k-1)|) = \\ = D_n^k + \sum_{t=1}^{k-1} D_n^{k-t} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_t < k} \theta^{(i_1)} \dots \theta^{(i_t)} |\,\varepsilon_n(i_1) \dots \varepsilon_n(i_t)| = \\ = D_n^k + \theta_5 \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_t < k} |\,\varepsilon_n(i_1) \dots \varepsilon_n(i_t)| = D_n^k + \theta_5 \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t). \end{aligned}$$

Далее, замечая, что

$$|\delta_n \dots \delta_{n+k-2}| \leqslant \frac{1}{k-1} \sum_{j=0}^{k-2} |\delta_{n+j}|^{k-1},$$

будем иметь:

$$D(n) = D_n^k + \theta_6 \left(\frac{1}{k-1} \sum_{i=k}^{s-1} \sum_{j=0}^{k-2} |\delta_{n+j}|^{k-1} |\, \varepsilon_n(i-1,i)| + \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t) \right). \tag{5.21}$$

Если же $k = 1$, то в силу (5.18),(5.19) имеем:

$$D(n) = D_n + \theta_7 |\, \varepsilon_n(0,1)|. \tag{5.22}$$

Суммируя обе части (5.21),(5.22) по $n \in A$ и пользуясь оценками лемм 5.10 - 5.12, получим:

$$\sum_{n \in A} D(n) = \sum_{n \in A} D_n^k + \theta_8 R_k, \tag{5.23}$$

где

$$R_1 \leqslant \sum_n |\, \varepsilon_n(0,1)| \leqslant 1.2 c_5 \frac{4.5 c_4 s M}{\sqrt{L}} = \frac{5.4 c_4 c_5 s M}{\sqrt{L}},$$

и

$$R_k \leqslant \frac{1}{k-1} \sum_{i=k}^{s-1} \sum_{j=0}^{k-2} \sum_n |\delta_{n+j}|^{k-1} |\, \varepsilon_n(i-1,i)| + \sum_{t=1}^{k-1} \sum_n |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k-1} (s-k)(k-1) \cdot 68 \sqrt{c_0}\, M \left(\frac{2(k-1)}{e} \right)^{\frac{k-1}{2}} \frac{9 c_1 s^2}{\sqrt{L}} + 372 c_4 \sqrt{c_0} \left(\frac{2k}{e} \right)^{\frac{k}{2}} \frac{M s^3}{\sqrt{L}} \leqslant$$

$$\leqslant s \cdot 68 \sqrt{c_0}\, \frac{M}{\sqrt{2}} \left(\frac{2k}{e} \right)^{\frac{k}{2}} \frac{9 c_4 s^2}{\sqrt{L}} + 372 c_4 \sqrt{c_0} \left(\frac{2k}{e} \right)^{\frac{k}{2}} \frac{M s^3}{\sqrt{L}} \leqslant$$

$$\leqslant 433 c_4 \sqrt{c_0} \left(\frac{2k}{e} \right)^{\frac{k}{2}} \frac{M s^3}{\sqrt{L}} + 372 c_4 \sqrt{c_0} \left(\frac{2k}{e} \right)^{\frac{k}{2}} \frac{M s^3}{\sqrt{L}} = 805 c_4 \sqrt{c_0} \left(\frac{2k}{e} \right)^{\frac{k}{2}} \frac{M s^3}{\sqrt{L}},$$

если $k \geqslant 2$. Замечая, что $805 c_4 \sqrt{c_0} < 0.03 c_4 c_5$ при $\varepsilon < 10^{-3}$, и что $5.4 < 6.3 \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2}$ при $k = 1$, окончательно находим:

$$R_k \leqslant 6.3 c_4 c_5 \left(\frac{2k}{e} \right)^{\frac{k}{2}} \frac{M s^3}{\sqrt{L}}$$

при любом k, $1 \leqslant k \leqslant s-1$.

Определим, наконец, множество B как дополнение к A до множества всех номеров n, $N < n \leqslant N + M$. Тогда B совпадает со множеством всех n из указанного промежутка, для которых $\delta_{n+k} \dots \delta_{n+s-1} = 0$. Применяя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 5.9, заключаем, что число элементов B не превосходит правой части (5.8).

Зададимся теперь некоторым числом $a > 0$. Тогда, применяя неравенство Гёльдера, будем иметь:

$$\sum_{n\in B} D_n^k \leqslant \sum_{n\in B} |\delta_n|^k \leqslant \left(\sum_n |\delta_n|^{ak}\right)^{\frac{1}{a}} \left(\sum_{n\in B} 1\right)^{1-\frac{1}{a}}.$$

Предполагая условие $ak = o(\sqrt[3]{L})$ выполненным, применим теорему 3.2. Получим:

$$\sum_{n\in B} D_n^k \leqslant \left\{\frac{\varkappa(ak)}{2^{ak/2}}\, M\left(1+\frac{131.6}{\sqrt{\log L}}\right)\right\}^{\frac{1}{a}} \left\{\frac{3.59sM}{\sqrt{\log L}}\right\}^{1-\frac{1}{a}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sqrt{2}\cdot 2^{-\frac{ak}{2}} \left(\frac{2ak}{e}\right)^{\frac{ak}{2}} \left(1+\frac{131.6}{\sqrt{\log L}}\right)\right\}^{\frac{1}{a}} \left\{\frac{3.59s}{\sqrt{\log L}}\right\}^{1-\frac{1}{a}} M <$$

$$< \left\{\frac{3}{2}\left(\frac{ak}{e}\right)^{\frac{ak}{2}}\right\}^{\frac{1}{a}} \cdot (3.59s)^{1-\frac{1}{a}} (\log L)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)} < 2.99sM\, \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, a^{\frac{k}{2}} \left(\sqrt{\log L}\right)^{-\left(1-\frac{1}{a}\right)}.$$

Полагая теперь $a = \dfrac{1}{k}\log\log L$, получим:

$$a^{\frac{k}{2}} \left(\sqrt{\log L}\right)^{-\left(1-\frac{1}{a}\right)} = \left(\frac{e}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{(\log\log L)^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\log L}},$$

$$\sum_{n\in B} D_n^k < 2.99sM\, \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \left(\frac{e}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{(\log\log L)^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\log L}} < 2.99\sqrt{e}\, sM\, \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, \frac{(\log\log L)^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\log L}}. \quad (5.24)$$

Итак, замена условия $n \in A$ в правой части (5.23) условием $N < n \leqslant N + M$ приводит к ошибке, не превосходящей по абсолютной величине правой части (5.24). Так находим:

$$\sum_{n\in E_s^+} \delta_n^k = \sum_n D_n^k + \theta_9 \left(R_k + 2.99\sqrt{e}\, sM\, \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, \frac{(\log\log L)^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\log L}}\right) =$$

$$= \sum_n D_n^k + 3\sqrt{e}\,\theta_{10} sM\, \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, \frac{(\log\log L)^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\log L}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.21. *Пусть r - чётное число с условием $2 \leqslant r \leqslant \frac{1}{8}\cdot 10^{-5}\log\log\log N$. Тогда справедлива оценка:*

$$\left|\sum_n \delta_n^{r-1}|\delta_n|\right| < M\, \frac{\varkappa(r)}{2^{r/2}}\, \frac{1205}{\sqrt{\log L}}.$$

Доказательство. Положим

$$\lambda = \frac{1}{4\sqrt{e}}\sqrt{10^{-5}\log L + 4}, \quad K = \left[4e\lambda^2\right] + 1,$$

так что $K > \frac{1}{4}\cdot 10^{-5}\log L$ и $r \leqslant \frac{1}{2}K$. Пользуясь тождеством

$$\delta_n^{r-1}|\delta_n| \;=\; \frac{2}{\pi}\,\delta_n^{r-1}\biggl(\int_0^{\lambda} + \int_{\lambda}^{+\infty}\biggr)\biggl(\frac{\sin(\delta_n u)}{u}\biggr)^2 du \;= \\ = \frac{2}{\pi}\,\delta_n^{r-1}\biggl(\int_0^{\lambda}\biggl(\frac{\sin(\delta_n u)}{u}\biggr)^2 du + \frac{\theta_1}{\lambda}\biggr)$$

наряду с разложением

$$\sin^2 x = \sum_{\nu=1}^{K}(-1)^{\nu-1}\,\frac{2^{2\nu-1}x^{2\nu}}{(2\nu)!} \;+\; \frac{\theta_2}{2}\,\frac{(2x)^{2K+2}}{(2K+2)!},$$

сумму из условия леммы представим в виде

$$\frac{2}{\pi}\sum_n \delta_n^{r-1}\int_0^{\lambda}\frac{1}{u^2}\biggl\{\sum_{\nu=1}^{K}(-1)^{\nu-1}\frac{2^{2\nu-1}u^{2\nu}}{(2\nu)!}\,\delta_n^{2\nu} + \frac{\theta_3}{2}\,\frac{(2u\delta_n)^{2K+2}}{(2K+2)!}\biggr\}du + \\ + \frac{2\theta_4}{\pi\lambda}\sum_n |\delta_n|^{r-1} = R_1 + \theta_5(R_2+R_3),$$

где

$$R_1 = \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{K}\frac{(2\lambda)^{2\nu-1}}{(2\nu-1)(2\nu)!}\,|R_1(2\nu+r-1)|,$$
$$R_2 = \frac{4}{\pi}\,\frac{(2\lambda)^{2K+1}}{(2K+1)(2K+2)!}\,R_2(2K+r+1), \quad R_3 = \frac{2}{\pi\lambda}\,R_2(r-1),$$

а символы $R_j(m)$ обозначают, соответственно, суммы

$$\sum_n \delta_n^m, \quad \sum_n |\delta_n|^m.$$

Оценим величины R_1, R_2 и R_3.

Прежде всего, пользуясь неравенством

$$\biggl|\sum_n \delta_n^{2k-1}\biggr| \;<\; \frac{2\pi k c_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\,M\biggl(\frac{2k}{e}\biggr)^k,$$

которое следует из теоремы 3.1 при $1 \leqslant k \leqslant c_1\sqrt[3]{L}$, для любого ν с условием $1 \leqslant \nu \leqslant K$ находим:

$$|R_1(2\nu+r-1)| < \frac{2\pi c_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}M\biggl(\nu+\frac{r}{2}\biggr)\biggl\{\frac{2}{e}\biggl(\nu+\frac{r}{2}\biggr)\biggr\}^{\nu+\frac{r}{2}} = \\ = \frac{2\pi c_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\biggl(\frac{2\nu}{e}\biggr)^{\nu} M\biggl\{\biggl(1+\frac{r}{2\nu}\biggr)^{\frac{2\nu}{r}}\biggr\}^{\frac{r}{2}}\biggl\{\frac{1}{e}\biggl(\nu+\frac{r}{2}\biggr)\biggr\}^{\frac{r}{2}}\biggl(\nu+\frac{r}{2}\biggr) \leqslant \\ \leqslant \frac{2\pi c_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\biggl(\frac{2\nu}{e}\biggr)^{\nu} M\,e^{\frac{r}{2}}\biggl\{\frac{2K}{e}\biggr\}^{\frac{r}{2}}\cdot 2K = \frac{4\pi c_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\biggl(\frac{2\nu}{e}\biggr)^{\nu} M\,(2K)^{\frac{r}{2}}K.$$

Принимая во внимание оценку

$$\left(\frac{2\nu}{e}\right)^{\nu} \leqslant 2^{-\nu}\,\frac{2}{e}\,\frac{(2\nu)!}{\nu!},$$

получим:

$$R_1 \leqslant \frac{2}{\pi}\,\frac{4\pi c_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{L}}\,M\,(2K)^{\frac{r}{2}}K\sum_{\nu=1}^{K}2^{-\nu}\,\frac{(2\lambda)^{2\nu-1}}{(2\nu)!}\,\frac{(2\nu)!}{\nu!}\,\frac{2}{e}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{8c_0^{\frac{3}{2}}}{\lambda e\sqrt{L}}\,M\,(2K)^{\frac{r}{2}}K\sum_{\nu=1}^{K}\frac{(2\lambda^2)^{\nu}}{\nu!} \;<\; \frac{8c_0^{\frac{3}{2}}}{\lambda e\sqrt{L}}\,M\,(2K)^{\frac{r}{2}}K\,e^{2\lambda^2}.$$

Далее, пользуясь формулой Стирлинга для гамма-функции, находим:

$$\varkappa(2K+r+1) = \frac{2^{2K+r+1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(K+\frac{r}{2}+1\right) \leqslant 2\sqrt{2}\cdot 2^{2K+r}\sqrt{K+\frac{r}{2}}\left\{\frac{1}{e}\left(K+\frac{r}{2}\right)\right\}^{K+\frac{r}{2}}e^{\frac{1}{12K}}$$

$$< 3\cdot 2^{2K+r}\sqrt{\frac{5K}{4}}\left(\frac{K}{e}\right)^{K}\left(1+\frac{r}{2K}\right)^{K}\left\{\frac{1}{e}\left(K+\frac{r}{2}\right)\right\}^{\frac{r}{2}} <$$

$$< 4\sqrt{K}\left(\frac{4K}{e}\right)^{K}\cdot 2^{r}\,e^{\frac{r}{2}}\left\{\frac{5K}{4e}\right\}^{\frac{r}{2}} = 4\sqrt{K}\left(\frac{4K}{e}\right)^{K}(5K)^{\frac{r}{2}}.$$

Замечая теперь, что

$$2K+r+1 \leqslant \frac{1}{2}\cdot 10^{-5}\log L + \frac{1}{8}\cdot 10^{-5}\log L + 1 < 10^{-5}\log L,$$

из теоремы 3.2 получаем следующие оценки:

$$R_2(2K+r+1) < \frac{\varkappa(2K+r+1)}{2^{K+(r+1)/2}}\,M\left(1+\frac{131.6}{\sqrt{\log L}}\right) < 3\sqrt{K}\left(\frac{5K}{2}\right)^{\frac{r}{2}}M\left(\frac{2K}{e}\right)^{K},$$

$$R_2 \leqslant \frac{4}{\pi}\,\frac{(2\lambda)^{2K+1}}{(2K+1)(2K+2)!}\cdot 3\sqrt{K}\left(\frac{5K}{2}\right)^{\frac{r}{2}}M\left(\frac{2K}{e}\right)^{K} <$$

$$< \frac{1}{\pi}\,\frac{\lambda\sqrt{K}}{K^3}\,\frac{(2\lambda)^{2K}}{(2K)!}\left(\frac{5K}{2}\right)^{\frac{r}{2}}M\left(\frac{2K}{e}\right)^{K} < \left(\frac{5K}{2}\right)^{\frac{r}{2}}\left(\frac{2e\lambda^2}{K}\right)^{K}M < \left(\frac{5K}{2}\right)^{\frac{r}{2}}\cdot 2^{-K}M.$$

Вновь пользуясь теоремой 3.2 и замечая, что при чётном $r \geqslant 2$ справедливы оценки

$$\varkappa(r-1) = \frac{2^r}{r\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) \leqslant \frac{2^r}{r\sqrt{\pi}}\sqrt{2\pi\cdot\frac{r}{2}}\left(\frac{r}{2e}\right)^{\frac{r}{2}}e^{\frac{1}{6r}} \leqslant \frac{e^{\frac{1}{6r}}}{\sqrt{r}}\left(\frac{2r}{e}\right)^{\frac{r}{2}},$$

находим:

$$R_3 \leqslant \frac{2}{\pi\lambda}\cdot\frac{\varkappa(r-1)}{2^{(r-1)/2}}\,M\left(1+\frac{131.6}{\sqrt{\log L}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\pi\lambda}\,\frac{e^{\frac{1}{6r}}}{\sqrt{r}}\left(\frac{r}{e}\right)^{\frac{r}{2}}M\left(1+\frac{131.6}{\sqrt{\log L}}\right) < \frac{2.2}{\pi\lambda}\left(\frac{r}{e}\right)^{\frac{r}{2}}M.$$

Сложив полученные выше оценки R_1, R_2 и R_3, заключаем, что сумма из условия леммы не превосходит по абсолютной величине

$$\frac{2.2}{\pi\lambda}\left(\frac{r}{e}\right)^{\frac{r}{2}} M + \left(\frac{5K}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \cdot 2^{-K} M + \frac{8c_0^{\frac{3}{2}}}{\lambda e\sqrt{L}}\, M\,(2K)^{\frac{r}{2}} K\, e^{2\lambda^2} =$$

$$= M\left(\frac{r}{e}\right)^{\frac{r}{2}}\left\{\frac{2.2}{\pi\lambda} + 2^{-K}\left(\frac{5eK}{2r}\right)^{\frac{r}{2}} + \frac{8c_0^{\frac{3}{2}} K}{\lambda e\sqrt{L}}\left(\frac{2eK}{r}\right)^{\frac{r}{2}} e^{2\lambda^2}\right\}. \quad (5.25)$$

Несложно заметить, что дробь $\big(A/u\big)^u$ возрастает при изменении u на промежутке $1 \leqslant u \leqslant A/e$ $(A > e)$. Следовательно, из условия $1 < r \leqslant K/2$ заключаем, что наибольшее значение выражения $\left(\dfrac{5eK}{2r}\right)^{r/2}$ не превосходит

$$(5e)^{\frac{K}{4}} \;=\; \exp\left\{\frac{K}{4}\,\log(5e)\right\}.$$

Таким образом, второе слагаемое в фигурных скобках в (5.25) не превосходит

$$\exp\left\{\frac{K}{4}\,\log(5e) - K\log 2\right\} \leqslant \exp\big\{K(0.653 - 0.693)\big\} = \exp\left\{-\frac{K}{25}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{4}\cdot 10^{-5}\log L\right\} = L^{-10^{-7}}.$$

Рассуждая аналогично и замечая, что $\lambda < \sqrt{\dfrac{K}{4e}}$, третье слагаемое в (5.25) оценим сверху величиною

$$\frac{8c_0^{\frac{3}{2}} K}{\lambda e\sqrt{L}}\,(4e)^{\frac{K}{4}}\, e^{2\lambda^2} < \frac{8c_0^{\frac{3}{2}} K}{\lambda e\sqrt{L}}\,(4e)^{\frac{K}{4}}\, e^{\frac{K}{2e}} < \frac{8c_0^{\frac{3}{2}} K}{\lambda e\sqrt{L}}\,\exp\left\{\frac{K}{4}\,\log(4e) + \frac{K}{2e}\right\} <$$

$$< \frac{\exp\big\{0.8K\big\}}{\sqrt{L}} < L^{-0.4}.$$

Таким образом, исходная сумма не превосходит по абсолютной величине

$$M\left(\frac{r}{e}\right)^{\frac{r}{2}}\left\{\frac{2.2}{\pi\lambda} + L^{-10^{-7}} + L^{-0.4}\right\} <$$

$$< M\left(\frac{r}{e}\right)^{\frac{r}{2}} \cdot \frac{2.2}{\pi}\,\frac{4\sqrt{e}}{\sqrt{10^{-5}\log L}} < \frac{1461}{\sqrt{\log L}}\, M\left(\frac{r}{e}\right)^{\frac{r}{2}} < \frac{1205}{\sqrt{\log L}}\, M\,\frac{\varkappa(r)}{2^{r/2}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.22. *Пусть k - целое число с условием $1 \leqslant k \leqslant \frac{1}{8}\cdot 10^{-5}\log L$; пусть, далее, E - любое из множеств E_s^+, E_s^-, и пусть $|E|$ - число элементов E, отвечающих условию $N < n \leqslant N + M$. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{n\in E} \varkappa_n^k \;=\; \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\,|E|\big(1 + \theta\, R\big), \quad R = 5(2c_4 + 1)\,\frac{s(\log\log L)^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\log L}}.$$

Доказательство. Рассмотрим лишь $E = E_s^+$, так как в случае, когда $E = E_s^-$ доказательство проводится аналогично. Прежде всего, согласно лемме 5.18 имеем:

$$\sum_{n\in E_s^+} \kappa_n^k \;=\; \sum_{n\in E_s^+} \delta_n^k \;+\; \theta_1 R_1, \quad R_1 = 1180k\,\varkappa(k) c_0^{\frac{3}{4}}\, M \left(\frac{k}{L}\right)^{\frac{1}{2s}}. \tag{5.26}$$

Далее, из лемм 5.19, 5.20 следует равенство

$$\sum_{n\in E_s^+} \delta_n^k \;=\; S \;+\; \theta_2 R_2, \tag{5.27}$$

в котором

$$S = \sum_n D_n^k, \quad R_2 = 3\sqrt{e}\, Ms\, \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, \frac{(\log\log L)^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\log L}}. \tag{5.28}$$

Воспользовавшись тождеством

$$D_n^k \;=\; \frac{1}{2}\left(\delta_n^k \;+\; |\delta_n|\cdot\delta_n^{k-1}\right),$$

получим:

$$S \;=\; \frac{1}{2}\left(S_1 + S_2\right), \quad S_1 = \sum_n \delta_n^k, \quad S_2 = \sum_n |\delta_n|\cdot\delta_n^{k-1}.$$

Предположим сперва, что k - чётное число, $k = 2r$. Тогда в силу теоремы 3.1 имеем:

$$S_1 = \sum_n \delta_n^{2r} = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, M \;+\; \theta_3 R_3,$$

$$R_3 = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, \frac{4.3(c_0 r)^{\frac{3}{2}} M}{\sqrt{L}} < \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, \frac{1.6(c_0 k)^{\frac{3}{2}} M}{\sqrt{L}}.$$

Далее, из леммы 5.21 следует оценка

$$|S_2| = \left|\sum_n |\delta_n|\cdot\delta_n^{k-1}\right| < \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, \frac{1205M}{\sqrt{\log L}}.$$

Таким образом,

$$S \;=\; \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, \frac{M}{2} \;+\; \theta_4 R_4,$$

$$R_4 \;=\; \frac{1}{2}\left\{ \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, \frac{1.6(c_0 k)^{\frac{3}{2}} M}{\sqrt{L}} \;+\; \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, \frac{1205M}{\sqrt{\log L}} \right\} < \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, \frac{603M}{\sqrt{\log L}}. \tag{5.29}$$

Рассмотрим теперь случай нечётного k, $k = 2r-1$. Из теорем 3.1, 3.2 заключаем:

$$|S_1| = \left|\sum_n \delta_n^{2r-1}\right| < \left(\frac{2r}{e}\right)^r \frac{2\pi r c_0^{\frac{3}{2}} M}{\sqrt{L}} = \left(\frac{k+1}{e}\right)^{\frac{k+1}{2}} \frac{\pi(k+1) c_0^{\frac{3}{2}} M}{\sqrt{L}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{k}{e}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{\pi\big(c_0(k+1)\big)^{\frac{3}{2}} M}{\sqrt{L}} < \frac{\pi\sqrt{e}}{2}\, \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, \frac{\big(c_0(k+1)\big)^{\frac{3}{2}} M}{\sqrt{L}},$$

$$S_2 = \sum_n |\delta_n|\cdot\delta_n^{2r-2} = \sum_n |\delta_n|^k = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, M + \theta_5 R_5, \quad R_5 = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, \frac{131.6M}{\sqrt{\log L}}.$$

Следовательно,

$$S = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{M}{2} + \theta_6 R_6,$$

$$R_6 = \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi\sqrt{e}}{2}\frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{\big(c_0(k+1)\big)^{\frac{3}{2}}M}{\sqrt{L}} + \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{131.6M}{\sqrt{\log L}}\right\} < \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{66M}{\sqrt{\log L}}. \quad (5.30)$$

Сравнивая (5.29) и (5.30), убеждаемся, что равенство

$$S = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{M}{2} + \theta_7 R_7, \quad R_7 = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{603M}{\sqrt{\log L}} \quad (5.31)$$

имеет место как при чётных, так и при нечётных k.

Пользуясь теоремой 5.1 и заменяя в (5.31) величину $\frac{M}{2}$ суммою

$$|E| + 5\theta c_4 \frac{s^2 M \log\log L}{\sqrt{\log L}},$$

находим:

$$S = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}|E| + \theta_7 R_7 + \theta_8 R_8, \quad R_8 = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\cdot 5c_4\frac{s^2 M\log\log L}{\sqrt{\log L}},$$

$$\sum_{n\in E_s^+}\delta_n^k = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}|E| + \theta_2 R_2 + \theta_7 R_7 + \theta_8 R_8$$

и, наконец,

$$\sum_{n\in E_s^+}\kappa_n^k = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}|E| + \theta_1 R_1 + \theta_2 R_2 + \theta_7 R_7 + \theta_8 R_8.$$

Суммируя полученные выше оценки, получаем:

$$\left|\sum_{j=1,2,7,8}\theta_j R_j\right| <$$

$$< \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} M\left\{539 c_0^{\frac{3}{4}} k\, 2^{\frac{k}{2}}\left(\frac{k}{L}\right)^{\frac{1}{2s}} + 3\sqrt{e}\,\frac{s(\log\log L)^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\log L}} + \frac{603}{\sqrt{\log L}} + 5c_4\frac{s^2\log\log L}{\sqrt{\log L}}\right\} <$$

$$< 5(2c_4+1)\frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{s|E|(\log\log L)^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\log L}}.$$

Лемма доказана.

Теорема 5.2. *Пусть $s\geqslant 2$ - фиксированное целое число, E - любое из множеств E_s^+, E_s^-. Тогда при любом $x>0$ число $E(x)$ номеров n, $N<n\leqslant N+M$, принадлежащих E и отвечающих условию*

$$0 < \left|\Delta_n \ldots \Delta_{n+s-1}\right| \leqslant \left(\frac{1}{\pi}\sqrt{x\log\log N}\right)^s,$$

выражается формулой

$$E(x) \;=\; \frac{M}{2}\biggl\{\int_0^x \frac{e^{-u}\,du}{\sqrt{\pi u}} \;+\; \frac{2.15\theta}{\sqrt{\log\log\log\log N}}\biggr\}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ - характеристическая функция, отвечающая распределению

$$F(x) \;=\; \frac{1}{M}\cdot\bigl\{n\,|\,n\in E, \kappa_n\leqslant x\bigr\}$$

дискретной случайной величины $\kappa : E\mapsto\mathbb{R}$ со значениями κ_n, $n\in E$. Тогда, полагая

$$\delta = 10^{-4},\quad \lambda=\sqrt{(1-\delta)\log\log L},\quad K=\bigl[2e\lambda^2\bigr]+1,$$

будем иметь:

$$\varphi(t) = |E|^{-1}\sum_{n\in E} e^{it\kappa_n} = |E|^{-1}\sum_{n\in E}\biggl\{\sum_{k=0}^{K}\frac{(it\kappa_n)^k}{k!} + 2\theta_1\,\frac{(|t|\kappa_n)^{K+1}}{(K+1)!}\biggr\}. \tag{5.32}$$

Меняя в (5.32) порядок суммирования и пользуясь формулой леммы 5.22 в виде

$$\sum_{n\in E}\kappa_n^k = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\,|E|\bigl(1\;+\;\theta^{(k)}R\bigr),\quad R=\frac{5(2c_4+1)s(\log\log L)^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\log L}},\quad \theta^{(0)}=0,$$

находим:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{K}\frac{(it)^k}{k!}\,|E|^{-1}\sum_{n\in E}\kappa_n^k + \frac{2\theta_2|t|^{K+1}}{(K+1)!}\,|E|^{-1}\sum_{n\in E}\kappa_n^{K+1} =$$
$$= \varphi_1(t) + 2\theta_3\bigl(\varphi_2(t)+\varphi_3(t)\bigr),$$

где

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=0}^{K}\frac{1}{k!}\biggl(\frac{it}{\sqrt{2}}\biggr)^k\varkappa(k),\quad \varphi_2(t)=\frac{\varkappa(K+1)}{(K+1)!}\,\biggl(\frac{|t|}{\sqrt{2}}\biggr)^{K+1},$$
$$\varphi_3(t) = R\sum_{k=1}^{K+1}\frac{\varkappa(k)}{k!}\,\biggl(\frac{|t|}{\sqrt{2}}\biggr)^k.$$

Преобразуя $\varphi_1(t)$ с помощью тождества

$$\varkappa(k) \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\,u^2}(2u)^{2k}\,du,$$

находим:

$$\varphi_1(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\,u^2}\sum_{k=0}^{K}\frac{(itu\sqrt{2})^k}{k!}\,du =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\,u^2}\biggl\{e^{itu\sqrt{2}} + 2\theta_4\,\frac{(|t|u\sqrt{2})^{k+1}}{(K+1)!}\biggr\}\,du =$$
$$= \psi(t) + \frac{2\theta_5}{(K+1)!}\biggl(\frac{|t|}{\sqrt{2}}\biggr)^{K+1}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\,u^2}(2u)^{K+1}\,du = \psi(t) + 2\theta_5\,\varphi_2(t),$$

где

$$\psi(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2+itu\sqrt{2}}\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{v^2}{2}+itv}\,dv$$

- характеристическая функция, отвечающая распределению $H(x)$ с плотностью

$$h(u)=\begin{cases}0, & \text{если } u<0,\\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,e^{-\frac{u^2}{2}}, & \text{если } u\geqslant 0.\end{cases}$$

Положим

$$I(\lambda)\;=\;\int_0^{\lambda}\frac{|\,\varphi(t)-\psi(t)|}{|t|}\,dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned}I(\lambda)&\leqslant\frac{4}{K+1}\,\frac{\varkappa(K+1)}{(K+1)!}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^{K+1}+2R\sum_{k=1}^{K+1}\frac{\varkappa(k)}{k!}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^{k}<\\ &<\frac{4}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\lambda}{K^2}\left(\frac{e\lambda^2}{K}\right)^{\frac{K}{2}}+2R\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\sum_{k=1}^{K+1}\frac{1}{k!}\left(2u\cdot\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^{k}du<\\ &<2^{-\frac{K}{2}}+2R\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2+u\lambda\sqrt{2}}\,du=2^{-\frac{K}{2}}+4Re^{\frac{\lambda^2}{2}}<\\ &<L^{-1.8}+4\cdot\frac{5(2c_4+1)s(\log\log L)^{\frac{s}{2}}}{(\log L)^{\delta/2}}<(\log L)^{-\frac{\delta}{3}}.\end{aligned}$$

Замечая, что $\sup\limits_u|h'(u)|=\sqrt{\dfrac{2}{\pi e}}$ и применяя лемму 7.П, приходим к неравенству

$$\sup_x\bigl|F(x)\;-\;H(x)\bigr|\leqslant\frac{a}{\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi e}}\;+\;bI(\lambda)<\frac{2.15}{\sqrt{\log\log L}}.$$

Теорема доказана.

В завершение мы докажем две теоремы о существовании любого фиксированного числа подряд идущих аномально малых или аномально больших значений величин Δ_n.

Во-первых, мы покажем, что каково бы ни было фиксированное число s, найдётся бесконечно много номеров n таких, что каждое из значений $\Delta_n,\dots,\Delta_{n+s-1}$ имеет порядок $o\bigl(\sqrt{\log\log n}\bigr)$, т.е. будет очень маленьким по сравнению со своим «средним» значением $\sqrt{\log\log n}$.

Во-вторых, мы докажем бесконечность множества наборов $\Delta_n,\dots,\Delta_{n+s-1}$, в которых каждое из чисел превышает $\varphi(n)\sqrt{\log\log n}$, где $\varphi(x)$ - некоторая функция, неограниченно возрастающая при $x\to+\infty$.

Основное соображение, которое позволяет доказывать утверждения такого рода, состоит в том, что если произведение положительных величин из набора (5.1) очень мало, то в большинстве случаев и каждая из разностей $\Delta_n,\Delta_{n+1},\dots,\Delta_{n+s-1}$ тоже будет мала по сравнению со средним значением. Если же это не так, то в наборе

(5.1) нашлись бы два числа, разность между которыми оказалась бы очень велика. Последнее, в свою очередь, влечёт существование аномально больших расстояний между соседними ординатами нулей дзета-функции Римана, что оказывается (в силу леммы 5.1) очень редким явлением.

Теорема 5.3. *Для любого фиксированного числа $s \geqslant 2$ найдётся не менее*

$$\frac{0.01M}{\log\log\log\log N}$$

номеров n, $N < n \leqslant N + M$, таких, что

$$1 \leqslant \Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1} \leqslant 0.65\sqrt{\frac{\log\log N}{\log\log\log\log N}}.$$

Доказательство. Положим

$$\kappa_1 = 1.2\pi, \quad \kappa_2 = 1.3\pi, \quad x = \frac{\kappa_1}{\log\log L}, \quad y = \frac{\kappa_2}{\log\log L}$$

и рассмотрим множество номеров n с условиями

$$\Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1} > 0, \quad \Delta_n\Delta_{n+1}\ldots\Delta_{n+s-1} \leqslant \left\{\frac{\sqrt{xL}}{\pi}\right\}^s.$$

Согласно теореме 5.2, для количества ν_1 таких n справедлива следующая нижняя оценка:

$$\nu_1 \geqslant \frac{M}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\,du - \frac{2.15}{\sqrt{\log\log L}}\right\} > \frac{M}{2}\left\{2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\,e^{-x} - \frac{2.15}{\sqrt{\log\log L}}\right\} > \\ > \frac{0.02M}{\sqrt{\log\log L}}.$$

Далее, из рассматриваемых n отберём те, для которых

$$\max_{0 \leqslant j \leqslant s-1} \Delta_{n+j} > \frac{\sqrt{yL}}{\pi}. \tag{5.33}$$

Поскольку

$$\left\{\min_{0 \leqslant j \leqslant s-1} \Delta_{n+j}\right\}^s \leqslant \Delta_n \ldots \Delta_{n+s-1} \leqslant \left\{\frac{\sqrt{xL}}{\pi}\right\}^s,$$

то

$$\min_{0 \leqslant j \leqslant s-1} \Delta_{n+j} \leqslant \frac{\sqrt{xL}}{\pi}.$$

Следовательно, для таких n имеем:

$$\max_{0 \leqslant j \leqslant s-1} \Delta_{n+j} - \min_{0 \leqslant j \leqslant s-1} \Delta_{n+j} > \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{\kappa_2} - \sqrt{\kappa_1}\right)\sqrt{\frac{L}{\log\log L}} > \frac{1}{40}\sqrt{\frac{L}{\log\log L}}. \tag{5.34}$$

Пусть при заданном n символы q и r обозначают те значения j, для которых достигаются эти максимум и минимум. Тогда $r < q$. Действительно, воспользовавшись леммой 5.3, будем иметь:

$$\Delta_{n+q+1} \geqslant \Delta_{n+q} - 1 \geqslant \frac{\sqrt{yL}}{\pi} - 1 > \frac{\sqrt{xL}}{\pi},$$
$$\Delta_{n+q+2} \geqslant \Delta_{n+q} - 2 \geqslant \frac{\sqrt{yL}}{\pi} - 2 > \frac{\sqrt{xL}}{\pi},$$
$$\dots$$
$$\Delta_{n+s-1} \geqslant \Delta_{n+q} - (s-q-1) > \frac{\sqrt{xL}}{\pi}.$$

Итак, наименьшее из чисел Δ_{n+j}, $0 \leqslant j < s$, находится среди $\Delta_n, \dots, \Delta_{n+q-1}$. Переписывая неравенство (5.34) в виде

$$\Delta_{n+q} - \Delta_{n+r} = \big(\Delta_{n+q} - \Delta_{n+q-1}\big) + \big(\Delta_{n+q-1} - \Delta_{n+q-2}\big) + \dots + \big(\Delta_{n+r+1} - \Delta_{n+r}\big) > \\ > \frac{1}{40}\sqrt{\frac{L}{\log\log L}},$$

несложно заключить, что по крайней мере при одном i, $r < i \leqslant q$, будет выполнена оценка

$$\Delta_{n+i} - \Delta_{n+i-1} > \frac{1}{40(q-r)}\sqrt{\frac{L}{\log\log L}} \geqslant \frac{1}{40(s-1)}\sqrt{\frac{L}{\log\log L}}.$$

В силу леммы 5.3, соответствующий промежуток $[\gamma_{n+i-1}, \gamma_{n+i})$ содержит не менее

$$k = \frac{1}{40(s-1)}\sqrt{\frac{L}{\log\log L}} + 1$$

точек Грама. Но тогда длина такого промежутка будет не меньше

$$(k-1)\big(t_{N+M} - t_{N+M-1}\big) > \frac{2\pi(k-1)}{\log t_{N+M}}.$$

Полагая $T = t_{N+M}, H = t_{N+M} - t_N$ в лемме 5.1, заключаем, что число таких промежутков $[\gamma_{n+i-1}, \gamma_{n+i})$ не превосходит

$$\big(1 + o(1)\big)e^4 M \exp\left\{-\left(\frac{1}{2ec_0} - o(1)\right)(k-1)\right\}.$$

Поскольку каждому из этих промежутков отвечает не более s номеров m с условием

$$\Delta_m - \Delta_{m-1} \geqslant \frac{1}{40(s-1)}\sqrt{\frac{L}{\log\log L}},$$

то общее число ν_2 номеров n, отвечающих (5.33), не превосходит

$$\big(1 + o(1)\big)e^4 sM \exp\left\{-\left(\frac{1}{2ec_0} - o(1)\right)(k-1)\right\} < M\exp\left\{-\frac{0.004}{sc_0}\sqrt{\frac{L}{\log\log L}}\right\} < \\ < \frac{0.01M}{\sqrt{\log\log L}}.$$

Таким образом, по крайней мере

$$\nu_1 - \nu_2 > \frac{0.02M}{\sqrt{\log\log L}} - \frac{0.01M}{\sqrt{\log\log L}} = \frac{0.01M}{\sqrt{\log\log L}}$$

номеров n удовлетворяет условиям

$$1 \leqslant \Delta_n, \Delta_{n+1}, \dots, \Delta_{n+s-1} \leqslant \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\kappa_2}\,\frac{L}{\log\log L}} < 0.65\sqrt{\frac{\log\log N}{\log\log\log\log N}}.$$

Теорема доказана.

Теорема 5.4. *Для любого фиксированного числа $s \geqslant 2$ на промежутке $N < n \leqslant N + M$ найдётся не менее*

$$\frac{0.1M}{\sqrt{\log\log\log\log N}}$$

номеров n, удовлетворяющих условиям

$$\Delta_{n+j} > \frac{1}{2\pi}\sqrt{\log\log N}\sqrt{\log\log\log\log N}, \quad j = 0, 1, \dots, s-1.$$

Доказательство. Положим $\kappa_1 = 3.5$, $\kappa_2 = 0.25$,

$$x = \frac{1}{2}\big(\log\log\log L - \log\log\log\log L - \kappa_1\big), \quad y = \kappa_2 \log\log\log L$$

и рассмотрим множество номеров n с условиями

$$\Delta_n, \Delta_{n+1}, \dots, \Delta_{n+s-1} > 0, \quad \Delta_n \dots \Delta_{n+s-1} > \left\{\frac{\sqrt{xL}}{\pi}\right\}^s. \tag{5.35}$$

Согласно теореме 5.2, количество таких номеров оценивается снизу величиной

$$\nu_1 = \frac{M}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u}\,du - \frac{2.15}{\sqrt{\log\log L}}\right\} > \\ > \frac{M}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} - \frac{2.15}{\sqrt{\log\log L}}\right\} > \frac{0.07M}{\sqrt{\log\log L}}.$$

Далее, для каждого из таких n имеем, очевидно:

$$\max_{0 \leqslant j < s} \Delta_{n+j} > \frac{\sqrt{xL}}{\pi}.$$

Выделим теперь среди рассматриваемых номеров те, для которых

$$\min_{0 \leqslant j < s} \Delta_{n+j} \leqslant \frac{\sqrt{yL}}{\pi}, \tag{5.36}$$

и, следовательно,

$$\max_{0 \leqslant j < s} \Delta_{n+j} - \min_{0 \leqslant j < s} \Delta_{n+j} > \frac{1}{\pi}\big(\sqrt{x} - \sqrt{y}\big)\sqrt{L} > \frac{1}{2\pi}\sqrt{L}\sqrt{\log\log L}.$$

Зафиксировав такое значение n, обозначим через q и r те значения j, что отвечают, соответственно, максимуму и минимуму Δ_{n+j}, $0 \leqslant j < s$. Рассуждая подобно тому, как это делалось при доказательстве теоремы 5.3, заключаем, что $0 \leqslant r < q$ и что по крайней мере для одного i с условием $r, i \leqslant q$ будут выполнены неравенства

$$\Delta_{n+i} - \Delta_{n+i-1} > h, \quad \gamma_{n+i} - \gamma_{n+i-1} > \frac{2\pi h}{\log T}, \tag{5.37}$$

где

$$h = \frac{1}{2\pi(s-1)} \sqrt{L} \sqrt{\log\log L}, \quad T = t_N.$$

Но тогда, в силу леммы 5.1, число ν_2 таких номеров n, для которых имеет место (5.36), не превосходит

$$\big(1 + o(1)\big) e^4 s M \exp\left\{ - \left(\frac{1}{2ec_0} - o(1) \right) h \right\} < M \exp\left\{ - \frac{1}{4\pi e c_0 s} \sqrt{L} \sqrt{\log\log L} \right\} < \\ < \frac{0.02M}{\sqrt{\log\log L}}.$$

Следовательно, по меньшей мере для

$$\nu_1 - \nu_2 > \frac{0.07M}{\sqrt{\log\log L}} - \frac{0.02M}{\sqrt{\log\log L}} = \frac{0.05M}{\sqrt{\log\log L}}$$

значений n, $N < n \leqslant N + M$, справедливо неравенство:

$$\min_{0 \leqslant j < s} \Delta_{n+j} > \frac{\sqrt{yL}}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{L} \sqrt{\log\log\log L}.$$

Теорема доказана.

Глава 6

Значения функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ в точках Грама

Вопросы, которые рассматриваются в этой главе, по сути своей принадлежат к дискретной теории дзета-функции Римана. Такое название носит целый класс задач, в которых исследуется поведение $\zeta(s)$ и связанных с ней функций на различных дискретных множествах точек $\{s_n\}$.

Дискретная теория $\zeta(s)$ берёт своё начало в работах Э.Ч. Титчмарша. Его статья [48] содержала новое доказательство теоремы Харди о бесконечности множества нулей $\zeta(s)$ на критической прямой. Это доказательство основано на вычислении сумм

$$\sum_{n\leqslant N} Z(t_{2n}) = -\sum_{n\leqslant N}\zeta\big(\tfrac{1}{2}+it_{2n}\big) \quad \text{и} \quad \sum_{n\leqslant N} Z(t_{2n+1}) = \sum_{n\leqslant N}\zeta\big(\tfrac{1}{2}+it_{2n+1}\big).$$

К числу наиболее известных результатов этой области следует отнести и приводимые ниже формулы «дискретных моментов» функции Харди,

$$\sum_{n\leqslant N} Z^2(t_n) \;=\; N\big(\log N\big)\big(1\,+\,o(1)\big), \tag{6.1}$$

$$\sum_{n\leqslant N} Z^4(t_n) \;=\; \frac{N}{2\pi^2}\,\big(\log N\big)^4\big(1\,+\,o(1)\big). \tag{6.2}$$

которые были получены Я. Мозером [18],[20][1)]

Как следует из определения точек Грама, вещественные числа $\zeta\big(\frac{1}{2}+it_n\big)$ служат абсциссами точек пересечения вещественной оси с кривой

$$\mathcal{C}:\; t\mapsto \zeta\big(\tfrac{1}{2}+it\big) = \Big(\operatorname{Re}\zeta\big(\tfrac{1}{2}+it\big), \operatorname{Im}\zeta\big(\tfrac{1}{2}+it\big)\Big)$$

(см. рис. 11). Пересечениям $\mathcal{C}$ с вещественной осью отвечают и нули $t=\mathfrak{c}_n$ функции Харди $Z(t)$, но в этих случаях такие точки совпадают с началом координат.

Естественно поставить следующий вопрос: могут ли точки пересечения $\mathcal{C}$ с вещественной осью, отвечающие значениям $t=t_n$, совпадать с началом координат? Иными словами, возможно ли равенство $\zeta\big(\frac{1}{2}+it_n\big)=0$? Случай совпадения точки

[1)] Вторая формула была независимо получена А.А. Лаврик в работе [21].

Грама t_n с какой-либо из ординат γ_m представляется совершенно неправдоподобным. Это позволяет предположить, что

$$\zeta\big(\tfrac{1}{2}+it_n\big)\ \neq\ 0 \tag{6.3}$$

при всех $n\geqslant 0$. При попытке доказать или опровергнуть такое предположение возникают две задачи. Первая состоит в нахождении нижней оценки числа $Q(N)$ тех номеров n, $n\leqslant N$, что удовлетворяют условию (6.3). Вторая задача заключается в том, чтобы определить, насколько близкими к нулю могут оказаться величины $\zeta\big(\frac{1}{2}+it_n\big)$ при неограниченном возрастании n.

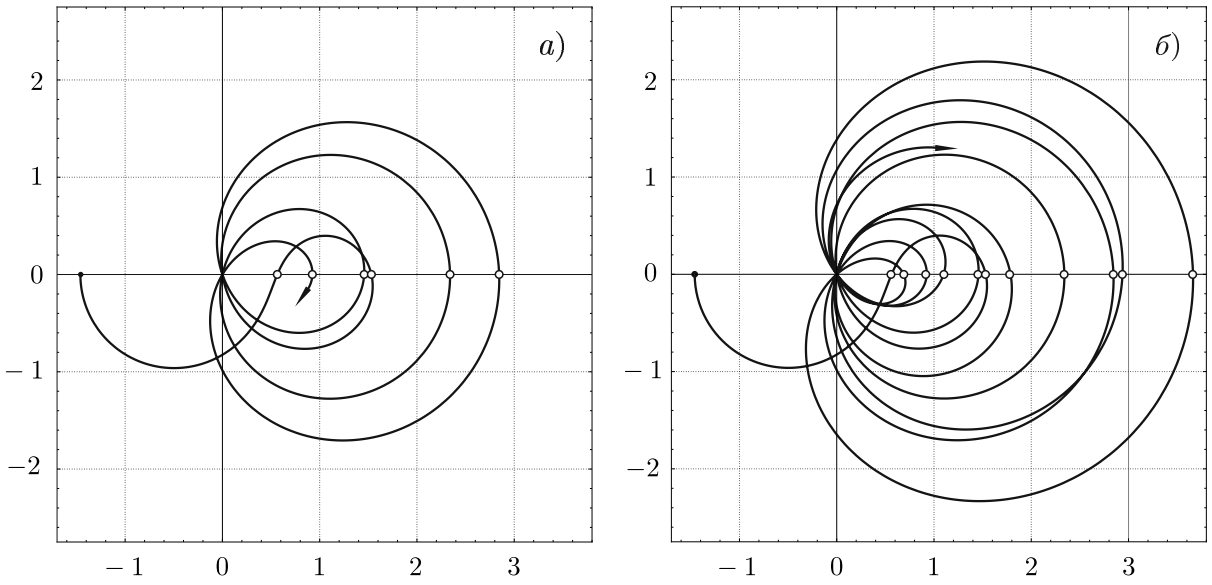


Рис. 11. Фрагменты кривой $\mathcal{C}:\ t\mapsto\zeta\big(\frac{1}{2}+it\big)$, отвечающие промежуткам $0\leqslant t\leqslant 32$ (а) и $0\leqslant t\leqslant 51$ (б). Абсциссы точек пересечения $\mathcal{C}$ с вещественной осью совпадают с величинами $\zeta\big(\frac{1}{2}+it_n\big)$.

Обратимся сначала к первому вопросу. Прежде всего, несложно показать, что величина $Q(N)$ неограниченно возрастает с ростом N. Действительно, применяя неравенство Коши к сумме из (6.1) и пользуясь асимптотической формулой (6.2), получим:

$$N(\log N)\big(1+o(1)\big)=\sum_{n\leqslant N}Z^2(t_n)\leqslant\bigg(Q(N)\sum_{n\leqslant N}Z^4(t_n)\bigg)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\big(1+o(1)\big)\bigg(Q(N)\cdot\frac{N}{2\pi^2}\,(\log N)^4\bigg)^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$Q(N)\ >\ (1-\varepsilon)\,\frac{2\pi^2N}{(\log N)^2}. \tag{6.4}$$

Оценка $Q(N)$, более точная, чем (6.4), была получена в 2011 г. Й. Штойдингом и Ю. Калпокасом. В работе [49] ими была рассмотрена «обобщённая» последовательность точек Грама t_n^{φ}, определяемых при фиксированном φ с условием $0\leqslant\varphi<\pi$

как решение уравнения

$$\vartheta(t_n^{\varphi}) \,=\, (n-1)\pi \,+\, \varphi,$$

и получена следующая асимптотическая[2)] формула:

$$\sum_{n\leqslant N} \zeta\big(\tfrac{1}{2}+it_n^{\varphi}\big) \,=\, 2e^{i\,\varphi}(\cos\varphi)N \,+\, O\Big(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\Big).$$

Положив в ней $\varphi = 0$ и воспользовавшись неравенством Коши наряду с равенством (6.1) подобно тому, как это делалось выше, можно заключить, что

$$Q(N) \,>\, (1-\varepsilon)\,\frac{4N}{\log N}. \tag{6.5}$$

Следует, впрочем, отметить, что из приведённой в Приложении II (на стр. 277) теореме Сельберга следует, что

$$Q(N) \,>\, KN \tag{6.6}$$

при некотором постоянном $K > 0$. Ввиду того, что доказательство этого утверждения так и не было опубликовано, задача нахождения оценок $Q(N)$, уточняющих (6.5), хотя бы и уступающих по точности (6.6), всё же сохраняет смысл. Одна из такого рода оценок и помещена в настоящей главе. Именно, приводимая ниже теорема 6.1 даёт неравенство вида

$$Q(N+M) \,-\, Q(N) \geqslant Me^{-c(\log\log\log N)^2}, \quad c>0.$$

Вывод этой и иных подобных ей оценок опирается на факт существования у функции $S(t)$ большого числа точек перемены знака.

Перейдём теперь к задаче нахождения малых значений $\big|\zeta\big(\frac{1}{2}+it_n\big)\big|$. Численные данные доставляют примеры точек Грама t_n, для которых такие значения «аномально» близки к нулю. Следующая таблица содержит все такие значения, не превосходящие 10^{-7}, отвечающие промежутку $n\leqslant 10^8$ (см. также Приложение III):

№	n	$\zeta\big(\frac{1}{2}+it_n\big)$	№	n	$\zeta\big(\frac{1}{2}+it_n\big)$
1	368 383	$8.908459\cdot 10^{-8}$	7	55 785 549	$3.751899\cdot 10^{-8}$
2	12 984 109	$-2.052298\cdot 10^{-8}$	8	61 769 885	$8.026449\cdot 10^{-8}$
3	21 567 185	$-6.709404\cdot 10^{-8}$	9	65 463 721	$1.083783\cdot 10^{-8}$
4	45 898 152	$8.302024\cdot 10^{-8}$	10	69 612 841	$9.033652\cdot 10^{-8}$
5	50 550 325	$-6.397503\cdot 10^{-8}$	11	74 201 244	$2.875945\cdot 10^{-8}$
6	52 220 649	$-6.529425\cdot 10^{-8}$	–	–	–

Из приводимых ниже теорем следует, что величина $\big|\zeta\big(\frac{1}{2}+it_n\big)\big|$ может быть как угодно близкой к нулю. Оказывается даже, что какова бы ни была положительная постоянная A, номера n, $n\leqslant N$, удовлетворяющие условию

$$\big|\zeta\big(\tfrac{1}{2}+it_n\big)\big| \,<\, e^{-\,A\sqrt{\log\log n}}$$

[2)] При $\varphi \neq \pi/2$.

образуют множество положительной плотности (зависящей от A).

Укажем на те соображения, которые приводят к такого рода утверждениям. Прежде всего, известно (см., например [40, Теорема 6.1], [50]), что при любом вещественном x мера множества $\mathcal{E}(T;x)$ точек t промежутка $(0,T]$, для которых величина

$$\xi(t) \;=\; \frac{\sqrt{2}\,\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|}{\sqrt{\log\log T}}$$

удовлетворяет неравенству $\xi(t)\leqslant x$, равна

$$\operatorname{mes}\mathcal{E}(T;x) \;=\; T\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \;+\; O\left(\frac{(\log\log\log T)^2}{\sqrt{\log\log T}}\right)\right).$$

Положив $x=-A\sqrt{2}$, несложно заключить, что неравенство

$$\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right| \;<\; e^{-A\sqrt{\log\log T}}$$

выполняется для положительной доли точек t рассматриваемого промежутка.

Однако попытка применить подобные рассуждения к последовательности

$$\xi(t_n) \;=\; \frac{\sqrt{2}\,\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)\right|}{\sqrt{\log\log N}},\quad n\leqslant N,$$

наталкивается на самые серьёзные препятствия, которые заключаются в следующем.

Формула для вещественной части логарифма $\zeta(s)$ на критической прямой, используемая при выводе (6.6), имеет следующий вид:

$$\log\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right| = \sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}}}\,\frac{\cos(t\log n)}{\log n} + \\ + \;O\left(\left(\sigma_{x,t}-\tfrac{1}{2}\right)\left\{\left(\sigma_{x,t}-\tfrac{1}{2}\right)\log x \;+\; \log\chi(t)\right\}\left\{\left|\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}+it}}\right| \;+\; \log t\right\}\right),$$

$$\chi(t) \;=\; 1+\frac{1}{\eta(t)\log x}, \quad (6.7)$$

где символы $\sigma_{x,t}, \Lambda_x(m)$ определены в §1 главы 2, а $\eta(t)=\min\limits_{\varrho=\beta+i\gamma}|t-\gamma|$ обозначает расстояние от t до ближайшей ординаты нуля $\zeta(s)$, так что $\chi(\gamma_n)=+\infty$. Вычисление моментов

$$\int_0^T\left(\log\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|\right)^k dt,\quad k=1,2,3,\dots\ ,$$

также необходимых для вывода (6.6), сводится, помимо прочего, к оценке интегралов вида

$$\int_0^T \log^m\chi(t)dt,\quad m=1,2,3,\dots\ . \quad (6.8)$$

Интегралы (6.8) конечны, поскольку, например, конечен всякий интеграл

$$\int_0^1\left(\log\frac{1}{t}\right)^m dt.$$

В дискретном же случае вместо интегралов в (6.8) приходится иметь дело с суммами

$$\sum_n \log^m \chi(t_n).$$

Отсутствие точной информации о взаимном расположении точек Грама и ординат нулей $\zeta(s)$ не позволяет утверждать, что суммы эти конечны.

Идея доказательства теорем 6.2-6.4 состоит в следующем. Наличие в формуле (6.7) множителя

$$\log \chi(t) \tag{6.9}$$

необходимо, поскольку отражает суть дела: в точках t, совпадающих с нулями функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, левая часть (6.7) обращается в $(-\infty)$, и то же должно происходить и с правой частью. Но поскольку множитель (6.9) в таких точках обращается в $+\infty$, естественно предположить, что существует приближение $\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$, подобное (6.7), в которое слагаемое, содержащее множителем (6.9), входит с отрицательным коэффициентом. Соответственно, при переходе от точного равенства к верхней оценке это слагаемое может быть опущено. Выводу подобного неравенства и посвящена лемма 6.4.

Правая часть $C(t)$ полученного в этой лемме неравенства свободна от перечисленных выше недостатков формулы (6.7). К ней оказывается возможным применить всю ту технику, что была использована в главе 2 для нахождения моментов величин $\Delta(n) = S(t_n + 0)$ и их функции распределения.

§1. Верхняя оценка $\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$

Доказательства теорем 5.2 - 5.4 опираются на ряд вспомогательных утверждений, которые собраны в настоящем параграфе.

Лемма 6.1. *Если* $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \neq 0$, *то справедливо равенство*

$$\log\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right| = -\operatorname{Re}\left\{\text{v.p.}\int_{1/2}^{+\infty} \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\,d\sigma\right\}. \tag{6.10}$$

Доказательство. Если t не является ординатой нуля $\zeta(s)$, то всякая ветвь функции $\log\zeta(s)$, непрерывная вдоль луча $\left[\frac{1}{2}+it, +\infty+it\right)$, будет и аналитической в некоторой его окрестности. Фиксируя такую ветвь, будем иметь:

$$\log\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right| = \operatorname{Re}\log\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right) = \operatorname{Re}\lim_{a\to+\infty}\left\{\log\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right) - \log\zeta\left(a+it\right)\right\} =$$
$$= -\operatorname{Re}\lim_{a\to+\infty}\int_{1/2}^{a}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\,d\sigma = -\operatorname{Re}\int_{1/2}^{+\infty}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\,d\sigma.$$

Так как несобственный интеграл совпадает в данном случае с несобственным интегралом в смысле главного значения то мы приходим к утверждению леммы.

Пусть, далее, $\varrho = \beta + it$ - единственный нуль $\zeta(s)$ с условием $\frac{1}{2} < \beta < 1$. Обозначая через j правую часть (6.10), будем иметь:

$$j = -\operatorname{Re}\lim_{h\to 0}\Big\{\int_{1/2}^{\beta-h} + \int_{\beta+h}^{+\infty}\Big\}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\,d\sigma =$$
$$= \operatorname{Re}\lim_{h\to 0}\Big\{\log\zeta\big(\tfrac{1}{2}+it\big) + \log\zeta\big(\beta+h+it\big) - \log\zeta\big(\beta-h+it\big)\Big\} =$$
$$= \log\big|\zeta\big(\tfrac{1}{2}+it\big)\big| + \lim_{h\to 0}\log\left|\frac{\zeta(\varrho+h)}{\zeta(\varrho-h)}\right|. \quad (6.11)$$

Обозначим кратность нуля ϱ через m. Определив $g(s)$ равенством $\zeta(s) = (s-\varrho)^m g(s)$ и замечая, что $g(s)$ аналитична вблизи точки $s = \varrho$ и отлична там от нуля, получим:

$$|\zeta(\varrho+h)| = h^m|g(\varrho+h)| = h^m\big(|g(\varrho)| + o(1)\big) = h^m|g(\varrho)|\big(1+o(1)\big),$$
$$|\zeta(\varrho+h)| = h^m|g(\varrho)|\big(1+o(1)\big),$$

откуда

$$\log\left|\frac{\zeta(\varrho+h)}{\zeta(\varrho-h)}\right| = \log\big(1+o(1)\big) = o(1)$$

при $h \to 0$. Возвращаясь к (6.11), находим:

$$j = \log\big|\zeta\big(\tfrac{1}{2}+it\big)\big|.$$

Случай, когда t является ординатой нескольких различных нулей $\zeta(s)$, аналогичен рассмотренному. Лемма доказана.

Лемма 6.2. *При* $10 \leqslant x \leqslant t^{\delta}$, $800\delta = 1$, *справедливо неравенство:*

$$\log\big|\zeta\big(\tfrac{1}{2}+it\big)\big| \leqslant C(t),$$

где

$$C(t) = \sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}}}\,\frac{\cos(t\log m)}{\log m} + \big(\sigma_{x,t} - \tfrac{1}{2}\big)^2(\log x)\Big(a_3\log t + a_4\Big|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t}+it}}\Big|\Big),$$

$a_3 = 4.01$, $a_4 = 7.52$.

Доказательство. Если $\frac{1}{2} + it$ - нуль $\zeta(s)$, то неравенство леммы выполнено, поскольку в этом случае его левая часть обращается в $(-\infty)$. Поэтому далее предполагаем, что $\zeta\big(\frac{1}{2}+it\big) \neq 0$. Пользуясь леммой 6.1, будем иметь:

$$\log\big|\zeta\big(\tfrac{1}{2}+it\big)\big| = -\operatorname{Re}\Big\{\text{v.p.}\Big(\int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} + \int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty}\Big)\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\,d\sigma\Big\} = -I_1 - I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \big(\sigma_{x,t} - \tfrac{1}{2}\big)\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma_{x,t}+it)}{\zeta(\sigma_{x,t}+it)}, \quad I_2 = \operatorname{Re}\Big\{\text{v.p.}\int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\,d\sigma\Big\},$$
$$I_3 = \operatorname{Re}\Big\{\text{v.p.}\int_{1/2}^{\sigma_{x,t}}\left(\frac{\zeta'(\sigma_{x,t}+it)}{\zeta(\sigma_{x,t}+it)} - \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right)d\sigma\Big\}.$$

Согласно лемме 5.П, первый интеграл удовлетворяет неравенству

$$|I_1| \leqslant \bigl(\sigma_{x,t} - \tfrac{1}{2}\bigr)\bigl(2.6|r(x,t)| + 0.8\log t + 4.82\bigr), \tag{6.12}$$

где

$$r(x,t) \;=\; \sum_{m \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}+it}}.$$

Пользуясь оценкой

$$\tfrac{1}{2}\bigl(\sigma_{x,t} - \tfrac{1}{2}\bigr)\log x \geqslant 1, \tag{6.13}$$

перепишем (6.12) в виде:

$$|I_1| \leqslant \bigl(\sigma_{x,t} - \tfrac{1}{2}\bigr)^2 (\log x)\bigl\{a_3^{(1)}\log t + a_4^{(1)}|r(x,t)| + a_5^{(1)}\bigr\},$$

где $a_3^{(1)} = 0.4, a_4^{(1)} = 1.3, a_5^{(1)} = 2.41$. Далее, применив лемму 19.П, придём к равенству

$$I_2 = -\operatorname{Re}\int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty}\left\{\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma+it}} \;+\; \frac{13\theta}{3}\,x^{\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}}\left(|r(x,t)| + \frac{1}{2}\,\log t + 4\right)\right\} d\sigma,$$

которое, наряду с оценками (6.13) и

$$\int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty} x^{\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}}\,d\sigma \;=\; \frac{2}{\log x}\;x^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)} \leqslant \frac{2}{e}\,\frac{1}{\log x},$$

даёт:

$$I_2 = -\operatorname{Re}\left\{\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{\log m}\,\frac{1}{m^{\sigma_{x,t}+it}}\right\} + \\ + \;\theta\bigl(\sigma_{x,t}-\tfrac{1}{2}\bigr)^2(\log x)\bigl\{a_3^{(2)}\log t + a_4^{(2)}|r(x,t)| + a_5^{(2)}\bigr\},$$

где $a_3^{(2)} = \dfrac{13}{12e}, a_4^{(2)} = \dfrac{13}{6e}, a_5^{(2)} = \dfrac{26}{3e}$. Оценим, наконец, интеграл I_3. Воспользовавшись леммой 20.П, при $\zeta(\sigma+it) \neq 0$ получим:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\zeta'(\sigma_{x,t}+it)}{\zeta(\sigma_{x,t}+it)} \;-\; \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right\} \;=\; \sum_{\varrho}\kappa(\varrho) + \theta_1(\log t + 6),$$

где

$$\kappa(\varrho) = \frac{\sigma_{x,t}-\beta}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+(t-\gamma)^2} \;-\; \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} \;= \\ = \;\frac{(\sigma_{x,t}-\sigma)(t-\gamma)^2 + (\sigma_{x,t}-\sigma)(\sigma_{x,t}-\beta)(\beta-\sigma)}{\bigl\{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+(t-\gamma)^2\bigr\}\bigl\{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2\bigr\}} = \kappa_1(\varrho) + \kappa_2(\varrho),$$

где смысл обозначений $\kappa_r(\varrho)$, $r = 1, 2$, очевиден. Положим также

$$j_r(\varrho) \;=\; \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \kappa_r(\varrho)\,d\sigma, \quad j(\varrho) \;=\; j_1(\varrho) + j_2(\varrho).$$

Так как на всём промежутке $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{x,t}$ выполняются оценки

$$0 \leqslant \kappa_1 = \frac{\sigma_{x,t} - \sigma}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t-\gamma)^2} \cdot \frac{(t-\gamma)^2}{(\sigma - \beta)^2 + (t-\gamma)^2} \leqslant \frac{\sigma_{x,t} - \sigma}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t-\gamma)^2},$$

то для любого нуля $\varrho = \beta + i\gamma$ имеем:

$$j_1 \leqslant \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)\, d\sigma}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t-\gamma)^2} = \frac{1}{2} \frac{\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t-\gamma)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4} \left(\sigma_{x,t} - \tfrac{1}{2}\right) (\log x) \frac{\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t-\gamma)^2}.$$

Для оценки κ_2 и j_2 отметим сперва, что при $\beta \leqslant \frac{1}{2}$ или $\beta \geqslant \sigma_{x,t}$ числитель κ_2 неположителен на всём промежутке интегрирования, так что для всех таких нулей имеем: $j_2 \leqslant 0$. Поэтому всюду далее предполагаем, что $\frac{1}{2} < \beta < \sigma_{x,t}$. Обозначим $\tau = |t - \gamma|$ и рассмотрим два случая.

Случай 1: $\tau > (\log x)^{-1}$. Преобразуя κ_2, найдём:

$$\kappa_2 = \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)(\sigma_{x,t} - \sigma + \sigma - \beta)(\beta - \sigma)}{\left\{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2\right\}\left\{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2\right\}} = \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)^2(\beta - \sigma) \;-\; (\sigma_{x,t} - \sigma)(\beta - \sigma)^2}{\left\{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2\right\}\left\{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2\right\}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)^2(\beta - \sigma)}{\left\{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2\right\}\left\{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2\right\}}.$$

Далее, замечая, что последняя дробь отрицательна при $\sigma > \beta$, получаем:

$$j_2 \leqslant \int_{1/2}^{\beta} \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)^2(\beta - \sigma)\, d\sigma}{\left\{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2\right\}\left\{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2\right\}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \int_{1/2}^{\beta} \frac{(\beta - \sigma)\, d\sigma}{(\beta - \sigma)^2 + \tau^2} = \frac{1}{2} \frac{\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \log \frac{\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2}{\tau^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \log\left(1 + \frac{\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}}{\tau}\right) \leqslant \frac{\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \frac{\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}}{\tau} <$$
$$< \frac{\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \left(\sigma_{x,t} - \tfrac{1}{2}\right) \log x. \quad (6.14)$$

Случай 2: $0 \leqslant \tau \leqslant (\log x)^{-1}$. Допустим сперва, что

$$\sigma_{x,t} \;=\; \tfrac{1}{2} + 2\big(\beta_0 - \tfrac{1}{2}\big),$$

где $\beta_0 > \frac{1}{2}$ - абсцисса некоторого нуля $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ с условием

$$|t - \gamma_0| \leqslant \frac{x^{3\left|\beta_0 - \frac{1}{2}\right|}}{\log x}.$$

Из определения $\sigma_{x,t}$ следует тогда, что β_0 - наибольшая среди абсцисс нулей $\varrho^* = \beta^* + i\gamma^*$ таких, что

$$|t - \gamma^*| \leqslant \frac{x^{3\left|\beta^* - \frac{1}{2}\right|}}{\log x}. \quad (6.15)$$

Но для всякого β^* верна оценка:

$$\frac{x^{3\left|\beta^*-\frac{1}{2}\right|}}{\log x} \geqslant \frac{1}{\log x}.$$

А поскольку для рассматриваемого нуля $\varrho = \beta + i\gamma$ имеет место неравенство $\tau = |t-\gamma| \leqslant (\log x)^{-1}$, то этот нуль ϱ заведомо содержится в числе нулей ϱ^*, удовлетворяющих (6.15). Следовательно, его абсцисса β не может превосходить β_0:

$$\beta \leqslant \beta_0 = \tfrac{1}{2}\big(\sigma_{x,t} + \tfrac{1}{2}\big).$$

Из последнего неравенства несложно заключить, что

$$0 \leqslant \beta - \tfrac{1}{2} \leqslant \tfrac{1}{2}\big(\sigma_{x,t} - \tfrac{1}{2}\big) \leqslant \sigma_{x,t} - \beta. \tag{6.16}$$

Предположим теперь, что $\sigma_{x,t} = \frac{1}{2} + 2(\log x)^{-1}$. В этом случае для всех нулей, удовлетворяющих условию (6.15) (и, в частности, для нуля $\varrho = \beta + i\gamma$) будем иметь:

$$\big|\beta^* - \tfrac{1}{2}\big| \leqslant (\log x)^{-1} = \tfrac{1}{2}\big(\sigma_{x,t} - \tfrac{1}{2}\big).$$

Таким образом, и в этом случае абсцисса β удовлетворяет (6.16).

Переходя к оценке $j_2(\varrho)$, находим:

$$j_2 = \frac{\sigma_{x,t}-\beta}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}\left(\int_{1/2}^{\beta} + \int_{\beta}^{\sigma_{x,t}}\right)\frac{(\sigma_{x,t}-\sigma)(\beta-\sigma)}{(\sigma-\beta)^2+\tau^2}\,d\sigma = \\ = \frac{\sigma_{x,t}-\beta}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}\big(j_3 - j_4\big),$$

где

$$j_3 = \int_{1/2}^{\beta}\frac{(\sigma_{x,t}-\sigma)(\beta-\sigma)\,d\sigma}{(\sigma-\beta)^2+\tau^2}, \quad j_4 = \int_{\beta}^{\sigma_{x,t}}\frac{(\sigma_{x,t}-\sigma)(\beta-\sigma)\,d\sigma}{(\sigma-\beta)^2+\tau^2}.$$

Полагая $u = \beta - \sigma$, $v = \sigma - \beta$ в j_3 и j_4 соответственно, получаем:

$$j_3 = (\sigma_{x,t}-\beta)\int_0^{\beta-1/2}\frac{u\,du}{u^2+\tau^2} + \int_0^{\beta-1/2}\frac{u^2\,du}{u^2+\tau^2} \leqslant \\ \leqslant (\sigma_{x,t}-\beta)\,\frac{1}{2}\log\frac{\big(\beta-\frac{1}{2}\big)^2+\tau^2}{\tau^2} + \big(\beta-\tfrac{1}{2}\big),$$

$$j_4 = (\sigma_{x,t}-\beta)\int_0^{\sigma_{x,t}-\beta}\frac{v\,dv}{v^2+\tau^2} - \int_0^{\sigma_{x,t}-\beta}\frac{v^2\,dv}{v^2+\tau^2} \geqslant \\ \geqslant (\sigma_{x,t}-\beta)\,\frac{1}{2}\log\frac{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}{\tau^2} - (\sigma_{x,t}-\beta),$$

откуда

$$j_3 - j_4 \leqslant (\sigma_{x,t}-\beta)\,\frac{1}{2}\log\frac{\big(\beta-\frac{1}{2}\big)^2+\tau^2}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2} + \big(\sigma_{x,t}-\tfrac{1}{2}\big).$$

В силу неравенства (6.16) дробь, стоящая под знаком логарифма, не превосходит единицы. Следовательно,

$$j_2 \leqslant \frac{\sigma_{x,t}-\beta}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}\left(\sigma_{x,t}-\tfrac{1}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)^2}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}\left(\sigma_{x,t}-\tfrac{1}{2}\right)\log x. \tag{6.17}$$

Сравнивая (6.14) и (6.17), заключаем, что неравенство (6.14) имеет место при любом β. Таким образом,

$$j(\varrho)=j_1(\varrho)+j_2(\varrho)\leqslant \frac{5}{4}\,\frac{\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)^2}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}\left(\sigma_{x,t}-\tfrac{1}{2}\right)\log x.$$

Итак, для оценки I_3 остаётся воспользоваться леммой 5.П. Так получим:

$$\begin{aligned}\sum_{\varrho} j(\varrho) &\leqslant \frac{5}{4}(\log x)\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)\sum_{\varrho}\frac{\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+(t-\gamma)^2}\leqslant\\ &\leqslant \frac{5}{4}(\log x)\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{5}{3}\,\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma_{x,t}+it)}{\zeta(\sigma_{x,t}+it)}\,+\,\frac{5}{6}\log t+5\right)\leqslant\\ &\leqslant (\log x)\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{65}{24}\log t\,+\,\frac{13}{4}|r(x,t)|\,+\,16.3\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_3 &\leqslant \sum_{\varrho} j(\varrho)\,+\,(\log x)\left(\sigma_{x,t}-\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\log t+3\right)\leqslant\\ &=\,(\log x)\left(\sigma_{x,t}-\tfrac{1}{2}\right)^2\left(a_3^{(3)}\log t+a_4^{(3)}|r(x,t)|+a_5^{(3)}\right),\end{aligned}$$

где $a_3^{(3)}=\dfrac{77}{24}$, $a_4^{(3)}=\dfrac{13}{12}$, $a_5^{(3)}=19.3$. Таким образом,

$$\ln|\zeta(0.5+it)|\leqslant\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}}}\,\frac{\cos(t\log m)}{\log m}+R,$$

$$R=(\log x)\left(\sigma_{x,t}-\tfrac{1}{2}\right)^2\left\{a_3^{(4)}\log t+a_4^{(4)}|r(x,t)|+a_5^{(4)}\right\},\quad a_j^{(4)}=\sum_{k=1}^{3}a_j^{(k)},$$

причем $a_3^{(4)}<4.00687$, $a_4^{(4)}<7.51374$, $a_5^{(4)}<24.89829$. Далее, полагая

$$q(x,t)=\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t}+it}}$$

и замечая, что

$$\begin{aligned}|r(x,t)|\leqslant|q(x,t)|+\sum_{k\geqslant 2}\sum_{p\leqslant x^{3/k}}\frac{\log p}{p^{k/2}}\leqslant|q(x,t)|+\sum_{p\leqslant x^{3/2}}\frac{\log p}{p}+\sum_{p}\frac{\log p}{p(\sqrt{p}-1)}<\\ <|q(x,t)|+1.5\log x+2.48,\end{aligned}$$

при $10 \leqslant x \leqslant t^{\delta}$, $\delta = 800^{-1}$, получим:

$$a_3^{(4)} \log t + a_4^{(4)}|r(x,t)| + a_5^{(4)} < a_3^{(4)} \log t + a_4^{(4)}\big(|q(x,t)| + 1.5\delta \log t + 2.48\big) + a_5^{(4)} \leqslant$$
$$\leqslant (\log t)\left(a_3^{(4)} + 1.5\delta a_4^{(4)} + \frac{\delta}{\log 2}\big(2.48 a_4^{(4)} + a_5^{(4)}\big)\right) + a_4^{(4)}|q(x,t)| <$$
$$< 4.01 \log t + 7.52|q(x,t)|.$$

Лемма доказана.

Лемма 6.3. *Пусть k - целое число, $1 \leqslant k \leqslant c \log X$, где c - достаточно малая абсолютная постоянная, $x = X^{1/(8k+3)}$. Тогда справедливо неравенство:*

$$\sum_n \left| C(t_n) - \sum_{m \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t_n}}} \frac{\cos(t_n \log m)}{\log m} \right|^{2k} < \frac{31.8}{\varepsilon} M \left(\frac{2252.8k}{\varepsilon}\right)^{2k}.$$

Доказательство. Доказательство леммы практически дословно повторяет доказательство леммы 2.5; возникшая там постоянная $320a_1 = 1440$ заменится теперь величиной $640a_3 = 2566.4$ (a_1 и a_3 определены, соответственно, в леммах 2.4 и 6.2).

Лемма 6.4. *Если выполнены условия леммы* 6.3, *то имеет место неравенство:*

$$\sum_n \left| \sum_{m \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t_n}}} \frac{\cos(t_n \log m)}{\log m} - \sum_{p \leqslant x} \frac{\cos(t_n \log p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} < \frac{M}{8\varepsilon} (1152 e^4 k)^k. \tag{6.18}$$

Доказательство леммы полностью аналогично доказательству леммы 2.6.

Лемма 6.5. *Если выполнены условия леммы* 6.3, *то имеет место неравенство:*

$$\sum_n \left| C(t_n) - \sum_{p \leqslant x} \frac{\cos(t_n \log p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} < \frac{c_6}{280} (c_6 k)^{2k} M,$$

где $c_6 = 5132.8\,\varepsilon^{-1}$.

Доказательство полностью повторяет доказательство леммы 2.7 Фигурирующая в ней постоянная c_0 заменится при этом величиной $c_6 = 2 \cdot 640 a_3 = 5132.8\,\varepsilon^{-1}$.

§2. Основные теоремы

Пусть, как и выше, $Q(N)$ обозначает количество номеров n с условием $1 \leqslant n \leqslant N$, удовлетворяющих (6.3). Имеет место

Теорема 6.1. *Существуют положительные постоянные b_1, b_2, зависящие лишь от ε и такие, что при всех $N \geqslant N_0(\varepsilon)$ выполняются неравенства:*

$$Q(N+M) - Q(N) \geqslant M e^{-b_1 (\log\log\log N)^2}, \tag{6.19}$$

и, если гипотеза Римана верна,

$$Q(N+M) - Q(N) \geqslant M e^{-b_2 \log\log\log N} = \frac{M}{(\log\log N)^{b_2}}. \tag{6.20}$$

Доказательство. При выводе теорем 4.7 и 4.8 было установлено, что число нулей функции $\varphi(t) = S(t+0)$, отличных от ординат нулей $\zeta(s)$ и лежащих на промежутке $\bigl(t_N, t_{N+M}\bigr]$, оценивается снизу величинами (6.20) или (6.19) в зависимости от того, предполагается ли гипотеза Римана справедливой или нет. Там же было установлено, что все нули $\varphi(t)$ являются точками Грама. Отсюда сразу следует утверждение теоремы.

Докажем теперь ряд утверждений о существовании «очень маленьких» по модулю значений дзета-функции в точках Грама. Для этого мы сначала получим нижнюю оценку для функции распределения

$$\Psi(v) \,=\, \frac{1}{M}\,\#\biggl\{n\,|\,N<n\leqslant N+M,\; C(t_n)\leqslant\frac{v}{\sqrt{2}}\,\sqrt{\log\log N}\biggr\},$$

после чего, выбрав надлежащим образом параметр $v = -w\sqrt{2}$, $w > 0$, сделаем заключение о существовании большого количества номеров n с условием

$$C(t_n)\leqslant -w\sqrt{\log\log N}.$$

В силу леммы 6.2, для таких n будут выполняться и неравенства

$$\bigl|\zeta\bigl(\tfrac{1}{2}+it_n\bigr)\bigr| \,=\, e^{\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)\right|} \leqslant e^{C(t_n)} \leqslant e^{-\,w\sqrt{\log\log N}}.$$

При оценке функции $\Psi(v)$ будем придерживаться схемы рассуждений из §2.4.

Положим для дальнейшего

$$y \,=\, \exp\left(\frac{\log N}{288L}\right),\quad \mathfrak{S} \,=\, \sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p},\quad V_z(t) \,=\, \sum_{p\leqslant z}\frac{\cos\left(t\log p\right)}{\sqrt{p}}.$$

Пусть, кроме того, $f(u)$ - неограниченная сверху и монотонно возрастающая при $u\to+\infty$ функция, подчинённая при $N\leqslant u\leqslant N+M$ условиям

$$1 \ll f(u)\leqslant\frac{c_6 L}{12\log L}$$

(c_6 - постоянная леммы 6.5), и пусть $\mathcal{F} = f(N)$.

Лемма 6.6. *Для всех n с условием $N < n\leqslant N+M$, за исключением не более $M\delta_1$ номеров,*

$$\delta_1 \,=\, 136\,\varepsilon^{-1}\exp\left\{-\,\frac{2L}{3\mathcal{F}ec_6}\right\},$$

справедливо неравенство:

$$C(t_n)\leqslant V_y(t_n) \,+\, \frac{2L}{3\mathcal{F}}.$$

Доказательство. Положим

$$k_1 = \left[\frac{L}{3\mathcal{F}ec_6}\right],\quad x = X^{1/(8k_1+3)}.$$

Пусть $\mathcal{A}_1$ - множество тех n, $N < n \leqslant N + M$, для которых

$$\big|C(t_n) - V_x(t_n)\big| \,>\, \frac{L}{3\mathcal{F}}.$$

Тогда, пользуясь леммой 6.5, находим:

$$|\mathcal{A}_1|\left(\frac{L}{3\mathcal{F}}\right)^{2k_1} \leqslant \sum_{n\in\mathcal{A}_1}\big(C(t_n) - V_x(t_n)\big)^{2k_1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n}\big(C(t_n) - V_x(t_n)\big)^{2k_1} \,<\, \frac{c_6}{280}(c_6k_1)^{2k_1}M,$$

откуда

$$|\mathcal{A}_1| \,<\, \frac{c_6}{280}\left(\frac{3\mathcal{F}c_6k_1}{L}\right)^{2k_1}M \,<\, \frac{c_6}{280}\,e^{-2k_1}M.$$

Далее, несложно заметить, что

$$\log x = \frac{0.1\varepsilon\log N}{8k_1+3} > \frac{0.1\varepsilon\log N}{3L}\,\mathcal{F}ec_6 \,>\, \frac{a_0e}{30}\,\frac{\log N}{L} > 10^5\log y,$$

так что $x > y^{10^5}$. Обозначая через $\mathcal{A}_2$ множество тех n, для которых

$$|V_x(t_n) - V_y(t_n)| > \frac{L}{3\mathcal{F}}$$

и применяя лемму 2.1, найдем:

$$|\mathcal{A}_2|\left(\frac{L}{3\mathcal{F}}\right)^{2k_1} \leqslant \sum_{n}\big(V_x(t_n) - V_y(t_n)\big)^{2k_1} \leqslant \sum_{n}\left|\sum_{y<p\leqslant x}\frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}}\right|^{2k_1} \,=$$

$$\leqslant k_1!\,M\left(\sum_{y<p\leqslant x}\frac{1}{p}\right)^{k_1} \,+\, x^{k_1}\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^{2k_1}\log N \,<$$

$$<\, k_1!\,M(\log L)^{k_1} \,+\, X^{0.25} \,<\, 3\sqrt{k_1}\left(\frac{k_1\log L}{e}\right)^{k_1}M,$$

откуда

$$|\mathcal{A}_2| < 3M\sqrt{k_1}\left(\frac{9\mathcal{F}^2}{L^2}\cdot\frac{\log L}{e}\cdot\frac{L}{3\mathcal{F}ec_6}\right)^{k_1} \,=\, 3M\sqrt{k_1}\left(\frac{3\mathcal{F}}{e^2c_6}\cdot\frac{\log L}{L}\right)^{k_1}M \leqslant$$

$$\leqslant 3M\sqrt{k_1}(2e)^{-\,2k_1} \,<\, Me^{-\,2k_1}.$$

Таким образом, исключив из рассмотрения не более чем

$$|\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| \leqslant \frac{c_6}{280}\,e^{-2k_1} + Me^{-\,2k_1} < 136\,\varepsilon^{-1}\,M\exp\left(-\frac{2L}{3\mathcal{F}ec_6}\right)$$

точек Грама t_n, для оставшихся будем иметь:

$$C(t_n) = V_y(t_n) + \big(V_x(t_n) - V_y(t_n)\big) + \big(C(t_n) - V_x(t_n)\big) \leqslant V_y(t_n) + \frac{2L}{3\mathcal{F}}$$

Лемма доказана.

Лемма 6.7. *Для всех номеров n, $N < n \leqslant N + M$, за исключением не более чем $M\delta_2$ номеров, $\delta_2 = 9e\sqrt{\mathfrak{S}}e^{-9\mathfrak{S}}$, справедливо неравенство: $|V_y(t_n)| \leqslant 3\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}_3$ - множество тех n, для которых $|V_y(t_n)| > 3\mathfrak{S}$. Полагая $k_2 = \big[9\mathfrak{S}\big]$, с учётом замечания к лемме 2.1 находим:

$$|\mathcal{A}_3| \cdot (3\mathfrak{S})^{2k_2} \leqslant \sum_n V_y^{2k_2}(t_n) \leqslant \sum_n \Big|\sum_{p\leqslant y} \frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}}\Big|^{2k_2} \leqslant k_2! M\mathfrak{S}^{k_2} + y^{2k_2}\log N <$$

$$< 3\sqrt{k_2}M\left(\frac{k_2\mathfrak{S}}{e}\right)^{k_2},$$

откуда и следует искомая оценка.

Лемма 6.8. *Пусть*

$$K(s) \,=\, \sum_{n\in\mathcal{A}} \exp\big\{sV_y(t_n)\big\}.$$

Тогда для комплексных s с условием $|s| \leqslant 1$ справедливо равенство

$$K(s) \,=\, MF_y(s)\big(1 \,+\, \theta(\log N)^{-3}\big),$$

в котором $F_y(s) = \prod\limits_{p\leqslant y} J_0\left(\dfrac{is}{\sqrt{p}}\right)$.

Доказательство. Подобно тому, как это делалось при доказательстве леммы 2.13, положим $K = \big[3e^2\mathfrak{S}\big] + 1$. Тогда, определяя $R_1(s)$ соотношениями

$$K(s) \,=\, \sum_{n\in\mathcal{A}}\left(\sum_{k=0}^{K} + \sum_{k>K}\right)\frac{s^k}{k!}\,V_y^k(t_n) \,=\, K_1(s) \,+\, R_1(s),$$

получим:

$$|R_1(s)| \leqslant M\sum_{k>K}\frac{(3\mathfrak{S})^k}{k!} \,<\, M\sum_{k>K}\left(\frac{3\mathfrak{S}e}{k}\right)^k \,<\, Me^{-22\mathfrak{S}}.$$

Далее, представим $K_1(s)$ в виде

$$\sum_{k=0}^{K}\frac{s^k}{k!}\sum_{n\in\mathcal{A}}V_y^k(t_n) \,=\, \sum_{k=0}^{K}\frac{s^k}{k!}\left(\sum_n V_y^k(t_n) \,-\, \sum_{n\in\mathcal{A}_3} V_y^k(t_n)\right) \,=\, K_2(s) \,-\, R_2(s)$$

и заметим, что

$$|R_2(s)| \leqslant |\mathcal{A}_3| \,+\, \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k!}\sum_{n\in\mathcal{A}_3}|V_y(t_n)|^k.$$

В силу замечания к лемме 2.1 и оценки леммы 6.7 имеем:

$$|R_2(s)| \leqslant M\delta_2 \,+\, \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k!}\left(|\mathcal{A}_3|\sum_n V_y^{2k}(t_n)\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant M\delta_2 \,+\, \sqrt{M\delta_2}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k!}\big(k!M\mathfrak{S}^k\big)^{1/2} \leqslant M\delta_2 \,+\, \frac{M\sqrt{\delta_2}}{\sqrt[4]{2\pi}}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\sqrt[4]{k}}\left(\frac{e\mathfrak{S}}{k}\right)^{k/2} \,<\, 43Me^{-4\mathfrak{S}}.$$

Чтобы вычислить $K_2(s)$, положим для краткости

$$v_k \,=\, \sum_n V_y^k(t_n), \quad U(t) \,=\, \sum_{p\leqslant y} \frac{p^{it}}{\sqrt{p}}.$$

Если $k\leqslant K$ - нечётное число, то в силу леммы 1.2 имеем: $|v_k| < y^k \log N < M^{0.25}$. При чётном $k = 2m$ с помощью леммы 1.4 приходим к равенству

$$v_k \,=\, 2^{-\,2m}\binom{2m}{m} m! H_y^{(m)}(0) \,+\, \theta M^{0.25}, \quad \text{где} \quad H_y(z) \,=\, \prod_{p\leqslant y} J_0\biggl(2i\sqrt{\frac{z}{p}}\biggr).$$

Следовательно, в силу леммы 1.17 имеем:

$$\begin{aligned} K_2(s) \,&=\, M \sum_{0\leqslant m\leqslant 0.5K} \frac{H_y^{(m)}(0)}{m!}\biggl(\frac{s}{2}\biggr)^{2m} \,+\, 2\theta M^{0.25} \,= \\ &=\, M\biggl(\sum_{m=0}^{+\infty} - \sum_{m>0.5K}\biggr)\frac{H_y^{(m)}(0)}{m!}\biggl(\frac{s}{2}\biggr)^{2m} \,+\, 2\theta M^{0.25} \,= \\ &=\, MF_y(s) \,+\, \theta M \sum_{m>0.5K} \frac{1}{m!}\biggl(\frac{\mathfrak{S}}{4}\biggr)^m \,+\, 2\theta M^{0.25} \,= \\ &=\, MF_y(s) \,+\, \theta M e^{-\,30\mathfrak{S}}, \end{aligned}$$

где

$$F_y(s) = H_y\biggl(\frac{s^2}{4}\biggr) = \prod_{p\leqslant y} J_0\biggl(\frac{is}{\sqrt{p}}\biggr).$$

Сложив полученные выше оценки, находим:

$$K(s) = M\bigl(F_y(s) \,+\, 44\theta\mathfrak{S}e^{-\,4\mathfrak{S}}\bigr).$$

Оценивая модуль функции $F_y(s)$ снизу в круге $|s|\leqslant 1$ подобно тому, как это делалось при доказательстве леммы 2.13, находим:

$$\min_{|s|\leqslant 1} |F_y(s)| \,=\, \min_{|s|\leqslant 1}\biggl|H_y\biggl(\frac{s^2}{4}\biggr)\biggr| \,>\, 0.99e^{-\,0.25\mathfrak{S}}.$$

Таким образом,

$$K(s) \,=\, MF_y(s)\bigl(1 \,+\, 44\theta\mathfrak{S}|F_y(s)|^{-1}e^{-4\mathfrak{S}}\bigr) \,=\, MF_y(s)\bigl(1 \,+\, \theta(\log N)^{-\,3}\bigr).$$

Лемма доказана.

Теорема 6.2. *Пусть $f(u)$ - произвольная монотонная функция, неограниченно возрастающая при $u\to+\infty$ и удовлетворяющая на промежутке $N\leqslant u\leqslant N+M$ неравенствам*

$$1 \ll f(u) \leqslant \sqrt{\log\log u},$$

и пусть $\mathcal{F} = f(N)$. Тогда на указанном промежутке найдётся по крайней мере

$$\frac{M\mathcal{F}}{13\sqrt{L}}\,\exp\biggl(-\,\frac{3L}{\mathcal{F}^2}\biggr)$$

номеров n, для которых выполнены неравенства

$$\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_n\right)\right| \,<\, \exp\left(-\frac{1}{\mathcal{F}}\,\log\log N\right).$$

Доказательство. Пусть $K_N(s)$ - производящая функция моментов дискретной случайной величины ξ_N со значениями $V_y(t_n)$, $N<n\leqslant N+M$, $n\in\mathcal{A}$. Тогда из лемм 6.7 и 6.8 несложно заключить, что в круге $|s|\leqslant 1$ справедливы равенства

$$K_N(s) \,=\, |\mathcal{A}|^{-1}\sum_{n\in\mathcal{A}}\exp\left\{sV_y(t_n)\right\} \,=\, |\mathcal{A}|^{-1}MF_y(s)\left(1\,+\,\theta(\log N)^{-3}\right) \,=$$

$$=\, F_y(s)\left(1\,-\,9\theta e\sqrt{\mathfrak{S}}e^{-9\mathfrak{S}}\right)^{-1}\left(1\,+\,\theta(\log N)^{-3}\right).$$

Далее, заменяя $F_y(s)$ величиной

$$\exp\left(\frac{s^2}{4}\,\mathfrak{S}\right)F(s)\left(1\,+\,\theta y^{-1}\right),\quad\text{где}\quad F(s)\,=\,\prod_p\varphi\left(\frac{s^2}{4p}\right)$$

($\varphi(u)$ - функция, введённая по ходу доказательства леммы 1.6), находим:

$$K_N(s) \,=\, \exp\left(\frac{s^2}{4}\,\mathfrak{S}\right)F(s)\left(1\,+\,2\theta(\log N)^{-3}\right).$$

Полагая $\sigma(N)\,=\,\mathfrak{S}$, $\kappa(N)\,=\,(\log N)^{-3}$, $u\,=\,\sqrt{6L}/\mathcal{F}$ в лемме 8.П и замечая, что $u\geqslant\sqrt{6}>1$, заключаем, что по крайней мере для

$$\frac{|\mathcal{A}|}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_u^{+\infty}e^{-v^2/2}\,dv\right)\left(1\,+\,O(\mathcal{F}^{-1})\right) \,>\, 0.99\,\frac{|\mathcal{A}|}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-u^2/2}}{2u} \,>\, \frac{2M\mathcal{F}}{25\sqrt{L}}\,\exp\left(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2}\right)$$

точек Грама выполнено неравенство $V_y(t_n)\leqslant -\,u\sqrt{\mathfrak{S}/2}$. Пользуясь леммой 6.6 и исключая из этого числа не более $M\delta_1$ точек t_n, при $\mathcal{F}\geqslant 9ec_6$ для оставшихся в количестве не менее

$$\frac{2M\mathcal{F}}{25\sqrt{L}}\,\exp\left(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2}\right)\,-\,13M\exp\left(-\frac{2L}{3\mathcal{F}ec_6}\right) \,=$$

$$=\,\frac{2M\mathcal{F}}{25\sqrt{L}}\,\exp\left(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2}\right)\left(1\,-\,\frac{1700\sqrt{L}}{\mathcal{F}}\exp\left(-\frac{2L}{3\mathcal{F}ec_6}\left(1\,-\,\frac{9ec_6}{2\mathcal{F}}\right)\right)\right) \,>$$

$$>\,\frac{M\mathcal{F}}{13\sqrt{L}}\,\exp\left(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2}\right)$$

имеем неравенства:

$$\log\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_n\right)\right| \,\leqslant\, C(t_n) \,\leqslant\, V_y(t_n)+\frac{2L}{3\mathcal{F}} \,\leqslant\, -\,\frac{L\sqrt{3}}{\mathcal{F}}+\frac{2L}{3\mathcal{F}} \,<\, -\,\frac{L}{\mathcal{F}}.$$

Теорема доказана.

Следствие. При любом фиксированном $\delta>0$ и $N\geqslant N_0(\varepsilon,\delta)$ имеет место оценка:

$$\sum_n\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_n\right)\right|^{-1} \,>\, M\exp\left(\frac{\log\log N}{(\log\log\log N)^{\delta}}\right).$$

Доказательство. Положим в теореме $f(u) = 0.5(\log\log\log u)^\delta$; получим:

$$\sum_n \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_n\right)\right|^{-1} \;>\; \frac{M\mathcal{F}}{13\sqrt{L}}\,\exp\left(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2}\right)\cdot\exp\left(\frac{L}{\mathcal{F}}\right) \;>\; M\exp\left(\frac{L}{(\log L)^\delta}\right),$$

что и требовалось.

Приведённые в Приложении III численные данные о значениях дзета-функции Римана в точках Грама позволяют предположить существование бесконечного числа пар точек t_n, t_{n+1}, для которых оба значения $\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)$, $\zeta\left(\frac{1}{2}+it_{n+1}\right)$ будут очень маленькими. Более точно, весьма вероятным представляется предположение о том, что

$$\liminf_{n\to+\infty}\left(\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_n\right)\right| \,+\, \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_{n+1}\right)\right|\right) \;=\; 0,$$

или даже

$$\liminf_{n\to+\infty}\left(\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_n\right)\right| \,+\, \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_{n+1}\right)\right|\right)f(n) \;=\; 0,$$

где $f(x)$ - некоторая положительная, неограниченная и монотонно возрастающая функция. Подобные предположения можно формулировать для троек, четвёрок и вообще для любого фиксированного числа k соседних точек Грама $t_{n+1},\dots,t_{n+k}$.

Аргументами в пользу истинности этих предположений (за исключением численных данных) мы не располагаем. Вместе с тем, ниже мы приводим доказательство теоремы, которая утверждает существование бесконечного числа пар соседних точек Грама t_n и t_{n+1}, в каждой из которых логарифм модуля дзета-функции оказывается существенно меньшим своего «среднего» значения $\sqrt{\log\log n}$.

Теорема 6.3. *На промежутке $N < n \leqslant N+M$ найдётся не менее*

$$\frac{0.1M}{\sqrt{\log\log\log N}}$$

номеров n таких, что[3)]

$$\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_n\right)\right| \;<\; R, \quad \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_{n+1}\right)\right| \;<\; R, \quad R=\exp\left\{3.24\sqrt{\frac{\log\log N}{\log\log\log N}}\right\}.$$

Доказательство. Положим $h \;=\; 1.81\sqrt{\dfrac{2\pi}{\log L}}$ и рассмотрим множество E_1 тех n, для которых

$$\log\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_n\right)\right| \leqslant \frac{h}{\pi\sqrt{2}}\,\sqrt{\log\log N}. \tag{6.21}$$

Дословно повторяя рассуждения теоремы 2.4 и строя приближение для функции распределения величин $C(t_n)$, несложно заключить, что число m_1 номеров n, по-

[3)] Используя теорему 5 из работы Р.Н. Бояринова "О распределении значений дзета-функции Римана", *Доклады РАН*, **438**:1(2011), 14-16, теорему 6.3 можно доказать с гораздо меньшим R, а именно с $R = (\log\log N)^c$, где $c > 0$ - некоторая постоянная.

павших в E_1, оценивается снизу величиной

$$M\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{h} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du - \frac{1.78}{\sqrt{\log L}}\right) = M\left(\frac{1}{2} + \int_{0}^{h} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du - \frac{1.78}{\sqrt{\log L}}\right) >$$
$$> M\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{h}\left(1 - \frac{u^2}{2}\right)du - \frac{1.78}{\sqrt{\log L}}\right) =$$
$$= M\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(h - \frac{h^3}{6}\right) - \frac{1.78}{\sqrt{\log L}}\right) >$$
$$> M\left(\frac{1}{2} + 0.02\sqrt{\frac{2\pi}{\log L}}\right).$$

Аналогично, определив E_2 как множество номеров n, $N < n \leqslant N + M$, удовлетворяющих условию

$$\log\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2} + it_{n+1}\right)\right| \leqslant \frac{h}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\log\log N}, \tag{6.22}$$

число m_2 его элементов оценим снизу величиной

$$M\left(\frac{1}{2} + 0.02\sqrt{\frac{2\pi}{\log L}}\right).$$

Так как и E_1, и E_2 содержатся во множестве $N < n \leqslant N + M$, то их пересечение непусто и состоит из не менее чем

$$2 \cdot M\left(\frac{1}{2} + 0.02\sqrt{\frac{2\pi}{\log L}}\right) - M = 0.04M\sqrt{\frac{2\pi}{\log L}}$$

элементов. Но для каждого из n, принадлежащих пересечению E_1 и E_2, выполнены оба неравенства (6.21) и (6.22). Замечая, что

$$\frac{h}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\log\log N} < 3.24\sqrt{\frac{\log\log N}{\log\log\log N}},$$

приходим к утверждению теоремы.

Замечание. Здесь мы пользуемся утверждением, на первый взгляд более слабым, чем то, которое получилось бы применением теоремы Хванга (лемма 8.П). Однако приближение функции распределения $\Psi(u)$ нормированных величин $C(t_n)$, полученное таким образом, годится лишь в области $|u| \geqslant 1$, в то время как мы пользуемся приближением $\Psi(u)$ в ситуации, когда $u \to +0$.

Приложение I. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 (ван-дер Корпут). *Пусть $f(x)$ в интервале $a < x < b$ – вещественная дифференцируемая функция, производная которой монотонна, знакопостоянна и при постоянном δ с условием $0 < \delta < 1$ удовлетворяет неравенству $|f'(x)| \leqslant \delta$. Тогда*

$$\sum_{a<x\leqslant b} e^{2\pi i f(x)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx + \theta\left(3 + \frac{2\delta}{1-\delta}\right).$$

Если, сверх того, a и b - целые, то число 3 в последнем слагаемом можно заменить на 1.

Доказательство см. в [51, гл. 2].

Вывод неравенства для леммы 1.10 для коэффициентов ϖ_n разложения

$$\varphi(v) \,=\, e^{-v} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{v^m}{m!} \,=\, e^{-v} J_0(2i\sqrt{v}).$$

использует оценки модуля функции Бесселя $J_0(z)$ на полуокружностях вида $|z| = R$, $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

В случае, когда $z = R$ - вещественное положительное число, из классических разложений для $J_0(z)$ легко получить неравенство

$$|J_0(z)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \left(1 \,+\, \frac{1}{4R}\right).$$

При замене вещественного z комплексным числом $Re^{i\psi}$ с условием $|\psi| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$, где $0 \leqslant \delta < \frac{\pi}{2}$, эта оценка заменяется следующей:

$$|J_0(z)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \left(1 \,+\, \frac{c}{R}\right) e^{R|\sin\psi|},$$

где $c = c(\delta)$ - некоторая постоянная.

Ввиду того, что в доступных нам руководствах по бесселевым функциям[1)] не

[1)] В их числе: Р.О. Кузьмин, «Бесселевы функции» – Л.-М., ГТТИ, 1933; Е.Т. Уиттекер, Г.Н. Ватсон, «Курс современного анализа», Ч.2 «Трансцендентные функции» – Л.-М., 1933; Г.Н. Ватсон, «Теория бесселевых функций» – М., ИЛ, 1949; Э. Грей, Г.Б. Мэтьюз, «Функции Бесселя и их приложения к физике и механике», 2-е изд. – М., ИЛ, 1953; Г. Бейтмен, А. Эрдейи, «Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены» – М., Наука, 1966; Б.К. Коренев, «Введение в теорию бесселевых функций» – М., Наука, 1971.

удалось обнаружить необходимой для дальнейших выкладок оценки постоянной $c(\delta)$ для $\delta = 0$[2)], мы сочли возможным поместить здесь полное доказательство оценки такого типа.

Лемма 2. *Для любого $z = Re^{i\psi}$ с условием $|\psi| \leqslant \frac{\pi}{2}$ справедливо неравенство:*

$$|J_0(z)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi R}}\left(1 + \frac{1}{2R\sqrt{2}}\right)e^{R|\sin\psi|}.$$

Доказательство. Согласно формуле (1) из [52, §3.61], имеем:

$$J_0(z) = \frac{1}{2}\big(H_0^{(1)}(z) + H_0^{(2)}(z)\big), \tag{1}$$

где $H_0^{(1)}(z), H_0^{(2)}(z)$ - функции Бесселя третьего рода. Далее, положив $\beta = -\frac{\pi}{4}$ в формуле (3) из [52, §6.12], для z с условием $-\frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}$ получим:

$$H_0^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{i(z-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty e^{-\pi i/4}} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left(1 + \frac{iu}{2z}\right)^{-\frac{1}{2}} du.$$

Пользуясь тождеством

$$\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{p-1}\binom{\frac{1}{2}}{m}\left(\frac{u}{2iz}\right)^m + p\binom{\frac{1}{2}}{p}\left(\frac{u}{2iz}\right)^p \int\limits_0^1 (1-t)^{p-1}\left(1 + \frac{iut}{2z}\right)^{-p-\frac{1}{2}} dt,$$

которое справедливо при любом целом $p \geqslant 1$, находим:

$$H_0^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{i(z-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sum_{m=0}^{p-1}\binom{\frac{1}{2}}{m} \frac{\Gamma\big(m+\frac{1}{2}\big)}{(2iz)^m} + R_p^{(1)}(z)\right\},$$

где

$$|R_p^{(1)}(z)| = \left| p\binom{\frac{1}{2}}{p} \int\limits_0^{\infty e^{-\pi i/4}} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left(\frac{u}{2iz}\right)^p \int\limits_0^1 (1-t)^{p-1}\left(1 + \frac{iut}{2z}\right)^{-p-\frac{1}{2}} dt du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p}{(2|z|)^p}\left|\binom{\frac{1}{2}}{p}\right| \int\limits_0^1 (1-t)^{p-1}\left| \int\limits_0^{\infty e^{-\pi i/4}} e^{-u}u^{p-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{iut}{2z}\right)^{-p-\frac{1}{2}} du\right| dt.$$

[2)] Некоторое исключение составляет упомянутая выше книга Э. Грея и Г.Б. Мэтьюза, в §3 гл. V которой содержится вывод асимптотической формулы для т.н. видоизменённой функции Бесселя 2 рода $K_n(z)$. Следствием этой формулы оказывается неравенство

$$c(\delta) \leqslant \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{(\sin\delta)^{3/2}}\right)$$

которое справедливо для $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$. Поскольку правая его часть стремится к бесконечности при $\delta \to 0+$, для наших целей такая оценка непригодна.

Пусть теперь $0 < t \leqslant 1$, $z = Re^{i\psi}$. Тогда

$$\frac{iut}{2z} \,=\, \frac{|u|te^{\frac{\pi i}{4}}}{2Re^{i\psi}} \,=\, re^{i\left(\frac{\pi}{4}-\psi\right)}, \quad \text{где} \quad r \,=\, \frac{|u|t}{2R}$$

Если угол ψ изменяется от $-\,\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то величина $\frac{\pi}{4} - \psi$ убывает от $\frac{3\pi}{4}$ до $-\,\frac{\pi}{4}$, причём наименьшее расстояние от точки $1+re^{i\left(\frac{\pi}{4}-\psi\right)}$ до начала координат отвечает значению $\psi = -\,\frac{\pi}{2}$ и составляет, таким образом,

$$\left|1 \,+\, re^{i\left(\frac{\pi}{4}-\psi\right)}\right| \,=\, \sqrt{\left(1 \,-\, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 \,+\, \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} \,=\, \sqrt{\frac{1}{2} \,+\, \left(r \,-\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Итак, при любых рассматриваемых u, z и t имеем:

$$\left|1 \,+\, \frac{iut}{2z}\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому, положив $u = ve^{-pii/4}$ в последнем интграле по u, получим:

$$\left| \int\limits_0^{\infty e^{-\,\pi i/4}} e^{-u} u^{p-\frac{1}{2}} \left(1 \,+\, \frac{iut}{2z}\right)^{-\,p-\frac{1}{2}} du \right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} e^{-\,\frac{v}{\sqrt{2}}} v^{p-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{2}\right)^{p+\frac{1}{2}} dv \,=\, 2^p \sqrt{2}\,\Gamma\left(p+\tfrac{1}{2}\right),$$

откуда

$$|R_p^{(1)}(z)| \leqslant \frac{p}{(2|z|)^p} \left| \binom{\frac{1}{2}}{p} \right| 2^p \sqrt{2}\,\Gamma\left(p+\tfrac{1}{2}\right) \int\limits_0^1 (1-t)^{p-1} dt \,=\, \frac{\sqrt{2\pi}}{2p-1} \left(\frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p}\right)^2 \frac{1}{|z|^p}.$$

Таким образом,

$$H_0^{(1)}(z) \,=\, \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)} \left\{ \sum_{m=0}^{p-1} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \left(\frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m}\right)^2 \frac{1}{(2iz)^m} + \right.$$
$$\left. + \,\frac{\theta\sqrt{2}}{2p-1} \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1} \left(\frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p}\right)^2 \frac{1}{|z|^p} \right\}.$$

В частности, беря $p = 1$, придём к формуле

$$H_0^{(1)}(z) \,=\, \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)} \left\{1 \,+\, \frac{\theta_1}{2|z|\sqrt{2}}\right\},$$

справедливой для $|\psi| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Подобным образом, отправляясь от формулы

$$H_0^{(2)}(z) \,=\, \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\,i(z-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty e^{\pi i/4}} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(1 \,-\, \frac{iu}{2z}\right)^{-\,\frac{1}{2}} du,$$

которая справедлива для $-\frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$ (см. [52, §6.12]), при любом целом $p \geqslant 1$ и любом z с условием $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}$ устанавливаем равенство

$$H_0^{(2)}(z) \,=\, -\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}\left\{\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}\left(\frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}\right)^2\frac{1}{(2iz)^m}+\right.$$
$$\left.+\,\frac{\theta\sqrt{2}}{2p-1}\frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}\left(\frac{1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}\right)^2\frac{1}{|z|^p}\right\}.$$

Отсюда при $p=1$ находим:

$$H_0^{(2)}(z) \,=\, \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}\left\{1\,+\,\frac{\theta_2}{2|z|\sqrt{2}}\right\},$$

Возвращаясь к формуле (1), будем иметь:

$$|J_0(z)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi R}}\left(1\,+\,\frac{1}{2R\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2}\left(e^{R\sin\psi}\,+\,e^{-R\sin\psi}\right) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi R}}\left(1\,+\,\frac{1}{2R\sqrt{2}}\right)e^{R|\sin\psi|}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *При любых $x > 1$ и $n \geqslant 2$ справедливы следующие соотношения:*

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} \,=\, \log\log x \,+\, c \,+\, \frac{\theta}{(\log x)^2}, \tag{2}$$

где $-0.5 \leqslant \theta \leqslant 1$, а $c = 0.261\,497\,212\,847\ldots$ - постоянная Мертенса;

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{a\sqrt{n}}{\log n}, \quad a = 2.784; \tag{3}$$

$$\pi(n) \,=\, \sum_{p\leqslant n} 1 \leqslant \frac{bn}{\log n}, \quad b = 1.255\,06, \tag{4}$$

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\log p}{p} \,<\, \log x. \tag{5}$$

Доказательство соотношений (2), (4) и (5) см. в статье [53]. Оценка (3) при $n \leqslant 1.5\cdot 10^6$ проверяется непосредственно (например, с помощью программного пакета «Wolfram Mathematica 7.0.0»), а при $n > 1.5\cdot 10^6$ следует из (4) с помощью преобразования Абеля.

Лемма 4 (А.А. Карацуба). *Пусть $T \geqslant T_0(\varepsilon)$, $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\varepsilon}$, где $\alpha = \frac{27}{82}$, $\varepsilon_1 = 0.9\,\varepsilon$. Тогда при любом σ с условием $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$ имеет место неравенство:*

$$N(\sigma, T+H) \,-\, N(\sigma, T-H) \,<\, 13H(\log T)T^{-0.1\,\varepsilon(2\sigma-1)}.$$

Доказательство этой плотностной теоремы см. в [54]. Вычисление постоянной в правой части неравенства содержится в обзорной статье [39]).

Лемма 5. *При $2 \leqslant x \leqslant t^2$ справедливы неравенства:*

$$\sum_{\varrho} \frac{\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \leqslant \frac{5}{3}\left(\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} + \frac{1}{2}\log t + 3\right);$$

$$\left|\frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)}\right| < 2.6\left|\sum_{m \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}+it}}\right| + 0.8\log t + 4.82.$$

Доказательство. Все эти неравенства принадлежат Сельбергу [38]. По поводу вычисления постоянных в правых частях см. обзорную статью [6].

Лемма 6. *Пусть $e^{16} \leqslant x \leqslant t^\delta$, $110\delta = 1$, и пусть*

$$R(t) \;=\; S(t) \;+\; \frac{1}{\pi} \sum_{m \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}}} \frac{\sin(t \log m)}{\log m}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\pi|R(t)| \leqslant \left(\sigma_{x,t} - \tfrac{1}{2}\right)\left(A\log t + Br(x,t) \;+\; C \;+\; \sum_{\varrho} \frac{\kappa(\varrho)}{\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) \;+\; (t - \gamma)^2}\right),$$

в котором

$$A = \frac{13}{6e} + 1.8, \quad B = \frac{13}{3e} + 2.6, \quad C = \frac{52}{3e} + 10.82,$$

$$r(x,t) \;=\; \left|\sum_{m \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{m^{\sigma_{x,t}+it}}\right|, \quad \kappa(\varrho) \;=\; \int_{\frac{1}{2}}^{\sigma_{x,t}} \frac{|t - \gamma| \cdot |\sigma_{x,t} + \sigma - 2\beta|}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2}\, d\sigma.$$

Кроме того, если нуль $\varrho = \beta + i\gamma$ удовлетворяет условию

$$\left|\beta \;-\; \frac{1}{2}\right| \;>\; \frac{1}{2}\left(\sigma_{x,t} \;-\; \frac{1}{2}\right),$$

то для интеграла $\kappa(\varrho)$ имеет место оценка:

$$\kappa(\varrho) \;<\; 2\left(\sigma_{x,t} \;-\; \frac{1}{2}\right).$$

Доказательство. Это неравенство также заимствовано из работы Сельберга [38]. Вычисление постоянных A, B и C, а также постоянной в оценке интеграла $\kappa(\varrho)$ см. в [6, теорема 1].

Лемма 7 (неравенство Берри-Эссеена). *Пусть $F(x)$ и $G(x)$ - функции распределения, причём $G'(x) \leqslant B < +\infty$ при любом x, и пусть $f(t)$, $g(t)$ - отвечающие им характеристические функции. Тогда при любом $\lambda > 0$ имеет место оценка:*

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leqslant a\frac{B}{\lambda} + b\int_0^\lambda \frac{|f(t) - g(t)|}{|t|}\, dt,$$

где $a = 4.438998$, $b = 0.594499$.

Доказательство. Это утверждение следует из того варианта неравенства Берри-Эссеена, который содержится в работе И.Г. Шевцовой [55]. В нём следует положить ядро $p(x)$ равным

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

и затем минимизировать по α выражение

$$a(\alpha)=\frac{2\alpha\, j(\alpha)}{4j(\alpha)-1},\quad j(\alpha)=\int_0^\alpha p(x)\,dx.$$

Лемма 8. *Пусть $\{\xi_N\}$ - последовательность случайных величин. Предположим, что существует фиксированное число $r>0$ и положительные параметры $\sigma(N)$ и $\kappa(N)$, неограниченно возрастающие при $N\to+\infty$, такие, что для производящей функции $K_N(s)=\mathbf{E}(e^{s\xi_N})$ моментов случайной величины ξ_N в круге $|s|\leqslant r$ справедливо равенство*

$$K_N(s)=\exp\left\{\frac{s^2}{4}\,\sigma(N)\right\}\Phi(s)\big(1\,+\,O(\kappa^{-1}(N))\big),$$

где функция $\Phi(s)$ не зависит от N, аналитична в круге $|s|\leqslant r$, причём $\Phi(0)=1$, а постоянная в знаке O - абсолютная. Тогда для функции распределения

$$F_N(u)=\mathbf{P}\left\{\frac{\xi_N\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma(N)}}\leqslant u\right\}$$

нормированной случайной величины ξ_N при любом $u=o\big(\min(\kappa(N),\sqrt{\sigma(N)})\big)$, $u>1$, справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1-F_N(u)}{1-G(u)}\;=\;1+O\big(r(u;N)\big),\quad \frac{F_N(-u)}{G(-u)}\;=\;1+O\big(r(u;N)\big),$$

где

$$r(u;N)\;=\;u\left(\frac{1}{\kappa(N)}\;+\;\frac{1}{\sqrt{\sigma(N)}}\right),$$

а постоянные в знаках O являются абсолютными.

Эта лемма является частным случаем теоремы из работы Хванга [56].

Лемма 9. *При $t>51.4$ имеет место оценка:*

$$|S(t)|\;<\;0.137\log t+0.443\log\log t+4.35.$$

Доказательство см. в [57] (различные варианты этого неравенства были получены в разное время Х. фон Мангольдтом, Дж. Гроссманном, Р. Дж. Бэклундом, Дж. Б. Россером и Т. С. Труджианом. Подробную библиографию по этому вопросу см. в [58]).

Лемма 10. *Пусть a_n - произвольная последовательность комплексных чисел. Тогда при любых A,B,Y с условиями $0<A\leqslant B$, $Y\geqslant 2$ справедливо равенство*

$$\int_B^{A+B}\left|\sum_{m\leqslant Y}a_m m^{it}\right|^2 dt=A\sum_{m\leqslant Y}|a_m|^2+\theta c\sum_{m\leqslant Y}m|a_m|^2,$$

где $c > 0$ - некоторая абсолютная постоянная.

Доказательство см. в [16, теорема 5.2].

Лемма 11. (Б. Конри) *При $t > t_0 > 1$ имеет место неравенство:*

$$N_0(t) > \left(0.4 + 7 \cdot 10^{-3}\right) N(t).$$

Доказательство см. в [59].

Лемма 12. *Пусть $0 < \delta < 10^{-7}$ - сколь угодно малое фиксированное число, $T \geqslant T_0(\delta) > 0$, $T^{\alpha+\delta_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\delta}$, где $\alpha = \frac{27}{82}$, $\delta_1 = 0.9\delta$. Тогда справедливы неравенства:*

$$\sup_{T-H \leqslant t \leqslant T+2H} \{\pm S(t)\} \geqslant \frac{\delta^{\frac{5}{4}}}{1000} \left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Существование на «длинном» промежутке $(T, 2T]$ чисел T_j таких, что

$$(-1)^j S(T_j) \geqslant c\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad j = 1, 2,$$

где $c > 0$ - некоторая абсолютная постоянная, было впервые доказано К.-М. Тсангом в [40] (см. также [60]). Доказательство неравенств из условия леммы для случая $H = T^{\alpha+\delta}$ проводится, по сути, тем же методом, но с использованием плотностной теоремы А.А. Карацубы (лемма 4.П; подробнее см. [6]). Это же доказательство практически дословно переносится и на случай $T^{\alpha+\delta_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\delta}$.

Лемма 13. *Если верна гипотеза Римана, то при любом $T > T_0 > 0$ и любом H с условием*

$$(\log T)(\log\log T)^{-\frac{3}{2}} < H \leqslant \frac{T}{3}$$

справедливы неравенства:

$$\sup_{T-H < t \leqslant T+2H} \{\pm S(t)\} \geqslant \frac{1}{90\pi} \left(\frac{\log H}{\log\log H}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Доказательство см. в [61].

Лемма 14. *Если верна гипотеза Римана, то при любом $T > T_0 > 0$ и любом H с условием*

$$\sqrt{\log\log T} \leqslant H \leqslant (\log T)(\log\log T)^{-\frac{3}{2}}$$

справедливы неравенства:

$$\sup_{T-H < t \leqslant T+2H} \{\pm S(t)\} \geqslant \frac{\sqrt{\log H}}{900 \log\log H}$$

Доказательство см. в [62].

Лемма 15 (К.-М. Тсанг, Р.Н. Бояринов). *Пусть $T \geqslant T_0(\varepsilon) > 0$, H - произвольное число с условием $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\varepsilon}$, и пусть*

$$\frac{(\log\log T)^2}{\log T} < h < \frac{1}{\sqrt{\log T}}. \tag{6}$$

Тогда справедливы равенства:

$$\int_T^{T+H} |S(t)|dt \;=\; \frac{H}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\log\log T}\left(1+\frac{\theta_1 c}{\sqrt{\log\log T}}\right), \tag{7}$$

$$\int_T^{T+H}\left|\int_0^h S(t+u)du\right|dt \;=\; \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\log\frac{1}{h}}\left(1+\frac{\theta_2 c}{\sqrt{\log\log T}}\right), \tag{8}$$

где $c = c(\varepsilon) > 0$ - достаточно большая постоянная.

Равенство (7) получится, если воспользоваться[3)] в доказательстве теоремы 5.2 из работы [40] плотностной теоремой А.А. Карацубы (лемма 4.П) вместо плотностной теоремы Сельберга, которая справедлива при $H \geqslant T^{0.5+\varepsilon}$. Равенство (8) получается аналогично.

Лемма 16. *При выполнении условий предыдущей леммы имеют место равенства:*

$$\int_0^T S(t)\,dt \;=\; O(\log T), \tag{9}$$

$$\int_T^{T+H} S^2(t)\,dt \;=\; \frac{H}{2\pi^2}(\log\log T)\left(1 \;+\; O\left(\frac{1}{\sqrt{\log\log T}}\right)\right). \tag{10}$$

Доказательство. Равенство (9) представляет собой классический результат Дж.И. Литтлвуда [15]. Асимптотическая формула (10) для случая $T^{0.5+\varepsilon} \leqslant H \leqslant T$ была впервые доказана А.Сельбергом в [38]. Её доказательство для случая $H = T^{\alpha+\varepsilon}$ содержится в статье [54] (по поводу вычисления постоянной в оценке остаточного члена см. [39]). Те же рассуждения остаются в силе и в случае $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\varepsilon}$.

Лемма 17 (А. Сельберг, К.-М. Тсанг, Р.Н. Бояринов). *Пусть $T \geqslant T_0(\varepsilon)$, $T^{0.5+\varepsilon} \leqslant H \leqslant T$. Тогда функция $S(t)$ имеет на промежутке $(T, T+H]$ не менее*

$$H(\log T)e^{-c_1(\log\log\log T)^2}$$

точек перемены знака. Если верна гипотеза Римана, то число точек указанного промежутка, в которых $S(t)$ меняет знак, оценивается снизу величиной

$$H(\log T)e^{-c_2\log\log\log T} \;=\; \frac{H\log T}{(\log\log T)^{c_2}}$$

(c_1, c_2 - некоторые постоянные, зависящие от ε).

[3)] Это реализовано в работе: Р.Н. Бояринов "О распределении значений дзета-функции Римана" (*Доклады РАН*, **438**:1(2011), 14-16.

Доказательство см. в [40].[4)]

Лемма 18. *Пусть* $T \geqslant T_0(\varepsilon)$, $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon_1 = 0.9\,\varepsilon$, *и пусть*

$$h = 4.39 \log\log\log\log T.$$

Тогда мера множества точек t *промежутка* $T \leqslant t \leqslant T + H$, *для которых интервал* $(t-h, t+h)$ *не содержит точек перемены знака функции* $S(t)$, *есть*

$$O\big(H(\log\log T)^{-0.5}\big).$$

Доказательство этого утверждения для случая $H = T^{\alpha+\varepsilon}$ см. в статье [61]. В случае $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\varepsilon}$ доказательство проводится аналогично.

Замечание. Оценка леммы была уточнена в работе Р.Н. Бояринова [63], в которой понижающий множитель $(\log\log T)^{-0.5}$ был заменён на

$$(\log\log T)^{-1}(\log\log\log T)^{-0.5}.$$

Лемма 19. *Пусть* $T^{\alpha+\varepsilon} \leqslant H \leqslant T$ *и пусть* $\mu(x)$ *- мера множества точек* t *промежутка* $T \leqslant t \leqslant T + H$, *для которых выполнено неравенство*

$$S(t) \leqslant \frac{x}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\log\log T}.$$

Тогда при любом фиксированном x *справедливо соотношение*

$$\mu(x) \sim \frac{H}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Доказательство этого утверждения с разной степенью точности оценки остаточного члена и для различных значений длины H исследуемого промежутка можно найти в работах [30], [32], [39], [40], [64].[5)]

Лемма 20. *Пусть* $s = \sigma + it$, *где* $10 \leqslant x \leqslant t^2$, $\sigma \geqslant \sigma_{x,t}$, *и пусть* $\zeta(s) \neq 0$. *Тогда*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{m \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^s} + \frac{13\theta}{3}\, x^{\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}} \left(\left| \sum_{m \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}+it}} \right| + \frac{1}{2}\log t + 4 \right)$$

Доказательство. Эта лемма заимствована из работы А. Сельберга [38]; вычисление постоянных в правой части равенства см. в статье [6] (в формулировке этой леммы в работе [6] содержится опечатка: вместо $\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2}$ должно быть $\frac{1}{4} - \frac{\sigma}{2}$).

Лемма 21. *Для вещественных* σ *и* t *с условиями* $|\sigma| \leqslant 2$, $|t| \geqslant 10$, $s = \sigma + it$ *справедливо равенство:*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\varrho} \frac{1}{s-\varrho} + \theta\big(\tfrac{1}{2}\log|t| + 3\big), \quad \text{где} \quad \sum_{\varrho} \frac{1}{s-\varrho} = \sum_{\operatorname{Im}\varrho > 0} \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{s-\overline{\varrho}} \right).$$

Доказательство. Эта лемма по сути принадлежит Э. Ландау [65, §§76-77]; вычисление постоянных в последнем слагаемом правой части см. в обзорной статье [6].

[4)] В главе 7 части I указанной работы содержится полное доказательство этого утверждения для случая $H = T^{0.5+\varepsilon}$. Случай $H = T^{27/82+\varepsilon}$ рассмотрен в работе Р.Н. Бояринова из предыдущего подстрочного примечания.

[5)] См. также работу Р.Н. Бояринова, указанную в примечании на стр. 261.

Приложение II. Фрагменты работ Грама, Хатчинсона, Титчмарша и Сельберга

Й.-П. Грам, «О нулях функции Римана $\zeta(s)$»

J.-P. Gram. *Note sur les zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann.* Acta mathematica, Vol. 27, 1903, p. 289-304.

Несмотря на то, что в последние годы появились многочисленные работы, посвящённые функции Римана $\zeta(s)$, вопросы, касающиеся её мнимых корней, всё ещё ожидают своего решения. Трудности в изучении этой функции, до сих пор не преодолённые, объясняются тем, что мы не располагаем подходящим её выражением, явным или неявным, которое могло бы послужить отправной точкой для серьёзного исследования.

Чтобы получить какие-либо результаты, способные пролить свет на теоретические вопросы, в последнее время я занимался вычислениями, основная цель которых заключалась в составлении таблицы значений функции $\xi(t)$ для вещественных значений аргумента.

В 1895 г.[1)] мною были опубликованы приближённые значения коэффициентов рядов, представляющих функции $\xi(t)$ и $\zeta(s)$, которые позволили мне сделать некоторые заключения о величинах наименьших корней α уравнения $\xi(t) = 0$, и для которых были получены следующие значения:

$$\alpha_1 = 14.135, \quad \alpha_2 = 20.82, \quad \alpha_3 = 25.1.$$

Хотя значения этих коэффициентов и были найдены с точностью до 16 знака, этих вычислений оказалось недостаточно, чтобы определить величины α с точностью, пригодной для дальнейшего их использования. Чтобы вычислить по меньшей мере α_1 с бóльшей точностью, я предпринял прямое вычисление $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$, $\zeta'\left(\frac{1}{2}\right)$, $\zeta''\left(\frac{1}{2}\right)$ уже с 28 верными знаками. Это позволило мне с той же точностью отыскать значения величин $\xi(0)$, $\xi''(0)$, а затем и $\left(D_t^2 \log \xi(t)\right)_{t=0}$. Наконец, вычислив значения $\log \xi(it)$ для $t = \pm\frac{2n+1}{2}$, $n < 15$, с помощью интерполяции я последовательно определил и старшие коэффициенты ряда $\log_e \xi(t)$.

Отсылая за деталями вычислений к уже упомянутой статье, укажу лишь, что в

[1)] *Note sur le calcul de la fonction* $\zeta(s)$. Bulletin de l'Académie de Copenhague 1895, p.303.

конечном итоге было найдено следующее разложение:

$$\begin{aligned}
-\log_e \xi(t) \;=\; & 0.6989'2226''7945'''3314^{IV}1529^{V}8362^{VI}0204^{VII}81 \\
& + 231'0499''3115'''4189^{IV}7078^{V}8932^{VI}3871^{VII}31 \qquad t^2 \\
& + 1858''6299'''6426^{IV}3484^{V}28 \qquad \cdot t^4 \\
& + 4''8057'''9771^{IV}3365^{V}663 \qquad \cdot t^6 \\
& + 165'''7579^{IV}2006^{V}235 \qquad \cdot t^8 \\
& + 6427^{IV}3282^{V}993 \qquad \cdot t^{10} \\
& + 26^{IV}4615^{V}5724^{VI} \qquad \cdot t^{12} \\
& + 1129^{V}0460^{VI}5 \qquad \cdot t^{14} \\
& + 4^{V}9332^{VI}2 \qquad \cdot t^{16} \\
& + \;\; 220^{VI}6 \qquad \cdot t^{18}.
\end{aligned}$$

Но и эти значения коэффициентов ещё не позволяют вычислить α_1 точнее, чем это было сделано ранее – отчасти потому, что мы не можем полностью доверять двум последним цифрам найденных коэффициентов, отчасти потому, что для вычисления α_1 с помощью симметрических функций $\sum \alpha^{-2n}$ нам необходимы значения $\sum \alpha^{-2n}$ для ещё бóльших n или же необходима предварительная оценка величин α_2, α_3 и т.д.

Эти трудности, казавшиеся мне непреодолимыми без проведения обширных вычислений, побудили меня оставить эти исследования в надежде, что кто-нибудь предложит иной метод вычисления коэффициентов упомянутого ряда или же непосредственного вычисления корней. Но, насколько мне известно, такой метод так и не был никем опубликован.

Что же касается величин α, то я не оставлял своих попыток прямого вычисления корней уравнения $\zeta(s) = 0$, или, что то же, нахождения тех вещественных или комплексных значений t, для которых $\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right) = 0$. Все же это предприятие казалось мне бесполезным, поскольку я сомневался в том, что мне удастся отыскать приближённую формулу, вполне пригодную для расчётов, о которых идёт здесь речь. Тем не менее, прошлой осенью я решился осуществить такую попытку и был поражён тем, с какой лёгкостью она удалась. Разумеется, и теперь ещё вычисление корня α требует значительных усилий, но теоретически новый метод позволяет, образно говоря, находить столько корней, сколько необходимо, лишь бы мы смогли обеспечить вычисление $\zeta(s)$ при любых значениях s, которые при этом потребуются.

Из определения следует, что

$$\zeta(s) \;=\; \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left[\sum_1^n n^{-s} \;-\; \frac{n^{1-s}}{1-s}\right],$$

в предположении, что вещественная часть $s > 0$. Применяя к сумме $\sum_n^\infty n^{-s}$ общую формулу суммирования, получим равенство:

$$\zeta(s) \;=\; \sum_1^n n^{-s} \;-\; \frac{n^{1-s}}{1-s} \;-\; \frac{1}{2}\, n^{-s} \;+\; \frac{s}{1\cdot 2}\, B_1\, n^{-s-1} \tag{1}$$

$$-\frac{s(s+1)(s+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,B_3\,n^{-s-3}\,+\,\ldots,$$

где через $B_1, B_3, \ldots$ обозначены числа Бернулли. Этот ряд является, вообще говоря, асимптотическим, и при вещественных s точность вычислений по этой формуле становится тем выше, чем большим берётся n. Например, при $n = 20$ значение $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$ получается с более чем 30 верными знаками.

Но как ведёт себя это выражение при комплексных s? Записав его в виде

$$\zeta(s) \,=\, \sum_1^n n^{-s} \,-\, n^{-s}\left[\frac{n}{1-s} \,+\, \frac{1}{2} \,-\, \frac{s}{2n}(B_1 \,+\, R)\right],$$

замечаем, что вопрос этот сводится к оценке слагаемого R,

$$R \,=\, -\,\frac{(s+1)(s+2)}{3\cdot 4\cdot n^2}\cdot B_3 \,+\, \frac{(s+1)(s+2)}{3\cdot 4\cdot n^2}\cdot\frac{(s+3)(s+4)}{5\cdot 6\cdot n^2}\,B_5\,\cdots$$

Рассмотрим величины

$$A_1 \,=\, -\,\frac{(s+1)(s+2)}{3\cdot 4\cdot n^2}, \quad A_2 \,=\, -\,\frac{(s+3)(s+4)}{5\cdot 6\cdot n^2} \quad \text{и т.д.},$$

которые позволяют представить последнее выражение в виде

$$R \,=\, A_1B_3 \,+\, A_1A_2B_5 \,+\, A_1A_2A_3B_7 \,+\, \cdots,$$

и положим $s = x + yi$. Так получим:

$$A_\nu \,=\, \frac{y^2 + \frac{1}{4} - \left(x + 2\nu - \frac{1}{2}\right)^2 - iy(2x + 4\nu - 1)}{(2\nu+1)(2\nu+2)n^2}.$$

Очевидно, что число n всегда может быть выбрано настолько большим, что как вещественные, так и мнимые части первых из величин A будут правильными дробями, а произведения последовательных величин A – образовывать убывающую последовательность.

Это характерное свойство асимптотического ряда будет, следовательно, иметь место и для ряда, представляющего функцию $\zeta(s)$.

В нашем случае речь пойдёт о вычислении значений $\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right)$.

При $x = \frac{1}{2}$, $y = t$ имеем:

$$A_\nu \,=\, \frac{\left(t^2 + \frac{1}{4}\right) - 4\nu^2 - 4\nu ti}{(2\nu+1)(2\nu+2)n^2},$$

или, полагая $t^2 + \frac{1}{4} = T$:

$$A_1 \,=\, \frac{(T-4) - 4ti}{3\cdot 4\cdot n^2},$$

$$A_2 \,=\, \frac{(T-16) - 8ti}{5\cdot 6\cdot n^2},$$

$$A_3 \,=\, \frac{(T-36) - 12ti}{7\cdot 8\cdot n^2} \quad \text{и т. д.}$$

В итоге формула примет вид

$$(2)\qquad \zeta\left(\tfrac{1}{2}+ti\right) = \sum_{1}^{n} n^{-\frac{1}{2}}\left(\cos t\log n - i\sin t\log n\right) - n^{\frac{1}{2}}\left(\cos t\log n - i\sin t\log n\right)$$

$$\times\left[\frac{n+2nti}{T} + \frac{1}{2} - \frac{1+2ti}{4n}\left(B_1 + A_1B_3 + A_1A_2B_5 + \cdots\right)\right] = C(t) + iS(t),$$

где $C(t)$ и $S(t)$ обозначают, соответственно, вещественную и мнимую части.

Чтобы вычислить $\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)$ по формуле (2) с 7 верными знаками при t, не превосходящем 50, достаточно взять $n = 20$. Для нахождения корней α с помощью этой формулы сперва составим небольшую таблицу значений $\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)$ в последовательных точках, которая позволила бы обнаружить возможные значения t, где $C(t)$ и $S(t)$ одновременно обращаются в нуль. Отыскивая таким образом приближённые границы для корней и вычисляя значения ζ в нескольких промежуточных точках, можно получить гораздо более точные значения корней путём линейной интерполяции. С помощью пятизначных таблиц логарифмов можно получить таким образом значения корней α с четырьмя верными знаками. Если бы мы таким способом установили, что α находится между двумя значениями t_1 и t_2, которые отличаются друг от друга не более чем на 10^{-4}, то последующий расчёт с 7 знаками почти наверняка добавил бы ещё две верные цифры, если этому не помешает накопление ошибок в последних разрядах. Что же касается наибольших значений $C(t)$ и $S(t)$, то по порядку они не превосходят единицы.

Пусть, например, оказалось, что

$$\zeta\left(\tfrac{1}{2} + 14.1347i\right) = +0.0000033 - 0.0000199i$$
$$\zeta\left(\tfrac{1}{2} + 14.1348i\right) = -0.0000092 + 0.0000587i;$$

полагая $\alpha_1 = 14.1347 + k\cdot 10^{-4}$, с помощью интерполяции получим:

$$k_1 = \frac{33}{125} = 0.264; \quad k_2 = \frac{199}{786} = 0.253.$$

Из этих двух скорректированных значений наилучшим является k_2; вычисление с 8 знаками приводит к значению $\alpha_1 = 14.1347251$, хотя последняя цифра может оказаться неверной.

Как видно, нахождение каждого корня требует значительных усилий; однако благодаря помощи в окончательных расчётах, любезно оказанной М.Х.С. Нильсеном, мне удалось найти первые 10 корней уравнения $\xi(t) = 0$, значения которых с 8 знаками приведены ниже:

$$\alpha_1 = 14.134725$$
$$\alpha_2 = 21.022040$$
$$\alpha_3 = 25.010856$$
$$\alpha_4 = 30.424878$$
$$\alpha_5 = 32.935057$$

$$\begin{aligned}\alpha_6 &= 37.586176\\ \alpha_7 &= 40.918720\\ \alpha_8 &= 43.327073\\ \alpha_9 &= 48.005150\\ \alpha_{10} &= 49.773832.\end{aligned}$$

Возможно, лишь последние цифры являются не вполне надёжными; впрочем, вычисления величин $C(t)$ и $S(t)$ дублируют друг друга, что служит хорошим подтверждением правильности расчёта. Это – все найденные корни, не превосходящие 50; приближённые значения нескольких следующих за ними таковы:

$$\alpha_{11} = 52.8,\ \alpha_{12} = 56.2,\ \alpha_{13} = 59.4,\ \alpha_{14} = 61.0,\ \alpha_{15} = 65.0.$$

Они позволяют проверить правильность расчёта приведённых выше коэффициентов разложения $\log\xi(t)$. Получим, соответственно:

$$\sum_1^{10}\alpha_\nu^{-12} = 158^{IV}7693^{V}0, \qquad \sum_1^{\infty}\alpha_\nu^{-12} = 158^{IV}7693^{V}4344,$$

$$\sum_1^{10}\alpha_\nu^{-12} = 7903^{V}3261^{VI}, \qquad \sum_1^{\infty}\alpha_\nu^{-14} = 7903^{V}3223^{VI}5$$

$$\sum_1^{10}\alpha_\nu^{-16} = 39^{V}4647^{VI}16, \qquad \sum_1^{\infty}\alpha_\nu^{-16} = 39^{V}4657^{VI}6,$$

откуда следует, что приведённые выше коэффициенты ряда для $\log\xi(t)$ верны с точностью до двух последних знаков.

Из наших расчётов можно заключить, что первые пятнадцать корней уравнения $\xi(t) = 0$ являются вещественными или же что их мнимые части ничтожно малы. То, что эти корни на самом деле вещественные, мы докажем ниже. Не видим мы и причины для того, чтобы и следующие корни вели себя как-то иначе. Проделанные расчёты, помимо сведений о поведении функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)$, позволяют вычислить $\log\xi(t)$ для значений $t < 50$ посредством указанного выше ряда и найденных значений для первых корней. Знание таких корней позволяет изучать периодические слагаемые формул для некоторых функций теории простых чисел.

Результаты проделанных вычислений наиболее интересны тем, чо обнаруживают нерегулярность в последовательности значений α. Весьма вероятно, что эти корни очень тесно связаны с простыми числами. Поиск такой зависимости, то есть способа, которым величины α выражаются через простые числа, явится предметом будущих исследований.

Помимо значений величин α мои расчёты доставляют и некоторые сведения по иному вопросу, не лишённому интереса. Дело в том, что существуют такие вещественные значения t, которые обращают в нуль либо вещественную, либо мнимую части $\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)$ и которые отличны от чисел α, служащих нулями и для вещественной, и для мнимой частей одновременно.

Положим

$$\zeta\left(\tfrac{1}{2}+ti\right) = C(t) + iS(t) = me^{i\varphi(t)}, \tag{3}$$

причём m возьмём равной модулю *левой части* с подходящим знаком; тогда $C(t)$ и $S(t)$ будут вещественными функциями t. Для одновременного выполнения равенств $C = 0$ и $S = 0$ необходимо, чтобы $m = 0$. Кроме того, равенство $C = 0$ имеет место и в случае, когда $\cos\varphi = 0$, а равенство $S = 0$ – в случае, когда $\sin\varphi = 0$. Величину φ несложно выразить в виде функции от t.

Пользуясь функциональным уравнением Римана

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) \;=\; \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

запишем

$$\zeta(1-s) \;=\; 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)\zeta(s).$$

Следовательно,

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} \;=\; 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s), \tag{4}$$

откуда при $s = \frac{1}{2} + ti$ будем иметь:

$$\frac{\zeta\big(\frac{1}{2}-ti\big)}{\zeta\big(\frac{1}{2}+ti\big)} \;=\; e^{-2i\,\varphi} \;=\; 2^{\frac{1}{2}-ti}\pi^{-\frac{1}{2}-ti}\cos\Big(\frac{\pi}{4} \,+\, \frac{\pi}{2}\,ti\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}+ti\Big). \tag{5}$$

Для отыскания φ достаточно найти логарифм правой части:

$$-2\,\varphi\,i \;=\; -ti\,\log 2\pi \,+\, \frac{1}{2}\log\frac{\cos\big(\frac{\pi}{4}\,+\,\frac{\pi}{2}\,ti\big)}{\cos\big(\frac{\pi}{4}\,-\,\frac{\pi}{2}\,ti\big)} \,+\, \frac{1}{2}\log\frac{\Gamma\big(\frac{1}{2}+ti\big)}{\Gamma\big(\frac{1}{2}-ti\big)}.$$

Но

$$\frac{1}{2}\log\frac{\cos\big(\frac{\pi}{4}\,+\,\frac{\pi}{2}\,ti\big)}{\cos\big(\frac{\pi}{4}\,-\,\frac{\pi}{2}\,ti\big)} \;=\; i\Big(\operatorname{arctg} e^{-\pi t} \,-\, \frac{\pi}{4}\Big),$$

и

$$\frac{1}{2}\log\frac{\Gamma\big(\frac{1}{2}+ti\big)}{\Gamma\big(\frac{1}{2}-ti\big)}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\log\frac{\frac{1}{2}+ti}{\frac{1}{2}-ti} \,+\, \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\left[2ti\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right) \,-\, \log\frac{\frac{1}{2}+\nu+ti}{\frac{1}{2}+\nu-ti}\right]\\
&= -i\operatorname{arctg} 2t \,+\, i\sum_{1}^{\infty}\left[t\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right) \,-\, \operatorname{arctg}\frac{t}{\nu+\frac{1}{2}}\right]\\
&= i\operatorname{Lim}\left[t\log(\omega+1) \,-\, \sum_{0}^{\omega}\operatorname{arctg}\frac{t}{\nu+\frac{1}{2}}\right]_{\omega=\infty} \;=\; iv.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$-\,2\,\varphi \;=\; -\,t\log 2\pi \,+\, \operatorname{arctg} e^{-\pi t} \,-\, \frac{\pi}{4} \,+\, v. \tag{6}$$

Величина, обозначенная через v, может быть приближённо найдена с помощью следующей общей формулы суммирования:

$$\sum_0^\omega f(\nu) = \int_0^\omega f(\nu)d\nu - \frac{1}{2}\big(f(\omega) - f(0)\big)$$

$$+\frac{B_1}{1\cdot 2}\big(f'(\omega) - f'(0)\big) - \frac{B_3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\big(f'''(\omega) - f'''(0)\big) + \dots .$$

При этом

$$\int_0^\omega \operatorname{arctg}\frac{t}{\nu+\frac{1}{2}}\,d\nu = \Big(\omega + \frac{1}{2}\Big)\operatorname{arctg}\frac{t}{\omega+\frac{1}{2}} + \frac{t}{2}\log\big(t^2 + \big(\omega+\tfrac{1}{2}\big)^2\big)$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2t - \frac{t}{2}\log\Big(t^2 + \frac{1}{4}\Big).$$

Величины $f(\omega), f'(\omega), f'''(\omega), \dots$ при $\omega = \infty$ обращаются в нуль; все прочие члены, содержащие ω, в сумме дают величину

$$t\log(\omega+1) - \big(\omega+\tfrac{1}{2}\big)\operatorname{arctg}\frac{t}{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{t}{2}\log\big(t^2 + \big(\omega+\tfrac{1}{2}\big)^2\big),$$

имеющую пределом при $\omega = \infty$ величину $-t$. В итоге получим:

$$v = \frac{t}{2}\log\big(t^2+\tfrac{1}{4}\big) - t - \frac{B_1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+\frac{1}{2}} + \frac{B_3}{12}\left(\frac{t}{\big(t^2+\frac{1}{4}\big)^3} - \frac{t}{\big(t^2+\frac{1}{4}\big)^2}\right) + \dots$$

и

$$(7)\qquad -2\,\varphi(t) = \frac{t}{2}\log\big(t^2+\tfrac{1}{4}\big) - t(1+\log 2\pi) + \operatorname{arctg} e^{-\pi t} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{12}\frac{t}{\big(t^2+\frac{1}{4}\big)}$$

с точностью до пренебрежимо малых слагаемых порядка, меньшего $\frac{1}{t}$.

Очевидно, что $\varphi(t) = -\varphi(-t)$, $\varphi(0) = 0$. Следующая небольшая табличка даёт некоторое представление о поведении $\varphi(t)$:

$t = 0$	$\varphi(t) =$	0.000
» 5	»	$+3.460$
» 10	»	$+3.067$
» 15	»	$+1.365$
» 20	»	-1.187
» 25	»	-4.371
» 30	»	-8.058
» 35	»	-12.164
» 40	»	-16.628
» 45	»	-21.405
» 50	»	-26.461
» 55	»	-31.766
» 60	»	-37.300

При достаточно больших t поведение величины $\varphi(t)$ определяется главным образом первыми членами формулы (7). Ограничиваясь лишь этими слагаемыми и заменяя $\frac{1}{2}\log\left(t^2+\frac{1}{4}\right)$ на $\log t$, получим следующее приближённое выражение:

$$-2\,\varphi(t) \;=\; t\log t \;-\; t(1+\log 2\pi) \;-\; \frac{\pi}{4},$$

или

$$-\,\frac{\varphi(t)}{\pi} \;=\; \frac{t}{2\pi}\Big(\log\frac{t}{2\pi} \;-\; 1\Big) \;-\; \frac{1}{8}$$

с ошибкой порядка $\dfrac{1}{t}$.

Этого оказывается вполне достаточно для того, чтобы найти корни уравнений $C(t)=0$ и $S(t)=0$. Из представления

$$\zeta\left(\tfrac{1}{2}+ti\right) \;=\; C(t) \;+\; iS(t) \;=\; me^{i\,\varphi(t)}$$

следует, что равенство $C(t)$ выполняется, например, тогда, когда $\cos\varphi(t)=0$ или, что то же, когда

$$\pm\,\varphi(t) \;=\; \frac{(2n+1)\pi}{2},$$

а равенство $S(t)$ – когда

$$\pm\,\varphi(t) \;=\; n\pi,$$

где n – целое положительное, отрицательное или нуль.

Обозначая через β корни уравнения $C(t)=0$, а через γ – корни уравнения $S(t)=0$, отличные от α, для положительных корней с большой точностью будем иметь:

$$\frac{\beta}{2\pi}\Big(\log\frac{\beta}{2\pi} \;-\; 1\Big) \;-\; \frac{1}{8} \;=\; \frac{2n+1}{2}, \tag{9}$$

$$\frac{\gamma}{2\pi}\Big(\log\frac{\gamma}{2\pi} \;-\; 1\Big) \;-\; \frac{1}{8} \;=\; n. \tag{10}$$

Рассмотрим, в частности, γ; для них имеем:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \;&=\; 3.5 \quad \text{при} \quad n=-1,\\
\gamma_2 \;&=\; 9.6 \quad\;\; » \quad n=-1,\\
\gamma_3 \;&=\; 17.8 \quad\;\; » \quad n=0,\\
\gamma_4 \;&=\; 23.2 \quad\;\; » \quad n=1.
\end{aligned}$$

Занумеруем величины γ последовательными целыми числами: $n=2,3,4$ и т. д. Тогда несложно заметить, что количество корней γ, не превосходящих заданного предела N, большего 10, оказывается весьма близким к наибольшему целому числу, которое содержится в выражении

$$\frac{N}{2\pi}\Big(\log\frac{N}{2\pi} \;-\; 1\Big) \;+\; \frac{7}{8}.$$

Все корни γ, как и величины β, являются, очевидно, вещественными.

Напомним также, что X. фон Мангольдт доказал, что количество корней α, вещественные части которых не превосходят N, выражается числом

$$\frac{N}{2\pi}\Big(\log\frac{N}{2\pi}\,-\,1\Big)\,+\,\frac{5}{4}\,\pm\,\varepsilon,$$

где $\varepsilon < 0.34(\log N)^2 + 1.34\log N + 1.33$; отсюда следует, что и числа γ, и числа α (или их вещественные части) располагаются очень близко друг от друга. Первые пятнадцать корней α отделены друг от друга величинами γ, но не величинами β. При этом, разумеется, числа β и γ следуют, чередуясь, друг за другом.

Так мы нашли все значения t, которые обращают в нуль только одну из функций $C(t)$ и $S(t)$; ясно теперь, что любое другое значение, обращающее в нуль $C(t)$ или $S(t)$, должно обращать в нуль и m и будет, следовательно, совпадать с корнем α, для которого и $C(\alpha) = 0$, и $S(\alpha) = 0$. Наши вычисления показывают, что имеются вещественные значения t, отличные от чисел γ, в которых $S(t)$ меняет знак. Эти-то значения, обнуляющие $S(t)$, и будут корнями уравнения $\xi(t) = 0$. Отсюда можно заключить, что найденные нами первые корни α действительно являются вещественными числами.

Из тождества

$$C + iS \,=\, e^{2i\,\varphi}(C - iS)$$

дифференцированием по t получаем:

$$C' + iS' \,=\, e^{2i\,\varphi}(C' - iS') \,+\, 2i\,\varphi'(C - iS)e^{2i\,\varphi}.$$

Если $C = S = 0$, то имеем, следовательно:

$$C'(\alpha) + iS'(\alpha) \,=\, e^{2i\,\varphi(\alpha)}(C'(\alpha) - iS'(\alpha)),$$

откуда получим равенство

$$\frac{S'(\alpha)}{C'(\alpha)} \,=\, \operatorname{tg}\varphi(\alpha), \tag{12}$$

которое послужило мне средством проверки правильности расчётов.

Если $C = 0$, $S \gtrless 0$, то $e^{2i\,\varphi} = -1$ и из (11) мы находим, что

$$C'(\beta) \,=\, -\,\varphi'(\beta)S(\beta), \tag{13}$$

в то время как при $S = 0$, $C \gtrless 0$ имеем $e^{2i\,\varphi} = 1$ и

$$S'(\gamma) \,=\, \varphi'(\gamma)C(\gamma). \tag{14}$$

При всех $t > 7$ производная $\varphi'(t)$ отрицательна. Следовательно, для соответствующих корней имеем следующую теорему: утверждению:

$C'(\beta)$ имеет тот же знак, что и $S(\beta)$; величины $S'(\gamma)$ и $C(\gamma)$ противоположны по знаку.

Следовательно, если $C(\gamma)$ имеет один и тот же знак в двух соседних точках γ, скажем, *в точках* γ_ν и $\gamma_{\nu+1}$, то знак $S'(\gamma_{\nu+1})$ совпадает со знаком $S'(\gamma_\nu)$. Но так как $S(\gamma_\nu) = S(\gamma_{\nu+1}) = 0$, то $S(t)$ должна обратиться в ноль на рассматриваемом

интервале нечётное число раз. Иначе говоря, между γ_ν и $\gamma_{\nu+1}$ имеется нечётное число корней α; следовательно, найдётся по крайней мере один, заключённый в этих пределах.

Эта теорема может оказаться полезной для приближённых вычислений. Чтобы использовать её в теоретических исследованиях, нужно было бы сперва предложить способ определения знака величины $C(\gamma)$ без предварительного её вычисления, но в настоящее время эта задача представляется весьма сложной. Для значений γ из интервала от 10 до 65 величина $C(\gamma)$ всё время остаётся положительной. По всей видимости, и функция $C(t)$ остаётся положительной на большей части этого промежутка. Без сомнения, причина *этого явления* заключается в том, что первое слагаемое суммы $\sum_1^n n^{-\frac{1}{2}} \cos(t \log n)$, равное единице, приводит к преобладанию положительных слагаемых *над отрицательными*. Но если это так, то эта закономерность во взаимном расположении чисел α и γ сохранится и для корней α, близких к α_{15} и следующих за ним, пока мало-помалу не будет восстановлено равновесие.

Дж.И. Хатчинсон, «О корнях дзета-функции Римана»

J.I. Hutchinson. *On the roots of the Riemann zeta function.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 27, 1925, p. 49-60.

Цель настоящей работы состоит в упрощении методов и формул, разработанных и использованных Грамом[2)], Линделёфом[3)] и Бэклундом[4)] в численных исследованиях, связанных с корнями дзета-функции. Я применяю их к местонахождению и приближённому вычислению новых корней.

Начнём с формул, восходящих к Бэклунду:

$$\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^{-s} + \frac{1}{2} n^{-s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} + \sum_{\nu=1}^{k} T_\nu + R_k, \tag{1}$$

где

$$T_\nu = (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} \frac{s(s+1)\dots(s+2\nu-2)}{n^{s+2\nu-1}}, \tag{2}$$

$$|R_k| < \frac{|s+2k+1|}{\sigma+2k+1} |T_{k+1}|, \quad s = \sigma + it, \tag{3}$$

и, если $\sigma = \frac{1}{2}$,

$$|T_\nu| = \frac{\alpha_\nu}{\sqrt{n}} \left(\frac{t}{n}\right)^{2\nu-1}, \quad \alpha_\nu = \frac{B_\nu}{(2\nu)!} \sqrt{\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)\left(1+\frac{9}{4t^2}\right)\dots\left(1+\frac{(4\nu-3)^2}{4t^2}\right)}. \tag{4}$$

[2)] *Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, Acta Mathematica, vol. 27 (1903), p.289.

[3)] *Sur une formule sommatoire générale*, Acta Mathematica, vol. 27, p.305.

[4)] R.J. Backlund, *Ueber die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion*, Dissertation, Helsingfors, 1916.

<...>

Если представить $\zeta(s)$ в виде

$$\zeta(s) = \varrho e^{i\varphi} = \varrho\cos\varphi + i\varrho\sin\varphi \tag{13}$$

и положить $s = \frac{1}{2} + ti$, то ϱ и φ окажутся функциями t, для последней из которых Грамом было найдено очень простое приближённое выражение. Следуя примеру Грама, я буду обозначать вещественную и мнимую части $\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)$ через $C(t)$ и $S(t)$ соответственно, так что

$$C(t) = \varrho(t)\cos\varphi(t), \quad S(t) = \varrho(t)\sin\varphi(t).$$

Далее, корни уравнения $\cos\varphi(t) = 0$ будут обозначаться через β_n, корни уравнения $\sin\varphi(t) = 0$ - через γ_n, а корни $\varrho(t)$, являющиеся и корнями дзета-функции, через α_ν. Грам вычислил первые пятнадцать корней α и обратил внимание на тот факт, что точки α и γ разделяют друг друга. Это свойство корней я буду именовать *законом Грама*. Грам выразил уверенность, что закон этот не является всеобщим. Одна из целей настоящей работы и состоит в подтверждении этого факта. Для этого я воспользуюсь теоремой, доказанной Грамом, которая утверждает следующее: если $C(t)$ принимает значения одного знака в точках $t = \gamma_\nu$ и $t = \gamma_{\nu+1}$, то между этими двумя значениями t содержится по крайней мере один корень α. Беря в (1) вещественные слагаемые с $\sigma = \frac{1}{2}$, будем иметь:

$$C(t) = K + C_0 + C_1 + \ldots + C_k + r_k, \tag{14}$$

где

$$K = 1 + \sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\nu}}\cos(t\log\nu) + \frac{1}{2\sqrt{n}}\cos(t\log n),$$

$$C_0 = C_0(t) = -\frac{\sqrt{n}}{t^2+\frac{1}{4}}\left(ts + \frac{1}{2}c\right), \quad s = \sin(t\log n), \quad c = \cos(t\log n),$$

$$C_1 = \frac{ts+\frac{1}{2}c}{12\,n^{3/2}}, \quad C_2 = \frac{\left(ts+\frac{1}{2}c\right)+4c}{720\,n^{3/2}}\left(\frac{t}{n}\right)^2 - \ldots, \tag{16}$$

$$C_3 = \frac{\left(ts+\frac{1}{2}c\right)+12c}{30240\,n^{3/2}}\left(\frac{t}{n}\right)^4 - \ldots, \quad C_4 = \frac{\left(ts+\frac{1}{2}c\right)+24c}{1209600\,n^{3/2}}\left(\frac{t}{n}\right)^6 - \ldots \quad |r_k| \leqq |R_k|.$$

Я использую лишь главные члены в выражениях для C_2, C_3 и C_4, поскольку отбрасываемые слагаемые не влияют на точность, необходимую для наших целей.

Для проверки закона Грама значения γ_ν вычислялись с помощью формулы

$$\frac{t}{2\pi}\left(\log\frac{t}{2\pi} - 1\right) = n + \frac{1}{8} \tag{17}$$

и подставлялись в (14)[5]. Значения t, удовлетворяющие (17), будут обозначаться через γ_ν, $\nu = n + 3$.

В результате вычислений, которые были доведены до $\gamma_{140} = 300.468$, было установлено, что величина $C(\gamma_\nu)$ положительна в каждом из случаев, за исключением двух, а именно $\gamma_{129} = 282.455$ и $\gamma_{137} = 295.584$. Поскольку случай с γ_{129} оказывается контрольным для закона Грама, значение $C(\gamma_{129})$ было тщательно выверено; чтобы найти его с высокой точностью, было использовано значение $n = 100$. Беря в качестве последнего слагаемого C_4 и проводя вычисления с пятью знаками после запятой, мы нашли, что

$$C(\gamma_{129}) = -\ .027, \quad |R_4| <\ .00005.$$

При этом возникает следующий естественный вопрос. Значение γ_{129} было найдено с помощью приближённой формулы (17). Может ли оказаться, что подстановка его точного значения сделает величину $C(t)$ положительной? Посредством вычислений я нашёл, что $S(282.455) = -0.00015$ с $|R_4| < 0.00005$. Очевидно, что ошибка в значении γ_{129} слишком мала, и что внесение такой поправки, которая могла бы обнулить $S(t)$, не изменит знака $C(t)$. В случае $t = \gamma_{137}$ мы нашли $C(t) = -\ .017$.

Чтобы определить расположение корней α в тех случаях, когда закон Грама нарушается, необходимо иметь значения t, в которых $S(t)$ меняет знак. Для $t = 282.6$ мы нашли $C(t) = +\ .279$. Это означает, что $C(t)$ имеет корень между γ_{129} и 282.6. Им будет корень α, поскольку ближайшим корнем уравнения $\cos\varphi = 0$ будет $\beta_{126} = 283.28$. Поскольку $C(t)$ имеет разные знаки в точках γ_{129} и γ_{130}, по теореме Грама в этих границах должно содержаться чётное число корней α. Следовательно, таких корня - два, поскольку один из этих корней α уже найден.

Аналогично, поскольку $C(295.4) = +\ .175$, между $t = 295.4$ и γ_{137} должен быть корень α, поскольку ближайшим значением β оказывается $\beta_{133} = 294.76$. Следовательно, в интервале $(\gamma_{136}, \gamma_{137})$ лежат по меньшей мере два корня α. Число нулей в интервале $(0, 300.468)$ достигает, самое меньшее, 138, по одному на каждый из интервалов $(\gamma_\nu, \gamma_{\nu+1})$, за исключением двух случаев, упомянутых выше. <...>

Э.Ч. Титчмарш, «Нули дзета-функции Римана»

E.C. Titchmarsh. *The Zeros of the Riemann Zeta-function.* Proc. Roy. Soc. London A, Vol. 151, 1935, p. 234-255.

§7. Пусть τ_n обозначает точку, для которой $\kappa = \frac{1}{2}n - 1$[6]. Тогда первое слагаемое

[5] Большей частью этих вычислений я обязан доктору Джесси Осборну. Неоценимым подспорьем были вычислительная машина Монро и «Смитсонианские математические таблицы» Беккера и Ван Остранда, содержащие тригонометрические функции углов, выраженных в радианной мере.

[6] В наших обозначениях $\tau = t/(2\pi), m = [\sqrt{\tau}], \tau_n = t_{n-1}/(2\pi)$; $f(\tau) = Z(2\pi\tau)$.

в правой части (6.1) имеет вид[7)]

$$2(-1)^n \sum_{\nu=1}^{m} \nu^{-\frac{1}{2}} \cos\big(2\pi\tau_n \log\nu\big);$$

сумма начинается с единицы и обнаруживает склонность оставаться положительной. Это наводит на мысль о том, что величины $f(\tau_n)$ и $f(\tau_{n+1})$ будут, как правило, противоположны по знаку, а интервал (τ_n, τ_{n+1}), следовательно, содержать нуль функции $\zeta\big(\frac{1}{2}+2\pi i\tau\big)$. Это явление было названо Хатчинсоном законом Грама. Известно, что эта закономерность не является общей, однако она наблюдается за очень малым числом исключений во всей области, охваченной вычислениями. Проверка же справедливости гипотезы Римана состоит, главным образом, в проверке выполнения закона Грама.

Основная цель вычислений состоит в том, чтобы определить знак $f(\tau)$ в подходящим образом выбранных точках, близких к τ_n. <...>

§10. Во всей области, доступной для вычислений, метод отделения нулей функции $\zeta\big(\frac{1}{2}+it\big)$ значениями $t_n = 2\pi\tau_n$ почти всегда приводит к успеху. Оказалось, что величины $(-1)^n f(\tau_n)$ положительны для всех n вплоть до $n = 199$, за не более чем тремя исключениями, и что в каждом из этих исключительных случаев функция $\zeta\big(\frac{1}{2}+it\big)$ имеет нуль в непосредственной близости от соответствующего интервала (t_n, t_{n+1}). Далее мы покажем, что величина $(-1)^n f(\tau_n)$ не только не может быть положительной для всех n (что демонстрируют приведённые выше вычисления), но что она не может оставаться положительной и для всех достаточно больших значений n. <...>

Подобным образом доказывается, что если c_n обозначает n-й нуль функции $\zeta\big(\frac{1}{2}+it\big)$, то величина $(c_n - t_n)/(t_{n+1} - t_n)$ является неограниченной, поскольку в противном случае ограниченной оказывается разность $N_0(t) - M(t)$[8)].

§11. Местонахождение столь большого числа нулей $f(s)$ на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$ должно быть признано аргументом в пользу справедливости гипотезы Римана, однако я думаю, что более детальное знакомство с положением дел показывает, что этот аргумент не является слишком весомым. Вычисления показывают, что отклонения от «закона Грама», согласно которому величины c_n и t_n следуют, чередуясь, проявляются очень медленно, и что в конечном счете проявятся сколь угодно большие отклонения от него в том смысле, о котором сказано в замечании в конце предыдущего раздела. Те еще более значительные уклонения от закономерности, что могли бы привести к появлению нуля вне прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, могут быть еще более далекими.

Между числами $\cos(t\log\nu)$ имеются соотношения, которые влияют на формирование у величин $(-1)^n f(\tau_n)$ положительного знака. Например, если числа θ, ϕ и

[7)] Соотношение (6.1) даёт, по сути, оценку разности между $f(\tau)$ и выражением

$$2\sum_{\nu=1}^{m} \frac{\cos\big(2\pi(\kappa - \tau\ln\nu)\big)}{\sqrt{\nu}} + \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt[4]{\tau}} \frac{\cos 2\pi(\tau - (2m+1)\sqrt{\tau} - \frac{1}{16})}{\cos 2\pi\sqrt{\tau}}.$$

[8)] Символ $M(t)$ служит Титчмаршу для обозначения величины $\frac{t}{2\pi}\log\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} + \frac{7}{8}$; определение $N_0(t)$ совпадает с нашим.

ψ независимы, то

$$\min\left(1+\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}+\frac{\cos\phi}{\sqrt{3}}+\frac{\cos\psi}{\sqrt{6}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}<0;$$

однако

$$\min\left(1+\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}+\frac{\cos\phi}{\sqrt{3}}+\frac{\cos(\theta+\phi)}{\sqrt{6}}\right)=\frac{1}{12},$$

так что

$$1+\frac{\cos(t\log 2)}{\sqrt{2}}+\frac{\cos(t\log 3)}{\sqrt{3}}+\frac{\cos(t\log 6)}{\sqrt{6}}\geqq\frac{1}{12}.$$

Несомненно, такие соотношения способствуют выполнению «закона Грама» до тех пор, пока ряд $\sum_{\nu\leqq\sqrt{\tau}}\nu^{-\frac{1}{2}}\cos(t\log\nu)$ не станет содержать слишком много слагаемых, однако в конце концов такие исключения появятся. Вычисления не дают повода считать, почему бы в конечном итоге не появиться и исключениям из «закона Римана», согласно которому нули лежат на прямой $\sigma=\frac{1}{2}$.

А. Сельберг, «Дзета-функция и гипотеза Римана»

A.Selderg. *The zeta-function and the Riemann hypothesis.* C.R. Dixieme Congres Math. Skandinaves, 10(1946), 187-200. Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1947.

Чтобы определить местоположение первых нулей $\zeta(s)$, несколькими авторами были предприняты численные исследования. Эти вычисления, наиболее обширными из которых мы обязаны Титчмаршу[9)], показывают, что $\zeta(s)$ имеет 1041 нуль в области $0<t<1468$, и что все они лежат на критической прямой. Несомненно, это наиболее сильный аргумент в пользу гипотезы Римана из всех известных к настоящему моменту. Но как бы убедителен он ни был, в математике нужно всегда быть осторожным при обобщении численных данных. В этом случае примеры из столь близкой области как теория распределения простых чисел могли бы послужить предостережением.

Давайте, например, вспомним, что когда-то многие полагали, что разность $\pi(x)-\mathrm{li}(x)$ всегда отрицательна: гипотеза, подтверждённая серьёзными численными доказательствами. Несмотря на это, Литтлвудом было показано, что существует бесконечно много целых значений x, для которых $\pi(x)>\mathrm{li}(x)$.

В этой связи представляет определённый интерес теоретическое изучение другого эмпирического «закона» распределения нулей $\zeta(s)$, который выполняется без исключений в области $0<t\leqslant 280$, и со сравнительно малым их количеством в области $0<t\leqslant 1468$. Это - так называемый «закон Грама»[10)].

Когда t возрастает от 0 до бесконечности, функция $\vartheta(t)$, определённая (14), вначале убывает до минимума между -2π и π, а далее неизменно возрастает. Для больших t имеем

$$\vartheta(t)\;=\;\frac{t}{2}\,\log\frac{t}{2\pi}\;-\;\frac{t}{2}\;-\;\frac{\pi}{8}\;+\;O\left(\frac{1}{t}\right).$$

[9)] Титчмарш (2), (3).

[10)] Насколько я знаю, ранее этот вопрос рассматривался только Титчмаршем, который придерживался той же точки зрения, что и я здесь. См. Титчмарш (1), (2), (3).

Для $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ определим теперь положительное число t_ν условиями $\vartheta'(t_\nu) > 0$ и $\vartheta(t_\nu) = (\nu - 1)\pi$. Тогда

$$\zeta\left(\tfrac{1}{2} + it_\nu\right) \;=\; (-1)^{\nu-1} X(t_\nu), \tag{24}$$

и, таким образом, $\zeta(\frac{1}{2} + it_\nu)$ вещественна. Формула Римана-Зигеля[11)]

$$X(t) \;=\; 2 \sum_{n \leqslant \sqrt{t/2\pi}} \frac{\cos(\vartheta - t \log n)}{\sqrt{n}} \;+\; O\left(t^{-\frac{1}{4}}\right) \tag{25}$$

даёт

$$\zeta\left(\tfrac{1}{2} + it_\nu\right) \;=\; 1 + 2 \sum_{1 < n \leqslant \sqrt{t_\nu/2\pi}} \frac{\cos(t_\nu \log n)}{\sqrt{n}} \;+\; O\left(t_\nu^{-\frac{1}{4}}\right), \tag{25'}$$

что наводит на мысль, что величины $\zeta(\frac{1}{2}+it_\nu)$ в основном положительны, и, согласно этому, $X(t_{\nu-1})$ и $X(t_\nu)$ должны, как правило, быть разных знаков. Таким образом, $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ должна иметь по крайней мере один действительный нуль в интервале $(t_{\nu-1}, t_\nu)$. Численные результаты Грама и Бэклунда подтвердили, что при $t_\nu < 200$ $\zeta(\frac{1}{2} + it_\nu)$ всегда положительны и всегда $t_{\nu-1} < \gamma_\nu < t_\nu$[12)], так что γ отделены t_ν. Это свойство как раз и называют «законом Грама». Более поздние результаты Хатчинсона показали, что закон Грама выполняется без исключений вплоть до $t = 280$, то есть для более чем 120 первых t_ν. Результаты Титчмарша показали, что среди 1042 первых t_ν, которые не превосходят 1468, есть только 43 случая, когда $\zeta(\frac{1}{2} + it_\nu)$ отрицательна. Далее, для $\nu = 1, 2, \ldots, 1041$ имеем $t_{\nu-1} < \gamma_\nu < t_\nu$, за исключением 43 случаев, в которых γ_ν лежат в одном из соседних интервалов, содержащих, следовательно, две ординаты γ.

Титчмарш[13)] показал, что $\zeta(\frac{1}{2}+it_\nu)$ отрицательна для бесконечного множества чисел ν. Далее, если мы обозначим через Δ_n разность $m - n$, где γ_n лежит на m-м интервале (t_{m-1}, t_m), то он доказал, что при n, стремящемся к бесконечности,

$$\overline{\lim}\, \Delta_n \;=\; \infty, \quad \underline{\lim}\, \Delta_n \;=\; -\infty.$$

Исследуя колебания аргумента $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ более детально, я преуспел в доказательстве того, что существуют абсолютные положительные постоянные K и N_0 такие, что при $N > N_0$, $1 \leqslant \nu \leqslant N$ числа $\zeta\left(\frac{1}{2} + it_{\nu-1}\right)$ и $\zeta\left(\frac{1}{2} + it_\nu\right)$ имеют разные знаки более чем в KN случаях, и одинаковый знак также более чем в KN случаях. Из этого, в частности, следует, что существует более KN интервалов $(t_{\nu-1}, t_\nu)$, которые не содержат ни одной γ, и не менее KN интервалов, содержащих более одной γ. Также среди чисел $\zeta\left(\frac{1}{2} + it_\nu\right)$ должно быть более KN отрицательных и более KN положительных.

Таким образом, например, $\zeta\left(\frac{1}{2} + it_\nu\right)$ не является положительной величиной даже для почти всех ν.

[11)] Зигель (1).

[12)] γ_ν обозначает ν-ю по счёту из ординат γ, упорядоченных в порядке возрастания.

[13)] Титчмарш (2).

Следующий новый результат состоит в том, что для любого фиксированного положительного целого числа k

$$\sum_{n=1}^{N} \Delta_n^{2k} \;=\; \frac{(2k)!}{k!(2\pi)^{2k}}\; N\;(\log\log N)^k \;+\; O\left(N(\log\log N)^{k-\frac{1}{2}}\right), \tag{26}$$

и

$$\sum_{n=1}^{N} \Delta_n^{2k-1} \;=\; O\left(N(\log\log N)^{k-1}\right). \tag{26'}$$

По-видимому, хотя я и не смог доказать этого строго, $\sqrt{\log\log n}$ есть «нормальный» порядок величины Δ_n в следующем смысле: если $\Phi(n)$ есть положительная функция n, стремящаяся к бесконечности вместе с n, то неравенства

$$\frac{\sqrt{\log\log n}}{\Phi(n)} \;<\; |\Delta_n| \;<\; \Phi(n)\sqrt{\log\log n}\,^{14)}$$

имеют место для почти всех n. В частности, это должно означать, что γ_ν «почти никогда» не лежат в интервале $(t_{\nu-1}, t_\nu)$.

При $1 \leqslant n \leqslant 1041$ имеем $\Delta_n = 0$, за исключением 43 случаев, в которых $|\Delta_n| = 1$. В то же время при $k = 1$ главный член правой части (26) имеет вид

$$\frac{N}{2\pi^2}\;\log\log N.$$

Следовательно, надо ожидать, что Δ_n будет в большинстве случаев обращаться в нуль, пока величина $\log\log n$ мала по сравнению с $2\pi^2$.

Другой результат, показывающий нерегулярность распределения γ, состоит в том, что существует абсолютная положительная постоянная Θ такая, что для всех положительных целых r

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\;\frac{\gamma_{n+r}-\gamma_n}{2\pi r}\;\log\gamma_n \;>\; 1+\Theta, \qquad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\;\frac{\gamma_{n+r}-\gamma_n}{2\pi r}\;\log\gamma_n \;<\; 1-\Theta.$$

Подобные результаты показывают, что для больших значений t уже нет того согласия с законом Грама, которое мы наблюдаем в области, охватываемой численными расчётами. Это можно объяснить тем, что при $t = 1468$ сумма, стоящая в (25), содержит ещё только 15 членов. Таким образом, в (25') первый член в правой части, как правило, преобладает при $t_\nu < 1468$.

Это наводит на мысль, что, несмотря на подтверждающие численные доказательства, всё ещё есть основания относиться к гипотезе Римана с некоторым подозрением. В области, охватываемой вычислениями, исключения из закона Грама немногочисленны и имеют наиболее простой вид, но чем дальше, тем более серьёзными должны быть отклонения от него. Кажется вероятным, что нерегулярности в колебаниях $\zeta(s)$, которые необходимы для появления нулей вне прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, должны возникать гораздо дальше первых исключений из закона Грама[15)].

[14)] Основную трудность доставляет первое неравенство, его я доказать полностью не смог.

[15)] См. статьи Титчмарша (2) и (3), где это предположение подкреплено дальнейшими аргументами.

TITCHMARSH, E.C.:

—— (2) The zeros of the Riemann zeta-function, *Proc. Roy. Soc. A*, 151(1935), 234-255.

—— (3) The zeros of the Riemann zeta-function, *Proc. Roy. Soc. A*, 157(1936), 261-263.

Приложение III. Таблицы

Статистика нарушений правила Грама

Одним из следствий высказанного А. Сельбергом утверждения о том, что величины $\Delta_n/\sqrt{\log\log n}$ распределены по нормальному закону (см. главу 3), служит тот факт, что примерно в половине случаев величина Δ_n строго отрицательна, и в половине случаев – строго положительна. Приводимые ниже численные данные, полученные при обработке значений первых 10 миллионов нулей $\zeta(s)$, показывают, что при сравнительно небольших значениях N случаи, когда для ординаты γ_n, $n \leqslant N$, не наблюдается явление Грама-Сельберга (т.е. когда $\Delta_n \neq 0$), встречаются достаточно редко.

Таблица № 1. Количество и доля номеров n, $n \leqslant N$, отвечающих условиям $\Delta_n = -1$, $\Delta_n = 1$

N	$\Delta_n = -1$	%	$\Delta_n = 1$	%
250	2	0.80	3	1.20
500	5	1.00	8	1.60
1 000	16	1.60	26	2.60
2 000	54	2.70	63	3.15
3 000	91	3.03	100	3.33
4 000	135	3.38	142	3.55
5 000	178	3.56	184	3.68
10 000	405	4.05	419	4.19
20 000	899	4.50	939	4.70
30 000	1 438	4.79	1 494	4.98
40 000	1 992	4.98	2 056	5.14
50 000	2 580	5.16	2 633	5.27
100 000	5 509	5.51	5 553	5.55
200 000	11 702	5.85	11 652	5.83
300 000	18 015	6.01	17 962	5.99
400 000	24 506	6.13	24 443	6.11
500 000	31 121	6.22	31 063	6.21
1 000 000	65 097	6.51	65 005	6.50
2 000 000	135 402	6.77	135 275	6.76
3 000 000	207 459	6.92	207 290	6.91
4 000 000	280 891	7.02	280 641	7.02
5 000 000	354 725	7.09	354 293	7.09

6 000 000	429 737	7.16	428 841	7.15
7 000 000	504 805	7.21	503 808	7.20
8 000 000	580 330	7.25	579 252	7.24
9 000 000	656 103	7.29	655 114	7.28
10 000 000	732 315	7.32	731 252	7.31

Соседние члены последовательности Δ_n, отличные от нуля

Пусть $\mathbf{e}$ обозначает набор из k чисел «-1» и l чисел «$+1$», т.е.

$$\mathbf{e} = (\underbrace{-1, \ldots, -1}_{k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{l}),$$

и пусть $r = k+l$. В главе 5 было установлено, что число номеров $n \leqslant N$, для которых распределение знаков в наборе $(\Delta_n, \ldots, \Delta_{n+r-1})$ совпадает с распределением знаков в наборе $\mathbf{e}$, при неограниченном возрастании N эквивалентно $0.5N$, если все числа в наборе имеют один знак (т.е. одно из чисел k, l равно нулю), и равно $o(N)$ в противном случае.

Однако эта закономерность начинает проявляться лишь при очень больших значениях N. Приведённые ниже численные данные, отвечающие первым 10 миллионам нулей $\zeta(s)$, показывают, например, что на соответствующем промежутке в среднем лишь одна из 95 пар соседних значений Δ_n отвечает распределению знаков $(1, 1)$, одна из 1170 троек – распределению знаков $(1, 1, 1)$, одна из 65000 четвёрок – распределению знаков $(1, 1, 1, 1)$. Пятёрок, шестёрок и т.д. соседних членов последовательности Δ_n, имеющих одинаковые знаки, при этом обнаружено не было.

Таблица № 2. Количество номеров n, $n \leqslant N$, отвечающих парам (Δ_n, Δ_{n+1}) указанного вида

N	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(1,1)$	N	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(1,1)$
50 000	145	263	153	5 000 000	47 537	23 345	47 228
100 000	351	535	382	5 500 000	53 077	25 634	52 772
500 000	2 963	2 489	2 985	6 000 000	58 788	27 877	58 312
1 000 000	7 055	4 865	6 992	6 500 000	64 427	30 179	63 935
1 500 000	11 493	7 210	11 384	7 000 000	70 127	32 450	69 626
2 000 000	16 175	9 546	16 061	7 500 000	75 880	34 675	75 426
2 500 000	21 077	11 882	21 024	8 000 000	81 589	36 864	81 246
3 000 000	26 187	14 200	26 126	8 500 000	87 452	39 132	87 067
3 500 000	31 378	16 483	31 223	9 000 000	93 347	41 418	92 918
4 000 000	36 761	18 831	36 531	9 500 000	99 237	43 654	98 835
4 500 000	42 092	21 087	41 852	10 000 000	105 165	45 894	104 847

Таблица № 3. Количество номеров n, $n \leqslant N$, отвечающих тройкам $(\Delta_n, \Delta_{n+1}, \Delta_{n+2})$ указанного вида.

N	$(-1,-1,-1)$	$(-1,-1,1)$	$(-1,1,1)$	$(1,1,1)$
50 000	0	37	34	0
100 000	2	92	89	4
500 000	78	539	537	71
1 000 000	279	1 134	1 136	246
1 500 000	535	1 702	1 731	476
2 000 000	832	2 324	2 299	779
2 500 000	1 176	2 910	2 916	1 124
3 000 000	1 579	3 500	3 532	1 523
3 500 000	1 988	4 086	4 075	1 894
4 000 000	2 445	4 690	4 658	2 306
4 500 000	2 869	5 265	5 244	2 744
5 000 000	3 325	5 814	5 823	3 177
5 500 000	3 787	6 389	6 432	3 661
6 000 000	4 283	6 991	7 013	4 131
6 500 000	4 781	7 590	7 604	4 654
7 000 000	5 288	8 187	8 201	5 156
7 500 000	5 834	8 774	8 802	5 699
8 000 000	6 347	9 334	9 386	6 233
8 500 000	6 920	9 923	9 969	6 789
9 000 000	7 503	10 518	10 550	7 354
9 500 000	8 089	11 121	11 168	7 941
10 000 000	8 677	11 735	11 755	8 525

Таблица № 4. Количество номеров n, $n \leqslant N$, отвечающих четвёркам $(\Delta_n, \ldots, \Delta_{n+3})$ указанного вида.

N	$(-1,-1,-1,-1)$	$(-1,-1,-1,1)$	$(-1,-1,1,1)$	$(-1,1,1,1)$	$(1,1,1,1)$
50 000	0	0	8	0	0
100 000	0	0	17	1	0
500 000	0	30	150	33	1
1 000 000	0	83	350	86	1
1 500 000	0	144	539	147	1
2 000 000	1	231	759	226	4
2 500 000	2	318	967	327	7
3 000 000	8	422	1 176	428	13
3 500 000	11	525	1 355	510	20
4 000 000	14	632	1 544	603	26
4 500 000	20	726	1 742	703	32

5 000 000	26	828	1 926	812	39
5 500 000	35	939	2 136	908	49
6 000 000	43	1 057	2 338	1 021	58
6 500 000	52	1 177	2 547	1 140	72
7 000 000	62	1 286	2 750	1 259	82
7 500 000	69	1 395	2 965	1 370	94
8 000 000	80	1 512	3 159	1 474	104
8 500 000	95	1 631	3 362	1 581	111
9 000 000	117	1 754	3 558	1 690	118
9 500 000	129	1 869	3 772	1 801	136
10 000 000	141	1 993	3 987	1 917	154

Таблица № 5. Количество номеров n, $n \leqslant N$, отвечающих пятёркам $(\Delta_n, \ldots, \Delta_{n+4})$ указанного вида.

N	$(-1,-1,-1,-1,1)$	$(-1,-1,-1,1,1)$	$(-1,-1,1,1,1)$	$(-1,1,1,1,1)$
100 000	0	0	0	0
500 000	0	11	10	1
1 000 000	0	28	28	1
1 500 000	0	51	53	1
2 000 000	0	82	85	3
2 500 000	1	112	122	5
3 000 000	2	153	163	6
3 500 000	3	191	184	9
4 000 000	3	231	225	13
4 500 000	4	261	265	16
5 000 000	8	292	301	19
5 500 000	10	337	343	25
6 000 000	13	374	386	27
6 500 000	16	420	436	30
7 000 000	19	465	483	34
7 500 000	22	515	524	39
8 000 000	28	560	559	43
8 500 000	33	611	598	45
9 000 000	42	656	647	46
9 500 000	45	709	694	53
10 000 000	51	752	743	58

Таблица № 6. Количество номеров n, $n \leqslant N$, отвечающих шестёркам $(\Delta_n, \ldots, \Delta_{n+5})$ указанного вида.

N	$(-1,-1,-1,-1,1,1)$	$(-1,-1,-1,1,1,1)$	$(-1,-1,1,1,1,1)$
500 000	0	0	0
1 000 000	0	1	0
1 500 000	0	4	0
2 000 000	0	12	0
2 500 000	0	20	0
3 000 000	1	28	1
3 500 000	1	29	2
4 000 000	1	39	4
4 500 000	1	45	7
5 000 000	3	47	7
5 500 000	4	56	9
6 000 000	4	62	10
6 500 000	5	72	12
7 000 000	5	85	13
7 500 000	7	94	14
8 000 000	10	98	15
8 500 000	13	109	15
9 000 000	16	117	15
9 500 000	19	125	17
10 000 000	22	136	19

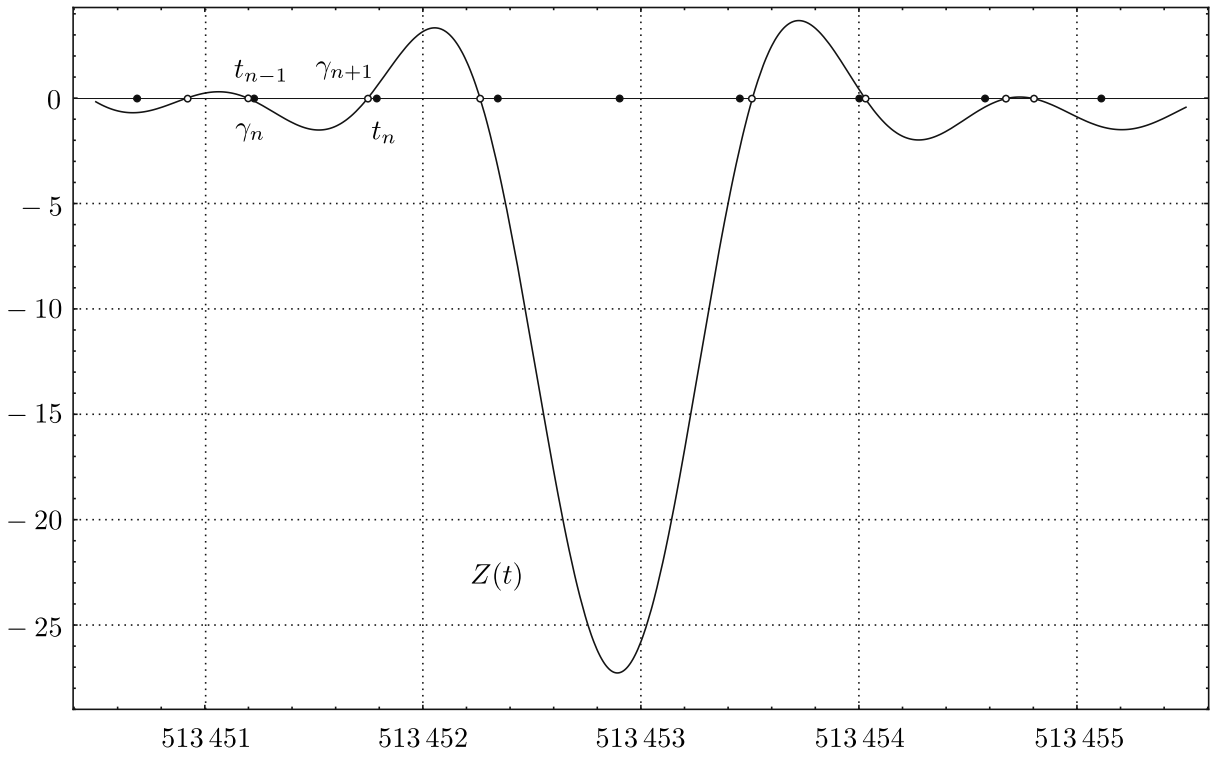


Рис. 12. График функции Харди вблизи нуля γ_n с номером 842 602 - наименьшим значением n, для которого шесть подряд идущих членов последовательности Δ_n отличны от нуля: $\Delta_n = \Delta_{n+1} = \Delta_{n+2} = -1$, $\Delta_{n+3} = \Delta_{n+4} = \Delta_{n+5} = 1$.

Маленькие значения $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ в точках Грама

В главе 6 было доказано, что значения функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ в точках Грама $t=t_n$ могут быть сколь угодно близки к нулю. Например, при сколь угодно малом, но фиксированном δ, $0<\delta<1$, и достаточно большом $N\geqslant N_0(\delta)$ на промежутке $n\leqslant N$ найдётся достаточно много номеров n, для которых

$$\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_n\right)\right| \,<\, e^{-\,(\log\log N)^{1-\delta}}.$$

Между тем, приводимые ниже численные данные как будто указывают на существование точек Грама t_n, в которых значения дзета-функции аномально близки к нулю. Действительно, даже при $\delta=0$ и $N=10^7$ упомянутая теорема могла бы гарантировать лишь существование значений $\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)$, не превосходящих по модулю

$$e^{-\,\log\log N} \,=\, \frac{1}{\log N} \,\approx\, 0.06.$$

В то же время среди первых 10 миллионов значений дзета-функции Римана в точках Грама имеется 11, не превосходящих по модулю $10^{-7}=N^{-1}$.

Поэтому не лишённым оснований представляется предположение о том, что при некотором α, $0<\alpha\leqslant 1$, неравенство

$$\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_n\right)\right| \,<\, n^{-\,\alpha}$$

имеет бесконечно много решений.

Ниже мы помещаем и две таблицы, содержащие пары и тройки значений дзета-функции в последовательных точках Грама, одновременно близкие к нулю. Существование бесконечных последовательностей точек Грама с такими свойствам представляется несомненным, хотя и не получило ещё теоретического обоснования.

Таблица 7 содержит все значения $\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)$ среди первых 100 миллионов, не превосходящие по абсолютной величине $10^{\,-\,6}$.

Таблица 8 содержит все пары $\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)$, $\zeta\left(\frac{1}{2}+it_{n+1}\right)$ среди первых 100 миллионов, в которых каждое из чисел не превосходит по модулю $10^{\,-\,3}$.

Таблица 9 содержит все тройки $\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)$, $\zeta\left(\frac{1}{2}+it_{n+1}\right)$ и $\zeta\left(\frac{1}{2}+it_{n+2}\right)$ среди первых 100 миллионов, в которых каждое из чисел не превосходит по модулю $10^{\,-\,2}$.

Таблица № 7. Значения дзета-функции Римана в точках Грама, близкие к нулю.

№	n	$\zeta(0.5+it_n)$	№	n	$\zeta(0.5+it_n)$
1	368 383	$8.908459177\cdot10^{-8}$	31	55 397 801	$-7.724510329\cdot10^{-7}$
2	1 081 356	$3.286697349\cdot10^{-7}$	32	55 785 549	$3.751898927\cdot10^{-8}$
3	1 703 469	$-6.782496166\cdot10^{-7}$	33	56 977 438	$-1.281331084\cdot10^{-7}$
4	2 221 534	$8.913991560\cdot10^{-7}$	34	57 923 398	$-8.600911945\cdot10^{-7}$
5	2 566 428	$-5.017685320\cdot10^{-7}$	35	61 769 885	$8.026448664\cdot10^{-8}$
6	3 932 141	$-5.815426965\cdot10^{-7}$	36	65 463 721	$1.083783062\cdot10^{-8}$
7	10 552 409	$-2.168827302\cdot10^{-7}$	37	66 712 683	$9.467610207\cdot10^{-7}$
8	12 984 109	$-2.052297697\cdot10^{-8}$	38	67 185 440	$-3.026334096\cdot10^{-7}$

9	17 192 658	$-7.976228419\cdot10^{-7}$	39	67 817 448	$3.065987007\cdot10^{-7}$
10	18 492 584	$1.955139500\cdot10^{-7}$	40	68 116 120	$-4.964761089\cdot10^{-7}$
11	19 190 466	$-2.803305286\cdot10^{-7}$	41	68 804 262	$-9.356895220\cdot10^{-7}$
12	19 652 116	$3.938189772\cdot10^{-7}$	42	69 612 841	$9.033652260\cdot10^{-8}$
13	21 380 358	$3.869268958\cdot10^{-7}$	43	73 877 566	$8.688378781\cdot10^{-7}$
14	21 567 185	$-6.709404500\cdot10^{-8}$	44	74 201 244	$2.875945334\cdot10^{-8}$
15	22 596 681	$-3.443463124\cdot10^{-7}$	45	74 501 450	$-9.894745552\cdot10^{-7}$
16	23 521 820	$-2.672575299\cdot10^{-7}$	46	74 549 035	$-6.786590341\cdot10^{-7}$
17	24 100 729	$6.250046215\cdot10^{-7}$	47	74 939 457	$-9.707059351\cdot10^{-7}$
18	25 841 031	$-3.720614072\cdot10^{-7}$	48	76 315 239	$-1.737656419\cdot10^{-7}$
19	36 596 593	$9.536161749\cdot10^{-7}$	49	76 666 987	$-4.813843438\cdot10^{-7}$
20	37 144 211	$-6.532751077\cdot10^{-7}$	50	82 021 362	$3.054704527\cdot10^{-7}$
21	38 149 300	$1.883071757\cdot10^{-7}$	51	83 544 119	$1.785705074\cdot10^{-7}$
22	40 691 692	$-5.549799612\cdot10^{-7}$	52	84 026 196	$-3.880595918\cdot10^{-7}$
23	43 005 627	$9.335807026\cdot10^{-7}$	53	86 680 958	$-2.600521850\cdot10^{-7}$
24	45 898 152	$8.302024309\cdot10^{-8}$	54	89 039 640	$8.806346508\cdot10^{-7}$
25	46 555 309	$-6.184960394\cdot10^{-7}$	55	93 186 166	$-9.021584705\cdot10^{-7}$
26	49 016 454	$-5.510043425\cdot10^{-7}$	56	93 796 535	$5.326477354\cdot10^{-7}$
27	49 092 047	$1.457889033\cdot10^{-7}$	57	93 869 701	$-4.703062781\cdot10^{-7}$
28	50 550 325	$-6.397502838\cdot10^{-8}$	58	94 842 148	$-7.418568754\cdot10^{-7}$
29	52 220 649	$-6.529424698\cdot10^{-8}$	59	95 788 773	$-7.262093847\cdot10^{-7}$
30	53 253 362	$6.684365546\cdot10^{-7}$	60	95 988 225	$-4.872821625\cdot10^{-7}$

Таблица № 8. Значения дзета-функции Римана в соседних точках Грама, близкие к нулю.

№	n	$\zeta(0.5+it_n)$	$\zeta(0.5+it_{n+1})$
1	816 747	−0.00099 82444	−0.00047 15144
2	1 992 269	−0.00074 13299	−0.00048 31443
3	5 192 539	−0.00091 95711	−0.00063 63480
4	5 569 839	−0.00068 28763	−0.00047 92222
5	9 008 869	0.00090 02257	0.00070 81692
6	13 832 731	−0.00000 80280	0.00098 28156
7	18 163 000	0.00040 09274	−0.00079 37788
8	30 077 815	0.00048 93125	0.00017 49607
9	35 875 340	−0.00080 43341	−0.00085 30483
10	38 287 466	−0.00077 17557	−0.00050 55571
11	39 046 347	0.00046 61767	0.00002 19750
12	40 142 820	−0.00081 68821	−0.00084 57050
13	43 029 919	−0.00085 47402	0.00095 16843
14	49 780 945	0.00008 28373	0.00008 65893
15	51 201 822	−0.00006 83471	0.00003 75653
16	51 594 505	0.00018 17627	0.00068 87363
17	54 166 549	−0.00089 28189	−0.00041 69653
18	56 769 908	0.00059 69652	0.00073 58172

19	57 489 193	−0.00023 61312	−0.00090 58221
20	57 539 118	−0.00086 11471	0.00021 29330
21	57 584 929	−0.00050 58439	−0.00022 00641
22	59 187 069	0.00030 00735	−0.00098 32528
23	63 890 968	0.00001 47495	0.00045 19164
24	70 699 520	−0.00056 44376	0.00095 12555
25	75 078 864	0.00026 87740	−0.00022 52979
26	76 371 912	−0.00059 11880	−0.00096 41903
27	78 991 010	−0.00063 76352	−0.00093 41621
28	82 566 363	0.00074 27305	−0.00025 55093
29	82 915 114	−0.00031 55988	−0.00083 92445
30	84 807 620	0.00027 60681	−0.00033 73168
31	92 088 995	−0.00079 77560	−0.00095 57573
32	94 279 811	0.00010 94287	−0.00017 04603
33	97 537 083	−0.00050 04338	0.00032 06898

Таблица № 9. Значения дзета-функции Римана в трёх соседних точках Грама, близкие к нулю.

№	n	$\zeta(0.5+it_n)$	$\zeta(0.5+it_{n+1})$	$\zeta(0.5+it_{n+2})$
1	3 333 401	−0.00232 65321	−0.00162 21856	0.00844 88197
2	10 265 739	0.00219 53893	−0.00101 16015	0.00290 43398
3	20 700 019	−0.00606 78549	0.00464 15922	−0.00673 17207
4	22 060 602	−0.00145 76244	0.00477 93071	0.00082 91226
5	22 930 085	−0.00941 75668	0.00202 31619	0.00221 27749
6	26 744 861	0.00428 23469	0.00091 68454	−0.00785 36040
7	27 838 191	−0.00977 93752	0.00260 31443	0.00807 66231
8	31 529 739	0.00013 79851	−0.00390 41453	−0.00641 21563
9	32 980 449	−0.00448 75141	0.00542 06063	0.00852 44378
10	45 513 704	−0.00317 38499	−0.00238 94084	−0.00224 79058
11	45 970 390	0.00290 56653	0.00085 77340	−0.00777 69921
12	46 104 506	−0.00346 35139	0.00552 73770	0.00263 29073
13	49 086 832	0.00028 30038	−0.00497 27257	−0.00046 25985
14	49 845 648	0.00836 44817	−0.00763 14230	−0.00977 40154
15	50 941 296	−0.00297 24145	0.00895 75515	0.00899 21534
16	52 876 965	0.00876 42238	−0.00787 38824	0.00024 95172
17	53 335 581	−0.00198 51916	0.00069 11725	0.00194 18227
18	74 972 824	−0.00213 50399	−0.00056 66266	−0.00973 89106
19	75 603 058	−0.00486 46810	0.00316 55734	0.00759 96091
20	81 755 052	0.00950 16993	0.00844 36909	0.00898 67914
21	82 514 089	0.00742 58341	−0.00062 90315	−0.00643 91133
22	82 978 419	0.00847 64232	−0.00086 78237	0.00204 52694
23	84 153 877	−0.00150 13153	0.00633 52150	−0.00617 37619
24	85 691 854	−0.00847 60289	−0.00422 67876	−0.00844 38678
25	86 813 816	0.00758 55428	−0.00687 82447	−0.00375 07974
26	91 962 033	0.00692 04691	0.00002 46855	−0.00243 88692

Дискретный момент дзета-функции Римана

Из результатов главы 6 следует, что отношение $\mathfrak{M}(N)/N$, где

$$\mathfrak{M}(N) \,=\, \sum_{n\leqslant N} \bigl|\zeta\bigl(\tfrac{1}{2}+it_n\bigr)\bigr|^{-1}$$

- дискретный момент дзета-функции Римана, при $N\to+\infty$ возрастает быстрее, чем любая функция вида

$$e^{(\log\log N)^{1-\delta}},\quad 0<\delta<0.5.$$

Вопрос об истинном порядке суммы $\mathfrak{M}(N)$ (и даже о том, конечна она или нет), остаётся открытым.

Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение. Тогда при любом $\mathcal{L}>0$ справедливо равенство

$$\mathbf{E}\bigl(e^{\xi\sqrt{\mathcal{L}/2}}\bigr) \,=\, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{u\sqrt{\mathcal{L}/2}}dG(u) \,=\, e^{\,\mathcal{L}/4}.$$

Поэтому, если бы величины

$$\xi_n \,=\, \frac{\sqrt{2}\log\bigl|\zeta\bigl(\frac{1}{2}+it_n\bigr)\bigr|}{\sqrt{\log\log N}},\quad n\leqslant N,$$

были распределены по закону, «близкому» к нормальному, естественно было бы ожидать, что

$$\mathfrak{M}(N) \,=\, \sum_{n\leqslant N} e^{\,\xi_n\sqrt{(1/2)\log\log N}} \,\sim\, N(\log N)^{1/4}.$$

Между тем, численные данные, приведённые в таблице 10, показывают, что отношение $\mathfrak{M}(N)/N(\log N)^{1/4}$ достаточно далеко от единицы.

Таблица № 10. Дискретный момент степени (-1) дзета-функции Римана.

N	$\mathfrak{M}(N)$	$\mathfrak{M}(N)/N$	$\mathfrak{M}(N)/N(\log N)^{1/4}$
1 000	2 281.67	2.28	1.41
2 000	5 237.67	2.62	1.58
3 000	7 494.98	2.50	1.49
4 000	24 561.26	6.14	3.62
5 000	26 933.05	5.39	3.15
10 000	44 566.50	4.46	2.56
20 000	115 562.76	5.78	3.26
30 000	167 058.27	5.57	3.11
40 000	214 220.65	5.36	2.97

50 000	267 472.98	5.35	2.95
100 000	601 939.09	6.02	3.27
200 000	1 339 389.70	6.70	3.58
300 000	2 010 849.64	6.70	3.56
400 000	13 815 874.94	34.54	18.23
500 000	14 476 098.90	28.95	15.21
1 000 000	17 507 650.56	17.51	9.08
2 000 000	29 299 867.03	14.65	7.51
3 000 000	40 814 274.43	13.60	6.92
4 000 000	50 254 864.88	12.56	6.36
5 000 000	59 169 353.81	11.83	5.97
10 000 000	98 075 035.16	9.81	4.89

«Всплеск» в правой колонке при переходе от $N = 3\,000$ к $N = 4\,000$ обязан своим появлением слишком малым по модулю значениям дзета-функции в точках Грама t_n с номерами $n = 3\,383, 3\,783$ и $3\,804$, вклады от которых в $\mathfrak{M}(N)$ составляют, соответственно 4 924.53, 1 315.28 и 7 263.06. Аналогично, большой всплеск между $N = 300\,000$ и $N = 400\,000$ возник благодаря одному лишь слагаемому суммы $\mathfrak{M}(N)$, которое отвечает слишком маленькому значению $|\zeta(0.5 + it_n)|$ в точке Грама с номером 368 383 (см. Таблицу 7). Вклад от этого слагаемого, равный 11 225 285.77, составляет более 80% от величины $\mathfrak{M}(N)$.

Причина отклонения отношения в правой колонке таблицы от единицы состоит, по-видимому, в том, что вероятности $\mathbf{P}\{\xi_n \leqslant -x\}$ при слишком больших $x > 0$ (т.н. вероятности «больших уклонений») перестают подчиняться нормальному закону. Не исключено, что для таких вероятностей справедлив аналог гипотезы, сформулированной в 2001 г. К.П. Хьюджесом [66]. Согласно этой гипотезе, при любых $\varepsilon > 0$, $T \geqslant T_0(\varepsilon)$ и u с условием

$$u \geqslant \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{2}}\sqrt{\log\log T}$$

мера множества точек t промежутка $0 < t \leqslant T$, для которых

$$\frac{\sqrt{2}\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|}{\sqrt{\log\log T}} \leqslant -u,$$

эквивалентна $T\Delta$,

$$\Delta \,=\, c\cdot a\big(-0.5\big)\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{u}{\sqrt{2}}\sqrt{\log\log T}\right),$$

где

$$c = \exp\left\{3\zeta'(-1) + \frac{1}{12}\log 2 \,-\, \frac{1}{2}\log\pi\right\} \,\approx\, 0.364,$$

$$a(\lambda) \,=\, \prod_p\left(1 \,-\, \frac{1}{p}\right)^{\lambda^2}\,\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{\Gamma(m+\lambda)}{m!\,\Gamma(\lambda)}\right)^2\frac{1}{p^m},$$

так что $a\big(-0.5\big) \approx 0.919$.

Литература

1. Б. Риман, "О числе простых чисел, не превышающих данной величины". – В кн.: Б. Риман, Сочинения. – М.-Л., ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949, с. 216-224.

2. C. L. Siegel, "Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie", *Quellen und Studien zur Geshichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, B. 2(1932), 45-80 (см. также: C. L. Siegel, Gesammelte Abhandlungen. B.1. – K. Chandrasekharan, H. Maass (eds.), Berlin: Springer-Verlag, 1966, 275-310).

3. J.-P. Gram, "Note sur le calcul de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann", *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder* (*Bulletin de l'Académie des Sciences et des Lettres de Denmark*), 1895, 303-308.

4. J.-P. Gram, "Sur les Zéros de la Fonction $\zeta(s)$ de Riemann", *Acta Math.*, **27**(1903), 289-304.

5. C. L. Siegel, "Contributions to the theory of the Dirichlet L-series and the Epstein zeta-functions", *Ann. Math.*, **44**:2 (1943), 143-172 (см. также: C. L. Siegel, Gesammelte Abhandlungen. B.2. – K. Chandrasekharan, H. Maass (eds.), Berlin: Springer-Verlag, 1966, 360-389).

6. А.А. Карацуба, М.А. Королёв, "Аргумент дзета-функции Римана", *УМН*, **60**:3 (2005), 41-96.

7. J.E. Littlewood, "On the zeros of the Riemann zeta-function", *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **22**(1924), 295-318.

8. J. I. Hutchinson, "On the roots of the Riemann zeta-function", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **27**(1925), 49-60.

9. E. C. Titchmarsh, "The zeros of the Riemann zeta-function", *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **151**(1935), 234-255.

10. E. C. Titchmarsh, "The zeros of the Riemann zeta-function", *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **157**(1936), 261-263.

11. T. S. Trudgian "On the success and failure of Gram's Law and the Rosser Rule", *Acta Arith.* **148**:3 (2011), 225–256 (см. также: T. S. Trudgian, "Further results on Gram's law", DPhil Thesis, University of Oxford, 2009).

12. A. Selberg, "The zeta-function and the Riemann hypothesis", *C.R. Dixième Congrès Math. Skandinaves* (1946), **10**, Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1947, 187-200 (см. также: A. Selberg, Collected papers. Vol. I. – Berlin, Springer-Verlag, 1989, 341-355).

13. X. Gourdon, Computation of zeros of the Zeta function // `http: //numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html`

14. A. Selberg, Collected papers. Vol. I. – Berlin, Springer-Verlag, 1989.

15. J.E. Littlewood, "Two notes on the Riemann zeta-function", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **22**(1924), 234-242.

16. A. Ivic, The Riemann Zeta-Function. Theory and Applications. – New York, Dover Publications, Inc., 2003.

17. G.H. Hardy, J.E. Littlewood, "Contribution to the theory of Riemann zeta-function and the theory of distribution of primes", *Acta Math.*, **41**(1918), 119-196.

18. Я. Мозер, "Арифметический аналог одной формулы Харди-Литтлвуда в теории дзета-функции Римана", *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 37(1980), 109-120.

19. A.E. Ingham, "Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function", *Proc. London Math. Soc.*, **27**:2(1926), 273-300.

20. Я. Мозер, "О порядке одной суммы Е.К. Титчмарша в теории дзета-функции Римана", *Czechoslovak Math. J.*, **41**(116)(1991), 663-684.

21. А.А. Лаврик, "Проблема Титчмарша дискретной теории дзета-функции Римана", Теория чисел и анализ, Сборник статей. Труды Международной конференции по теории чисел, посвященной 100-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова, *Тр. МИАН*, 207, Наука, М., 1994, 197–230.

22. K. Soundararajan, "Moments of the Riemann zeta-function", Ann. Math., **170**:2(2009), 981-993.

23. A.J. Harper, "Sharp conditional bounds for moments of the Riemann zeta-function", `arXiv:1305.4618v1 [math.NT]`.

24. T. Christ, J. Kalpokas, "Upper bounds of discrete moments of the derivatives of the Riemann zeta function on the critical line", *Lithuanian Math. J.*, **52**:3(2012), 233-248.

25. T. Christ, J. Kalpokas, "Lower bounds of discrete moments of the derivatives of the Riemann zeta function on the critical line", to appear.

26. J. Kalpokas, "Discrete moments of the Riemann zeta function and Dirichlet L-functions". Doctoral dissertation, Vilnius university, Vilnius, 2012.

27. R. Balasubramanian, "On the frequency of Titchmarsh's phenomenon for $\zeta(s)$. VI", *Hardy-Ramanujan J.*, **9**(1986), 1-10.

28. K. Soundararajan, "Extreme values of zeta and L-functions", Math. Ann., **342**(2008), 467-486.

29. J. Kalpokas, M.A. Korolev, J. Steuding, "Negative values of the Riemann zeta function on the critical line", *Mathematika*, **59**:2(2013), 443-462.

30. M. Radziwiłł, "Large deviations in Selberg's central limit theorem", `arXiv:math 1108.5092v1 [math.NT]`.

31. A. Ghosh, "On Riemann's zeta-function – sign-changes of $S(T)$", *Recent progress in analytic number theory* (Durham, 1979), 1, Academic Press, London, New York, 1981, 25-46.

32. A. Ghosh, "On the Riemann zeta-function - mean value theorems and the distribution of $|S(t)|$", *J. Number Theory*, **17**:1 (1983), 93-102.

33. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. М., ГИФМЛ, 1963.

34. Е.Т. Уиттекер, Г.Н. Ватсон, Курс современного анализа. М.-Л., ГТТИ. Часть 1 – 1933; часть 2 – 1934.

35. G.H. Hardy, "On Differentiation and Integration of Divergent Series", Trans. Camb. Phil. Soc., **19**:3(1904), 297-321.

36. Е. Титчмарш, Теория функций. М.-Л., ГИТТЛ, 1951.

37. Р.Н. Бояринов, "О дробных моментах случайных величин", *Докл. РАН*, **436**:3(2011), 295-297.

38. A. Selberg, "Contributions to the theory of the Riemann zeta-function", *Archiv Math. Naturvid.*, **48**:5(1946), 89-155 (см. также: A. Selberg, Collected papers. Vol. I. – Berlin, Springer-Verlag, 1989, 214-280).

39. А.А. Карацуба, М.А. Королёв, "Поведение аргумента дзета-функции на критической прямой", *УМН* **61**:3 (2006), 3-92.

40. K.-M. Tsang, The distribution of the values of the Riemann zeta-function. A dissertation presented to the faculty of Princeton University in candidacy for the degree of Doctor of Philosophy. Princeton, 1984.

41. H. Cramer, "Sur une nouveau theoreme-limite de la theorie des probabilites", Actualites scientifiques et industrielles, Paris, 1938 (см. также: Г. Крамер, "Об одной новой предельной теореме теории вероятностей", *УМН*, **10**(1944), 166-178).

42. H.-K. Hwang, "Large deviations for combinatoril distributions. I: central limit theorems", *Ann. Appl. Prob.*, **6**:1(1996), 297-319.

43. A. Fujii, "On the zeros of Dirichlet L-functions (V)", *Acta Arith.*, **28**:4 (1976), 395-403.

44. Г.М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. 4-е изд. – М., Наука, 1966.

45. А.О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей. 2-е изд. М., ГИФМЛ, 1959.

46. A. Fujii, "Gram's law for the zeta zeros and the eigenvalues of Gaussian unitary ensembles", *Proc. Japan Acad. Ser. A*, **63**(1987), 392-395.

47. D.A. Goldston, S.M. Gonek, "A note on $S(t)$ and the zeros of the Riemann zeta-function", `arXiv:math/0511092v1 [math.NT]`.

48. E. C. Titchmarsh, "The mean-value of the zeta-function on the critical line", *Proc. London math. Soc.* (2), **27**(1928), 137-150.

49. J. Kalpokas, J. Steuding, "On the value distribution of the Riemann zeta-function on the critical line", *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, **1**:1(2011), 26-42.

50. A. Selberg, "Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series", Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, September, 25-29, 1989). Universitàt di Salerno, 1992, 367–385 (см. также: A. Selberg, Collected papers. Vol. II. – Berlin, Springer-Verlag, 1991, 47-64).

51. И.М. Виноградов, Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1980.

52. Г.Н. Ватсон, Теория бесселевых функций. Часть первая. М.: ИЛ, 1949.

53. J. B. Rosser, L. Schoenfeld, "Approximate formulas for some functions of prime numbers", *Illinois J. Math.*, **6**:1 (1962), 64-94.

54. А. А. Карацуба, "О функции $S(t)$", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:5 (1996), 27–56.

55. И.Г. Шевцова, "О неравенстве сглаживания", *Доклады РАН*, **430**:5 (2010), 600–602.

56. H.-K. Hwang, "Large deviations for combinatorial distributions. I: Central limit theorems", *Ann. Appl. Prob.*, **6**:1(1996), 297-319.

57. R.J. Backlund, "Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion", *Acta Math.*, **41** (1916), 345-375.

58. T.S. Trudgian, "An improved upper bound for the argument of the Riemann zeta-function on the critical line II", `arXiv:math/1208.5846v1 [math.NT]`.

59. J.B. Conrey, "More than two fifths of the zeros of the Rimann zeta-function are on the critical line", *J. reine angew. Math.*, **399** (1989), 1-26.

60. K.-M. Tsang, "Some Ω - theorems for the Riemann zeta-function", *Acta Arithm.*, **46**:4(1986), 369-395.

61. М.А. Королёв, "О больших значениях функции $S(t)$ на коротких промежутках", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1(2005), 115-124.

62. Р.Н. Бояринов, "О больших значениях функции $S(t)$ на коротких интервалах", *Мат. заметки*, **89**:4(2011), 495-502.

63. Р.Н. Бояринов, "Изменение знака функции $S(t)$ на коротких интервалах", *Вестн. МГУ, Сер. 1. Матем., мех.*, **3**(2010), 51-53.

64. М.А. Королёв, "Закон Грама и гипотеза Сельберга о распределении нулей дзета-функции Римана", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:4 (2010), 83–118.

65. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. B. I. Leipzig und Berlin, 1909.

66. C.P. Hughes, Characteristic polynomial of a random unitary matrix and the Riemann zeta function. A dissertation submitted to the University of Bristol in accordance with the requirements of the degree of Doctor of Philosophy. Bristol, 2001.