МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.55 + 517.958

Домрин Андрей Викторович

ГОЛОМОРФНЫЕ РЕШЕНИЯ СОЛИТОННЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Введение **4**

I. Задача Римана в теории интегрируемых систем **37**

1. Уравнения нулевой кривизны и метод одевания 37
2. Солитонные уравнения параболического типа 43
   - 2.1. Описание класса изучаемых уравнений 43
   - 2.2. Построение решений с помощью задачи Римана 51
   - 2.3. Верхнетреугольные 2×2-потенциалы и преобразование Лапласа 56
   - 2.4. Постоянные потенциалы 59
   - 2.5. Множители Бляшке и добавление солитона 60
3. Унитарное условие вещественности 63
   - 3.1. Условия разрешимости задачи Римана 63
   - 3.2. Первое доказательство теоремы 2 64
   - 3.3. Второе доказательство теоремы 2 66
   - 3.4. Приложения 67
4. Сравнение с быстроубывающим случаем 69
   - 4.1. Прямое преобразование рассеяния 70
   - 4.2. Обратное преобразование рассеяния 71
   - 4.3. Унитарное условие вещественности 73
5. Сравнение с конечнозонным случаем 73

II. Локальный вариант метода обратной задачи рассеяния **79**

1. Обратное преобразование рассеяния 79
   - 1.1. Леммы о пространствах формальных степенных рядов 80
   - 1.2. Разрешимость задачи Римана 83
   - 1.3. Свойства обратного преобразования рассеяния 90
2. Прямое преобразование рассеяния 92
3. Локальная голоморфная задача Коши для солитонных уравнений параболического типа 98
4. Унитарное условие вещественности 107

III. Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений **114**

1. Линейные уравнения и связанные с ними 114
   - 1.1. Свойство продолжения 114
   - 1.2. Задача Коши и голоморфное продолжение решений линейных уравнений 122

1.3. Мероморфные решения нелинейных уравнений 129
2. Уравнение Кортевега–де Фриза и связанные с ним 131
2.1. Свойство продолжения 131
2.2. Расходимость ряда Концевича–Виттена 133
3. Нелинейное уравнение Шредингера 137
4. Уравнения типа Кортевега–де Фриза 138
4.1. Формулировки результатов 138
4.2. Подготовка к доказательству теоремы 143
4.3. Доказательство теоремы 5 149
4.4. Доказательство следствия 153
IV. Некоммутативный комплексный анализ: теория унитонов 154
1. Введение 154
1.1. Гармонические отображения из S^2 в $U(n)$ 155
1.2. Некоммутативный вариант задачи 157
1.3. Область определения функционала энергии 158
1.4. Дальнейшее содержание главы 159
2. Предварительные сведения 160
2.1. Уравнения экстремалей 160
2.2. Эллиптическая регулярность 163
2.3. Решения энергии 0 164
2.4. Грассмановы решения 164
3. Теория унитонов 166
3.1. Топологический заряд проектора 166
3.2. Добавление унитона 168
3.3. Канонические унитоны 170
3.4. Базовые унитоны 172
3.5. Грассмановы решения 174
3.6. Диагональные решения $U(1)$-модели 176
4. Пространства решений $U(1)$-модели 176
4.1. Обозначения и предварительные сведения 176
4.2. BPS-решения 179
4.3. Грассмановы решения дефекта 2 и сферы неграссмановых решений 184
4.4. Решения с $e = 3$ 188
4.5. Решения с $r = 2$ 189
4.6. Решения с $e = 4$ 192
4.7. Решения с $e = 5$ 194
4.8. Заключение 198
Список публикаций автора по теме диссертации 200
Список литературы 201

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы, содержащего 116 наименований. Ее основной целью является изучение вопросов аналитического продолжения голоморфных решений вполне интегрируемых нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений с частными производными (солитонных уравнений). Отметим, что эти вопросы нетривиальны только для эволюционных уравнений параболического типа. Достижению указанной цели посвящены главы I–III, где для ростков таких решений установлены теоремы о принудительном аналитическом продолжении и описаны все возможные оболочки мероморфности, причем основным инструментом для этого служит развитый автором локальный вариант метода обратной задачи рассеяния для голоморфных потенциалов. В главе IV внешне совсем другими методами дается описание всех голоморфных (а также антиголоморфных и смешанных) решений достаточно малой энергии для некоммутативного (квантового) аналога одного из важнейших солитонных уравнений гиперболического типа: уравнения гармонических отображений двумерной сферы в унитарную группу. Объединяющей идеей всех глав работы является общая геометрическая основа солитонных уравнений (калибровочные преобразования плоских связностей), с которой и начнется наше изложение в § 1 главы I. Но введение удобнее будет начать с формулировки некоторых результатов главы III, а точнее, с их классических предшественников.

Хорошо известно, что всякое решение $u(x,t)$ уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ в окрестности точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$, дважды непрерывно дифференцируемое по x и один раз по t, автоматически является бесконечно дифференцируемым по t и аналитическим по x (это результат Э. Хольмгрена 1908 г.). Менее известно (хотя было открыто С. В. Ковалевской еще раньше, в 1875 г.), что если такое решение аналитично также и по t, то по x оно обязательно будет целой функцией, т. е. радиус сходимости ряда Тейлора функции $u(x, t_0)$

в точке x_0 будет равен ∞. Переходя к случаю комплексных переменных x и t, можно переформулировать это утверждение так: любое голоморфное решение $u(x,t)$ уравнения $u_t = u_{xx}$ в бидиске $D = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x-x_0| < \varepsilon_1,\, |t-t_0| < \varepsilon_2\}$ допускает аналитическое продолжение до функции $\widetilde{u}(x,t)$, голоморфной в полосе $S = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t-t_0| < \varepsilon_2\}$. Более подробное изложение истории этого результата и его обобщений см. в п. 1.2 главы III.

Из наших теорем[1] III.2(A), III.4(A) и следствия из теоремы III.5 в § III.4 вытекает, что то же самое утверждение, только с заменой голоморфности на мероморфность, справедливо и для следующих нелинейных эволюционных уравнений:

$$u_t = au_{xxx} + buu_x, \qquad a,b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{0.1}$$

$$u_{tt} = au_{xxxx} + buu_{xx} + bu_x^2, \qquad a,b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{0.2}$$

$$iu_t = au_{xx} + bu|u|^2, \qquad a,b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{0.3}$$

причем в (0.3) под $|u|^2$ понимается $u(x,t)\overline{u(\overline{x},\overline{t})}$.

Утверждение 1. *Для каждого из уравнений* (0.1)–(0.3)*, любое голоморфное решение* $u(x,t)$ *в бидиске* $D = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x-x_0| < \varepsilon_1,\, |t-t_0| < \varepsilon_2\}$ (*с вещественным центром* $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^2$ *в случае уравнения* (0.3)) *допускает аналитическое продолжение до мероморфной функции* $\widetilde{u}(x,t)$ *в полосе* $S = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t-t_0| < \varepsilon_2\}$.

Отметим, что все три уравнения (0.1)–(0.3) (с вещественными a,b) являются широко известными солитонными уравнениями, с каждого из которых в свое время начинался новый этап развития метода обратной задачи рассеяния. Этот метод был впервые предложен именно для уравнения Кортевега–де Фриза (0.1), описывающего длинные волны на мелкой воде[2]. К. Гарднер, Дж. Грин, М. Крускал и Р. Миура (1967) заметили, что когда потенциал $u(x,t)$ эволюционирует согласно (0.1), то эволюция его данных рассеяния (некоторых спектральных характеристик оператора $L = \partial_x^2 + u(x,t)$ на пространстве $L^2(\mathbb{R}^1_x)$) оказывается линейной и "явно интегрируемой", что позволяет строить примеры решений и изучать свойства всех решений определенных классов. Объяснение неожиданного успеха этого подхода дал П. Лакс (1968),

[1]При ссылках на теоремы, леммы, замечания, формулы, параграфы и пункты глав I–IV мы сначала указываем номер главы (но опускаем его, если ссылка делается из той же главы).

[2]Само слово "солитон" также было впервые введено Н. Забуски и М. Крускалом (1965) в качестве названия некоторых специальных решений уравнения (0.1).

показав, что уравнение (0.1) с $a = 1/4$, $b = 3/2$ есть условие разрешимости *вспомогательной линейной задачи*

$$L\psi = \lambda\psi, \qquad \psi_t = P\psi \tag{0.4}$$

для операторов $L := \partial_x^2 + u$ и $P := \partial_x^3 + (3/2)u\partial_x + (3/4)u_x$ (см. формулу (III.4.7) для случая $n = 2$, $r = 3$). Иными словами, уравнение (0.1) с $a = 1/4$, $b = 3/2$ можно записать в виде $L_t = PL - LP$ (см. (III.4.1)). Отсюда в силу кососимметричности оператора P вытекает, что эволюция оператора L сводится к его сопряжению посредством некоторого зависящего от t унитарного оператора на пространстве $L^2(\mathbb{R}^1_x)$, чем и объясняется удивительная простота закона эволюции данных рассеяния.

Нелинейное уравнение Шредингера (0.3) описывает эволюцию огибающей волнового пакета (амплитудно-модулированного сигнала), распространяющегося в нелинейной среде с дисперсией, и встречается в оптике, физике плазмы и гидродинамике. Его включение в рамки метода обратной задачи рассеяния, проведенное В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом (1971), потребовало замены в первом уравнении (0.4) скалярного дифференциального уравнения второго порядка на матричное 2×2-уравнение первого порядка с последующей редукцией (т.е. подбором матриц специальной алгебраической структуры, в данном случае косоэрмитовых; см. конец п. I.2.1). При этом вспомогательная линейная задача приобрела вид (см. (I.1.2))

$$E_x = UE, \qquad E_t = VE \tag{0.5}$$

для некоторых матричнозначных полиномов $U(x,t,z)$ и $V(x,t,z)$ степеней соответственно 1 и 2 от спектрального параметра $z \in \mathbb{C}$ (который в общей постановке § III.4 будет связан с параметром λ из (0.4) соотношением $\lambda = z^n$ в случае $n \times n$-матриц), а само уравнение (0.3) оказалось записанным, хотя и неявно, в виде редукции уравнения нулевой кривизны (см. (I.1.1))

$$U_t - V_x + UV - VU = 0, \tag{0.6}$$

играющего фундаментальную роль в нашей работе. Первая явная запись солитонных уравнений в виде редукций уравнений нулевой кривизны и первые применения такой формы записи принадлежат С. П. Новикову (1974).

Наконец, уравнение Буссинеска (0.2), описывающее (как и уравнение Кортевега–де Фриза) волны на воде, но допускающее (в отличие от уравнения

Кортевега–де Фриза) движение волн как вправо, так и влево, было включено в рамки метода обратной задачи рассеяния В. Е. Захаровым (1973) и оказалось первым физически важным случаем, где уже неудобно было ограничиваться 2×2-матрицами в (0.5) или операторами L второго порядка в (0.4) и пришлось рассматривать 3×3-матрицы или операторы третьего порядка (см. § III.4).

Завершая это краткое отступление в историю нелинейных моделей математической физики, отметим, что в значительной части нашей работы (как, между прочим, и во всей работе С. В. Ковалевской об уравнении теплопроводности) физический смысл изучаемых уравнений не играет никакой роли[3]. Нам достаточно знать, что все эти уравнения являются редукциями уравнений нулевой кривизны (0.6), связывающих функции U, V вида (0.12). В частности, коэффициенты a, b в (0.1), (0.2) могут быть любыми ненулевыми вещественными или даже комплексными числами.

Уже простейшие примеры показывают, что мероморфная функция $\widetilde{u}(x,t)$ в условиях утверждения 1 не обязана быть голоморфной[4] на области $S\subset\mathbb{C}^2$. Например, не зависящее от t решение $u(x,t) = -12ab^{-1}(x-c)^{-2}$ уравнения (0.1) имеет полюс вдоль произвольной комплексной прямой $\{(c,t)\in\mathbb{C}^2 \,|\, t\in\mathbb{C}\}$, параллельной оси t. Однако, ограничиваясь лишь вещественными значениями переменных (x,t) и так называемым *фокусирующим случаем* $ab>0$ нелинейного уравнения Шредингера (0.3), можно сформулировать следующий более точный аналог результата С. В. Ковалевской.

Утверждение 2. *Всякое вещественно-аналитическое решение* $u:\Pi\to\mathbb{C}$ *уравнения* (0.3) *с* $ab>0$ *на прямоугольнике* $\Pi := \{(x,t)\in\mathbb{R}^2 \,|\, |x-x_0|<\varepsilon_1,\ |t-t_0|<\varepsilon_2\}$ *продолжается до вещественно-аналитической функции* $\widetilde{u}:\Sigma\to\mathbb{C}$ *на полосе* $\Sigma := \{(x,t)\in\mathbb{R}^2 \,|\, |t-t_0|<\varepsilon_2\}$.

Это утверждение содержится в теореме III.4(C) и получено в конце довольно длинного пути, начатого в § I.3 и продолженного в § II.4. Оно неверно в дефокусирующем случае $ab<0$, что вполне согласуется с физическим смыслом нелинейного уравнения Шредингера.

Заметим, что утверждения 1 и 2 неулучшаемы: для каждого из рассмотренных в них случаев можно указать такое голоморфное решение $u(x,t)$ в бидис-

[3]Он, однако, вторгнется независимо от нашего желания в формулировку утверждения 2.

[4]Более того, нет никаких сомнений в том, что для всех решений $u(x,t)$ уравнения (0.1), удовлетворяющих условиям утверждения 1, кроме постоянного решения $u(x,t)\equiv\text{const}$ и "решения Концевича–Виттена" $u(x,t) = (x+B)/(C-bt)$, $B,C\in\mathbb{C}$ (см. (III.2.8)), мероморфная функция $x\mapsto u(x,t_0)$ всегда имеет хотя бы один полюс на $\mathbb{C}^1_x$. Однако мы пока не располагаем полным доказательством этого факта.

ке D (соответственно, вещественно-аналитическое в прямоугольнике Π) что функция $\widetilde{u}(x,t)$ не допускает дальнейшего мероморфного (или вещественно-аналитического) продолжения ни через одну граничную точку полосы S (соответственно Σ). Это замечание вытекает из цитированных выше результатов и леммы III.1(A) и может быть по лемме III.1(B) переформулировано так: оболочка мероморфности локального голоморфного решения $u(x,t)$ любого из уравнений (0.1)–(0.3) (вблизи точки $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^2\subset\mathbb{C}^2$ в случае (0.3)) всегда равна всей плоскости $\mathbb{C}$ в направлении оси x и может быть совершенно произвольной (любой предписанной) в направлении оси t.

Утверждение 1 переносится со случая уравнений Кортевега–де Фриза (0.1), Буссинеска (0.2) и нелинейного уравнения Шредингера (0.3) на порожденные ими бесконечные иерархии (описанные в § I.2 и § III.4) более сложных солитонных уравнений, причем чем выше номер уравнения в иерархии, тем сильнее результат об аналитическом продолжении (см. замечание II.4). Утверждение 2 также переносится со случая уравнения (0.3) на всю порожденную им иерархию (это вытекает из результатов § II.4).

Более того, утверждение 1 остается верным и для многих других известных уравнений, включая модифицированное и потенциальное уравнения Кортевега–де Фриза (см. (I.2.13) и замечание III.3) и уравнение Бюргерса (см. (III.1.6), (III.1.11)). Однако оно не имеет места для уравнения sin–Гордон $u_{tt}-u_{xx}=\sin u$ и уравнения главных киральных полей (IV.1.1) в силу гиперболического характера последних[5]. Неверно оно и для многих "несолитонных" параболических нелинейных уравнений (см. теоремы III.1 и III.2), а также для линейных уравнений с постоянными коэффицентами в случае более чем одной пространственной переменной (например, уравнение $\partial u/\partial t=\partial^2u/\partial x_1^2+\partial^2u/\partial x_2^2$ имеет не зависящие от t голоморфные решения с точками ветвления или любыми другими наперед заданными особенностями).

Сделав эти вводные замечания, перейдем к рассмотрению содержания диссертации по главам.

Глава I посвящена описанию класса изучаемых нами солитонных уравнений и метода построения их голоморфных решений с помощью задачи Римана о факторизации обратимых матричнозначных функций на окружности. Здесь закладывается необходимый фундамент для построений главы II.

Мы начинаем в § I.1 с *уравнений нулевой кривизны* (0.6), в которых $U(x,t,z)$

[5]В этом случае теорема Коши–Ковалевской позволяет построить локальное голоморфное в окрестности точки $(x_0,t_0)\in\mathbb{C}^2$ решение $u(x,t)$ с *любым* предписанным ростком $u(x,t_0)=u_0(x)$. В частности, этот росток может не допускать мероморфного продолжения на $\mathbb{C}$.

и $V(x,t,z)$ суть $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значные[6] рациональные функции от вспомогательного параметра z, коэффициенты которых зависят от пространственной и временно́й переменных x,t. При этом дивизоры полюсов функций U,V фиксированы заранее и не зависят от x,t, а под коэффициентами рациональной функции понимаются коэффициенты ее разложения на простейшие дроби или, что то же самое, коэффициенты главных частей лорановских разложений во всех полюсах. *Голоморфным решением уравнения* (0.6) *на области* $\Omega\subset\mathbb{C}^2_{xt}$ называется пара рациональных $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значных функций U,V от z с предписанными дивизорами полюсов такая, что все коэффициенты функций U,V определены и голоморфны на Ω, а все коэффициенты рациональной функции $U_t-V_x+[U,V]$ от z тождественно равны 0 на Ω. Выполнение уравнения (0.6) при фиксированном $z\in\overline{\mathbb{C}}$ (отличном от полюсов U и V) на какой-либо односвязной области $\Omega\subset\mathbb{C}^2_{xt}$ равносильно существованию голоморфного решения $E:\Omega\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ вспомогательной линейной системы (0.5) при том же значении z. Это решение единственно с точностью до умножения справа на любую обратимую матрицу, возможно, свою при каждом z. Если нас интересуют ростки решений U,V уравнения (0.6) в точке $(x_0,t_0)\in\Omega$, то естественно нормировать E требованием, что $E(x_0,t_0,z)\equiv I$ (единичная $n\times n$-матрица) при всех z.

Вторым главным действующим лицом в § I.1 является *задача Римана*. В простейшей ее версии (только и нужной нам) задаются открытые непересекающиеся круги $D_+,D_-\subset\overline{\mathbb{C}}$, замыкания которых покрывают всю расширенную комплексную плоскость: $\overline{D}_+\cup\overline{D}_-=\overline{\mathbb{C}}$. Непрерывная функция $\gamma:\Gamma\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ на окружности $\Gamma:=\overline{D}_+\cap\overline{D}_-$ называется *левофакторизуемой* (соответственно *правофакторизуемой*), если найдутся непрерывные функции $\gamma_\pm:\overline{D}_\pm\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, голоморфные на $D_\pm$ и такие, что $\gamma=\gamma_+\gamma_-^{-1}$ на Γ (соответственно $\gamma=\gamma_-^{-1}\gamma_+$ на Γ). Мы рассматриваем функцию γ как *данные* задачи Римана, а пару (γ_+,γ_-) — как *решение*. Если решение существует, то оно единственно с точностью до умножения элементов пары справа (соответственно слева) на одну и ту же постоянную обратимую матрицу.

Метод одевания Захарова–Шабата (1979) в нашем голоморфном контексте выглядит так. Пусть (U_0,V_0) — некоторое голоморфное решение (например, тождественно нулевое) уравнения (0.6) на области $\Omega\subset\mathbb{C}^2$ и пусть E_0

[6] Через $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ на протяжении всей работы обозначается множество всех $n\times n$-матриц с комплексными коэффициентами, а через $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ — группа всех обратимых таких матриц. Через $[A,B]=AB-BA$ обозначается коммутатор матриц $A,B\in\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$, а через $\overline{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ расширенная комплексная плоскость.

есть нормированное (в точке $(x_0, t_0) \in \Omega$) решение вспомогательной линейной системы (0.5). Рассмотрим любое покрытие расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ такими кругами D_+, D_-, что окружность $\Gamma = \overline{D}_+ \cap \overline{D}_-$ не проходит через полюсы рациональных функций U_0, V_0, и возьмем любую правофакторизуемую непрерывную функцию $g : \Gamma \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Для всех $(x, t) \in \Omega$ рассмотрим задачу Римана о нахождении обратимых непрерывных функций $\theta_\pm : \overline{D}_\pm \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, голоморфных на $D_\pm$ и таких, что

$$E_0(x,t,z)g(z)E_0^{-1}(x,t,z) = \theta_-^{-1}(x,t,z)\theta_+(x,t,z) \quad \text{при} \quad z \in \Gamma. \tag{0.7}$$

Чтобы добиться единственности решения $\theta_\pm$, фиксируем точку $z_0 \in D_-$ и добавим условие $\theta_-(x, t, z_0) = I$ для всех x, t. По теореме Б. Мальгранжа (1983), множество Ω_g всех точек $(x, t) \in \Omega$, для которых задача Римана (0.7) разрешима, есть либо вся область Ω, либо дополнение к некоторой комплексной кривой $C_g \subset \Omega$, не проходящей через точку (x_0, t_0), а матричнозначные функции $\theta_\pm(x, t, z)$ мероморфны на $\Omega \times D_\pm$ и имеют при каждом $z \in D_\pm$ не более чем полюс по (x, t) вдоль указанной кривой. Положим

$$U_1(x,t,z) = \begin{cases} (\theta_+)_x\theta_+^{-1} + \theta_+U_0\theta_+^{-1} & \text{при} \quad z \in \overline{D}_+, \\ (\theta_-)_x\theta_-^{-1} + \theta_-U_0\theta_-^{-1} & \text{при} \quad z \in \overline{D}_- \end{cases} \tag{0.8}$$

и зададим $V_1(x, t, z)$ точно такой же формулой, но с заменой U_0 на V_0 и производных по x на производные по t. Тогда пара $(U_1(x, t, z), V_1(x, t, z))$ задает голоморфное решение уравнения (0.6) на области $\Omega_g \subset \mathbb{C}^2_{xt}$ (или мероморфное решение на Ω) с теми же дивизорами полюсов рациональных функций U_1, V_1 от переменного z, что и у функций U_0, V_0. Говорят, что это решение получено *одеванием решения* U_0, V_0 *посредством функции* g.

Формула (0.8) основана на идее *калибровочного преобразования*. В собственном смысле слова так называется преобразование пары $U_0, V_0 : \Omega \times D \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ голоморфных функций, определенных на произведении областей $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ и $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, в новую пару U_1, V_1 по формулам

$$U_1 = \theta_x\theta^{-1} + \theta U_0\theta^{-1}, \qquad V_1 = \theta_t\theta^{-1} + \theta V_0\theta^{-1} \tag{0.9}$$

для произвольного голоморфного отображения $\theta : \Omega \times D \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (см. (I.1.9) для случая θ, не зависящего от z). Если U_0, V_0 удовлетворяли уравнению (0.6) на $\Omega \times D$, то и U_1, V_1 будут ему удовлетворять[7]. Более того, если область Ω

[7]Действительно, возьмем любое голоморфное решение $E_0 : \omega \times D \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ вспомога-

односвязна, то этим способом из любой пары U_0, V_0 голоморфных функций, удовлетворяющих (0.6) на $\Omega \times D$, можно получить любую другую при надлежащем выборе функции θ. Такой способ построения новых решений уравнения (0.6) из уже известных (причем в качестве D берется дополнение в $\overline{\mathbb{C}}$ к множествам полюсов рациональных функций U_0, V_0 переменного z) был бы во всех отношениях лучше метода одевания Захарова–Шабата, если бы он еще и гарантировал, что новая пара U_1, V_1 будет иметь в выброшенных точках (полюсах U_0, V_0) заранее предписанные особенности. Именно в обеспечении последнего условия и заключается роль задачи Римана (0.7) и определяемого ею кусочно-голоморфного калибровочного преобразования (0.8).

Начиная с § I.2, мы ограничиваемся случаем, когда дивизоры полюсов рациональных функций U, V равны ∞ и $m\infty$ для некоторого целого $m \geqslant 2$, т.е. U есть полином степени 1 от z, а V — полином степени $m \geqslant 2$ от z. В такой ситуации естественно рассмотреть предельный случай метода одевания[8], когда круг D_- стягивается в точку ∞, а круг D_+, напротив, расширяется до всей плоскости $\mathbb{C}$. Это означает, что в качестве одевающей функции $g(z)$ берется росток в точке ∞ произвольного голоморфного обратимого (и тем самым правофакторизуемого) матричнозначного отображения, а в качестве контура Γ берется любая окружность столь большого радиуса, что она лежит в области определения этого ростка. Чтобы сформулировать, во что превратится метод одевания в таком пределе, сделаем отступление об алгебраической структуре уравнений (0.6) для интересующих нас полиномов U, V, которая описана в п. I.2.1. А именно, можно с самого начала считать, что (см. (I.2.1))

$$(0.10)\quad U(x,t,z) = az + q(x,t)\ , \quad V(x,t,z) = bz^m + r_1(x,t)z^{m-1} + \ldots + r_m(x,t)$$

для некоторых *диагональных* матриц $a, b \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ и некоторых голоморфных функций $q, r_1, \ldots, r_m : \Omega \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ на заданной области $\Omega \subset \mathbb{C}^2$. Тогда

тельной линейной задачи $E_{0x} = U_0 E_0$, $E_{0t} = V_0 E_0$ на произвольной односвязной подобласти $\omega \subset \Omega$. Тогда функция $E_1 := \theta E_0$ будет голоморфным обратимым решением системы $E_{1x} = U_1 E_1$, $E_{1t} = V_1 E_1$ на $\omega \times D$. Например, $E_{1x} = \theta_x E_0 + \theta E_{0x} = \theta_x \theta^{-1} E_1 + \theta U_0 E_0 = (\theta_x \theta^{-1} + \theta U_0 \theta^{-1}) E_1 = U_1 E_1$. Приравнивая друг другу выражения для E_{1xt} и E_{1tx}, полученные дифференцированием равенств указанной системы и сокращая на E_1, получим выполнение (0.6) для U_1, V_1 на $\omega \times D$.

[8] Аналог этой конструкции для случая, когда множества полюсов U и V не пересекаются, позволил И. М. Кричеверу (1980), во-первых, построить все локальные голоморфные решения уравнения (0.6) одеванием некоторых простейших решений и, во-вторых, представить любое локальное решение в виде нелинейной суперпозиции двух волн, бегущих по характеристикам, подобно формуле Даламбера для решений волнового уравнения. В интересующем нас случае параболических эволюционных уравнений такие результаты заведомо не имеют места.

уравнение (0.6) записывается в виде системы $m+1$ матричных уравнений на $m+1$ неизвестных матричнозначных функций $q, r_1, \dots, r_m$. Предположим для невырожденности, что матрица a имеет *простой спектр*, т.е. все ее собственные значения различны, а матричнозначная функция $q(x,t)$ *внедиагональна*, т.е. $q_{ii}(x,t) \equiv 0$ при $i = 1, \dots, n$. Тогда m уравнений этой системы и диагональная часть последнего $(m+1)$-го уравнения решаются чисто алгебраически, так что система сводится к одному внедиагональному матричному уравнению на одну внедиагональную матричнозначную функцию $q(x,t)$.

Чтобы дать более подробную формулировку этого факта, фиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{C}$ и обозначим через $\mathcal{R}(x_0)$ множество ростков всех голоморфных $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значных отображений в точке x_0, а через $\mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ — множество всех внедиагональных ростков $q \in \mathcal{R}(x_0)$, т.е. таких, что $q_{ii}(x) \equiv 0$ при $i = 1, \dots, n$. Отображение $F : \mathcal{R}(x_0) \to \mathcal{R}(x_0)$ называется *дифференциальным полиномом*, если каждый матричный элемент функции $F(\kappa)$ есть обычный полином (один и тот же для всех κ) от матричных элементов функции κ и их производных по x. В следующем утверждении соединены лемма I.1 и следствие из леммы I.3.

Утверждение 3. (A) *Пусть $a, b, c_1, c_2, \dots \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ — произвольные диагональные матрицы, причем матрица a имеет простой спектр. Тогда существует единственная последовательность дифференциальных полиномов $F_j : \mathcal{R}(x_0) \to \mathcal{R}(x_0)$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ со следующими свойствами:*

(a) $F_0(\kappa) \equiv b$,

(b) $F_j(0) \equiv c_j$ *для всех* $j = 1, 2, \dots$,

(c) *формальный ряд Лорана* $F(\kappa, z) := \sum_{j=0}^{\infty} F_j(\kappa) z^{-j}$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению* $\partial_x F(\kappa, z) = [az + \kappa, F(\kappa, z)]$ *тождественно по* x *и* z *для всех* $\kappa \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$.

(B) *Для того, чтобы пара полиномов $U(x,t,z)$, $V(x,t,z)$ вида* (0.10) *с диагональными матрицами $a, b \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ (причем a имеет простой спектр) и внедиагональной функцией $q(x,t)$ была голоморфным решением уравнения нулевой кривизны* (0.6) *в области $\Omega \subset \mathbb{C}^2$, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий.*

(d) *Коэффициенты $r_1, \dots, r_m : \Omega \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ полинома V должны выражаться через внедиагональную функцию $q : \Omega \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ формулами*

$$r_1 = F_1(q), \quad \dots, \quad r_m = F_m(q)$$

для некоторых диагональных матриц $c_1(t), \dots, c_m(t) \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$, голоморфно зависящих от t в области, равной проекции Ω на координатную ось $\mathbb{C}^1_t$.

(e) *Внедиагональная голоморфная функция* $q : \Omega \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ *должна удовлетворять на* Ω *уравнению*

$$q_t = [a, F_{m+1}(q)] \tag{0.11}$$

для того же выбора диагональных матриц $c_1(t), \dots, c_m(t)$, *что в пункте* (d) *и для произвольной диагональной матрицы* $c_{m+1} \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ (*от выбора которой правая часть уравнения* (0.11) *на самом деле не зависит*).

В дальнейшем нас будут интересовать не все решения U, V уравнений нулевой кривизны (0.6), имеющие вид (0.10), а только те, которые отвечают решениям уравнения (0.11) для некоторых *не зависящих от* t диагональных матриц $c_1, \dots, c_j$. Кроме того, в целях невырожденности мы будем требовать, чтобы не только матрица a, но и матрица b имела простой спектр[9]. В этом случае мы будем называть уравнение (0.11) *солитонным уравнением параболического типа, заданным матрицами* $a, b, c_1, \dots, c_m$. Оно эквивалентно уравнению нулевой кривизны $U_t - V_x + [U, V] = 0$ для полиномов U, V вида

$$U(x, t, z) = az + q(x, t), \qquad V(x, t, z) = \sum_{j=0}^{m} F_{m-j}(q)(x, t) z^j, \tag{0.12}$$

где F_0, F_1, $\dots$, F_m суть дифференциальные полиномы, заданные последовательностью матриц $a, b, c_1, \dots, c_m$ согласно утверждению 3(A).

В качестве примеров редукций солитонных уравнений параболического типа в конце п. I.2.1 приводятся линейные уравнения вида $u_t = P(\partial_x)u$ для произвольного полинома P степени $\geqslant 2$ (см. (I.2.9)), три варианта нелинейного уравнения Шредингера (см. (I.2.10), (I.2.11)), уравнение Кортевега–де Фриза (I.2.12) и модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (I.2.13).

Закончив описание интересующего нас класса солитонных уравнений, вернемся к предельному случаю метода одевания для построения голоморфных решений таких уравнений. Одевать будем тождественно нулевое решение U_0, V_0 посредством любого ростка $g = f^{-1} \in \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ есть множество всех голоморфных $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-значных функций f на $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > R_0\} \cup \{\infty\}$ (R_0 свое для каждой f) с $f(\infty) = I$. Иными словами, $\mathcal{D}$ состоит из ростков голоморфных $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-значных функций f в точке ∞ с $f(\infty) = I$. Следующее утверждение представляет собой теорему I.1.

[9]Это условие нужно только в доказательстве теоремы II.3, причем, по всей видимости, указанная теорема остается верной и в том случае, когда b не есть скалярное кратное I, а относительно матрицы a все же предполагается простота спектра. Если это так, то в теореме III.5 можно будет условие взаимной простоты чисел r и n заменить на условие, что r не делится на n (см. замечание III.4.9).

Утверждение 4. *Пусть* $a, b, c_1, c_2, \ldots \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ — *диагональные матрицы, причем* a *имеет простой спектр. Фиксируем целое число* $m \geqslant 2$ *и точку* $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$. *Для каждой функции* $f \in \mathcal{D}$ *обозначим через* $\Omega(f)$ *множество всех* $(x, t) \in \mathbb{C}^2$ *таких, что функция*

$$\gamma(x, t, z) := \exp\{az(x - x_0) + (bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m)(t - t_0)\} f^{-1}(z)$$

правофакторизуема на некоторой (*и тогда на любой*) *окружности* $\{|z|{=}R\}$, $R_0 < R < +\infty$. *Тогда множество* $\Omega(f) \subset \mathbb{C}^2$ *содержит некоторую окрестность точки* (x_0, t_0). *Далее, для каждой точки* $(x, t) \in \Omega(f)$ *обозначим через* $(\gamma_+(x, t, z), \gamma_-(x, t, z))$ *решение соответствующей задачи Римана*

$$\gamma(x, t, z) = \gamma_-^{-1}(x, t, z)\gamma_+(x, t, z) \quad \textit{при} \quad R_0 < |z| < +\infty, \tag{0.13}$$

нормированное условием $\gamma_-(x, t, \infty) = I$, *и положим*

$$q_f(x, t) := \lim_{z \to \infty} z[\gamma_-(x, t, z) - I, a]. \tag{0.14}$$

Тогда функция $q_f : \Omega(f) \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ *внедиагональна, голоморфна в некоторой окрестности точки* (x_0, t_0) *и удовлетворяет там солитонному уравнению параболического типа* (0.11), *заданному матрицами* $a, b, c_1, c_2, \ldots$.

Заметим, что задача Римана (0.13) совпадает с (0.7) с точностью до обозначений $f = g^{-1}$, $\gamma_- = \theta_-$, $\gamma_+ = \theta_+ E_0$, а определение (0.14) построенного в утверждении 4 решения получается приравниванием коэффициентов при z^0 во втором равенстве (0.8).

Класс решений $q_f(x, t)$, построенных в утверждении 4, содержит все *конечнозонные* решения и многие *быстроубывающие*, причем как для тех, так и для других конструкция из утверждения 4 совпадает с соответствующим вариантом метода обратной задачи рассеяния, если рассматривать росток $f \in \mathcal{D}$ как *данные рассеяния* матричнозначного потенциала $q_f(x, t_0) \in \mathcal{R}(x_0)$. Эти утверждения будут подробно обоснованы в § I.4 и § I.5, а пока важно отметить, что наши "данные рассеяния" определяются своими "потенциалами" не однозначно, но эта неоднозначность контролируема: они определены с точностью до умножения справа на любой диагональный росток из $\mathcal{D}$. Следующее утверждение, выражающее этот факт, совпадает с леммой I.4.

Утверждение 5. *Две функции* $f, g \in \mathcal{D}$ *задают одно и то же решение* $q_f(x, t) = q_g(x, t)$ *уравнения* (0.11) *в окрестности точки* $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ *тогда*

и только тогда, когда функция $g^{-1}f \in \mathcal{D}$ *диагональна. То же самое условие необходимо и достаточно для выполнения равенства* $q_f(x,t_0) = q_g(x,t_0)$ *в окрестности точки* $x_0 \in \mathbb{C}$.

В оставшейся части § I.2 приведены три примера ситуаций, когда задача Римана (0.13) решается в явном виде. Первый из этих примеров (п. I.2.3) касается редукции $q_{21} \equiv 0$ для 2×2-матриц, которая приводит к линейным эволюционным уравнениям (I.2.9) с постоянными коэффициентами. Оказывается, что тогда сопоставление каждому потенциалу его данных рассеяния практически совпадает с хорошо известным преобразованием Лапласа. Этот факт мотивирует наши обозначения в гл. II и является основой доказательства леммы III.2.

Второй пример (п. I.2.4) состоит в вычислении данных рассеяния любого постоянного $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значного потенциала, что иллюстрирует конечнозонный случай, обсуждаемый в § I.5. В третьем примере (п. I.2.5), напротив, вычисляется потенциал, данные рассеяния которого задаются матричнозначным множителем Бляшке. Полученный результат существенно используется в одном из доказательств основного результата § I.3 (см. п. I.3.2): теоремы I.2, сформулированной ниже как утверждение 6 и представляющей собой достаточное условие разрешимости задачи Римана о факторизации матричнозначных функций на окружности. Указанное достаточное условие $\gamma(\overline{z})^*\gamma(z) \equiv I$ равносильно тому, что отображение $z \mapsto \gamma(z)$ окружности $\{|z| = R\}$ в комплексную группу Ли $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ переводит любые две точки, симметричные относительно вещественной оси в точки, симметричные относительно унитарной группы $U(n) \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

Утверждение 6. *Пусть* $R > 0$, $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = R\}$ *и* $\gamma : \Gamma \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ *такая гельдеровская функция, что* $\gamma(\overline{z})^*\gamma(z) = I$ *для всех* $z \in \Gamma$. *Тогда* γ *лево- и правофакторизуема.*

Отметим, что это утверждение не вытекает из широко известной теоремы Гохберга–Крейна (1958), которую напоминает по формулировке. Впрочем, оно и не содержит эту теорему. Мы приводим два доказательства утверждения 6 и его приложения к косоэрмитовым редукциям уравнения (0.11).

Первое доказательство основано на представлении любого *симметричного* (т.е. удовлетворяющего условию $\gamma(\overline{z})^*\gamma(z) \equiv I$) непрерывного отображения $\gamma : \Gamma \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ в виде произведения непрерывного симметричного отображения, сколь угодно близкого к постоянной функции I, и рационального

симметричного отображения. Для первого сомножителя задача факторизации разрешима по соображениям открытости множества обратимых операторов в банаховом пространстве (как в первом пункте доказательства теоремы I.1), а второй мы разлагаем по теореме В. П. Потапова (1955) и К. Уленбек (1989) на множители Бляшке и используем результаты третьего примера § I.2 (п. I.2.5), необходимые для которого условия трансверсальности выполняются благодаря унитарному условию симметрии даже в более сильной форме: в виде ортогональности надлежащих векторных подпространств $\mathbb{C}^n$.

Второе доказательство состоит в замечании, что из унитарного условия симметрии вытекает, во-первых, симметричность набора частных индексов отображения γ и, во-вторых, неположительность всех этих индексов. Оно короче первого, но использует теорему Биркгофа–Гротендика. Впоследствии мы дадим (в виде доказательства теоремы II.4(A)) и третье доказательство, причем значительно более общего результата, основанное на альтернативе Фредгольма в банаховом пространстве.

В качестве приложения утверждения 6 рассмотрим любое уравнение (0.11), заданное *косоэрмитовыми* матрицами $a, b, c_1, c_2, \ldots$. Примером может служить комплексифицированная версия (I.2.8) (с коэффициентами $A_0 = i$, $A_1 = A_2 = 0$) нелинейного уравнения Шредингера (0.3) с коэффициентами $a = -1$, $b = -2$. Среди всех решений $q(x,t)$ такого уравнения (0.11) выделяются те, которые *косоэрмитовы при вещественных* x, t: именно они дают решения физически интересных уравнений, возникающих после редукции. Первая часть следующего утверждения (леммы I.9) показывает, что (с точностью до неоднозначности, описанной в утверждении 5) решение $q_f(x,t)$, построенное в утверждении 4, обладает этим свойством тогда и только тогда, когда породившая его задача Римана (0.13) удовлетворяет условиям утверждения 6 для всех вещественных x, t. Из второй же части вытекает, что каждое такое решение $q_f(x,t)$ определено (и, разумеется, вещественно аналитично) на всей вещественной плоскости $\mathbb{R}^2_{xt}$. Иными словами, *все физически интересные решения изучаемого нами класса глобально определены.* Для быстроубывающих решений этот результат был получен (в частном случае фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера) В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом (1971), которые пользовались теоремой Гохберга–Крейна на $\mathbb{R}^1$ вместо нашего утверждения 6.

Утверждение 7. (A) *Если все матрицы* $a, b, c_1, c_2, \ldots$ *косоэрмитовы, то построенное в утверждении* 4 *решение* q *уравнения* (0.11) *удовлетворяет*

$q(x,t) = -q^*(x,t)$ для всех вещественных (x,t) в некоторой окрестности точки $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^2$ в том и только том случае, когда $q = q_f$ для некоторой функции $f \in \mathcal{D}$, удовлетворяющей $f(\overline{z})^* f(z) = I$ при $|z| > R$.

(B) *Если все матрицы $a, b, c_1, c_2, \ldots$ косоэрмитовы и функция $f \in \mathcal{D}$ удовлетворяет $f(\overline{z})^* f(z) = I$ при $|z| > R$, то поставленная в утверждении 4 задача Римана* (0.13) *разрешима при всех вещественных x, t, т.е. имеем $\Omega(f) \supset \mathbb{R}^2_{xt}$.*

Завершающие главу I параграфы I.4 и I.5 не являются логически необходимыми для последующего изложения. Их цель — показать, что наше употребление терминов “потенциал”, “данные рассеяния”, “прямое и обратное преобразования рассеяния” совпадает с общепринятым всякий раз, когда наши “потенциалы” удовлетворяют соответствующим граничным условиям. В зависимости от граничных условий различают быстроубывающую и конечнозонную (квазипериодическую) версии метода обратной задачи рассеяния.

Основные понятия быстроубывающей версии рассмотрены в § I.4. Здесь под потенциалом для простоты понимается любая внедиагональная функция $q : \mathbb{R}^1_x \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ класса Шварца $S(\mathbb{R}^1)$. Данные рассеяния такого потенциала (некоторые спектральные характеристики оператора $a^{-1}\partial_x - q(x)$ для заданной обратимой диагональной $n \times n$-матрицы a с простым спектром) полностью характеризуются структурой особенностей некоторой (определенной в п. I.4.1) кусочно-мероморфной $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значной функции $z \mapsto m_\pm(x_0, z)$, имеющей скачок вдоль $\mathbb{R}^1_z$. По теореме единственности для голоморфных функций, эти особенности однозначно определяются ростком $f(z)$ указанной кусочно-мероморфной функции в точке $z = \infty$. Этот росток мы и будем рассматривать как *данные рассеяния потенциала $q(x)$*. Тогда быстроубывающая версия метода обратной задачи рассеяния становится полностью параллельной теории, изложенной в § I.2, с одной лишь разницей: пространство $\mathcal{D}$ голоморфных ростков в точке $z = \infty$ следует всюду заменить на некоторое новое пространство $\mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$ кусочно-мероморфных ростков в той же точке. Ростки $f \in \mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$ обладают следующими свойствами, в формулировках которых участвуют верхняя и нижняя полуплоскости $\Pi_\pm = \{z \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Im} z > 0\}$:

(i) множество особых точек f на $\mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1$ конечно,

(ii) существуют матрицы $\psi_1^\pm, \psi_2^\pm, \ldots \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ такие, что при $\Pi_\pm \ni z \to \infty$ имеют место асимптотические разложения $f(z) \sim I + \psi_1^\pm z^{-1} + \psi_2^\pm z^{-2} + \ldots$, т.е. $\lim_{\Pi_\pm \ni z \to \infty} z^k (f(z) - I - \psi_1^\pm z^{-1} - \ldots - \psi_k^\pm z^{-k}) = 0$ для всех целых $k \geqslant 0$,

(iii) предельные значения $f_\pm(r) := \lim_{s \to 0+} f(r \pm is)$ существуют для всех $r \in$

$\mathbb{R}^1$ и задают C^∞ отображения $f_\pm : \mathbb{R}^1_z \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, причем $\lim_{|r|\to\infty} f_\pm(r) = I$.

В определение пространства $\mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$ входит также условие (в общем случае труднопроверяемое), что задача Римана о нахождении голоморфных отображений $m_\pm(x,\cdot) : \Pi_\pm \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, нормированных условием $\lim_{z\to\infty} m_\pm(x,z) = I$, граничные значения которых на $\mathbb{R}^1_z$ удовлетворяют

$$m_-^{-1}(x,z)m_+(x,z) = E_0(x,z)C(z)E_0^{-1}(x,z) \quad \text{для всех} \quad z \in \mathbb{R}^1, \tag{0.15}$$

должна быть разрешима при каждом $x \in \mathbb{R}^1$. Здесь $E_0(x,z) := e^{az(x-x_0)}$, а $C(z) := f_-^{-1}(z)f_+(z)$ есть скачок функции f вдоль R^1_z. Если функция f принадлежит $\mathcal{D}^{\mathrm{rd}} \cap \mathcal{D}$ и голоморфна на $\mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1$ (это требование чуть сильнее, чем (i)), то задача Римана (0.15) совпадает с применявшейся в утверждении 4 задачей Римана (0.13) для случая $m = 1$ (или, что то же самое, для любого $m \geqslant 2$ в предположении, что $b = c_1 = c_2 = \ldots = 0$). Это утверждение подробно обосновано в п. I.4.2.

Ситуация с последним условием из определения $\mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$ сильно упрощается, если ограничиться косоэрмитовыми матрицами a и потенциалами $q(x)$, а также только теми ростками $f(z)$, удовлетворяющими (i)–(iii), для которых выполнено[10] унитарное условие симметрии $f(\overline{z})^* f(z) \equiv I$. В этом случае разрешимость задачи Римана (0.15) при всех $x \in \mathbb{R}^1$ гарантируется теоремой Гохберга–Крейна. Таким образом, в быстроубывающей версии метода обратной задачи рассеяния, унитарное условие вещественности выражает симметрию данных задачи Римана относительно их носителя, что сильно отличается от ситуации утверждения 6.

Конечнозонная версия рассмотрена в § I.5. Основной результат параграфа содержится в пунктах (A) и (B) теоремы I.3 и гласит, что решения, построенные в утверждении 4 (в котором точка (x_0,t_0) считается равной началу координат в $\mathbb{C}^2$) — это те и только те гладкие решения $q(x,t)$ уравнения (0.11) в окрестности Ω начала координат в $\mathbb{R}^2_{xt}$, для которых существует $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значная функция $W(x,t,z)$, гладкая по $(x,t) \in \Omega$ и голоморфная по z на множестве $\{|z| > R\}$ (включая точку $z = \infty$), удовлетворяющая дифференциальным уравнениям

$$W_x = [U,W], \qquad W_t = [V,W] \tag{0.16}$$

[10] Возможно, после умножения $f(z)$ справа на некоторый диагональный росток, удовлетворяющий условиям (i)–(iii). В этом проявляется быстроубывающий аналог утверждения 5.

для всех $(x,t) \in \Omega$, $|z| > R$, где функции $U(x,t,z)$, $V(x,t,z)$ определены по решению $q(x,t)$ формулами (0.12), а также удовлетворяющая условию невырожденности[11]: комплексная кривая $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |z| > R,\ \det(W(0,0,z) - wI) = 0\}$ распадается на n различных голоморфных ветвей над проколотой окрестностью точки $z = \infty$. В то же время, согласно определению И. М. Кричевера (1983), конечнозонные решения уравнений нулевой кривизны — это те и только те, для которых существует *рациональная* по z функция $W(x,t,z)$ с теми же свойствами, что и выше. Таким образом, конечнозонные решения составляют подкласс множества решений, построенных в утверждении 4.

Глава II содержит основные результаты работы. От метода построения решений, изложенного в утверждении 4, мы переходим к его естественной модификации, охватывающей *все локальные голоморфные решения* уравнения (0.11) в окрестности данной точки $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$. Оказывается, для этого достаточно заменить множество "данных рассеяния"

$$\mathcal{D} = \left\{\text{сходящиеся ряды } f(z) = I + \frac{\varphi_0}{z} + \frac{\varphi_1}{z^2} + \dots \text{ с } \varphi_0, \varphi_1, \dots \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})\right\}$$

на множество

$$\mathcal{D}_{1/m} := \left\{\text{все формальные ряды } f(z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k}{z^{k+1}} \text{ с внедиагональными } \varphi_k \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C}) \text{ и с } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\varphi_k|}{k!^{1/m}} A^k < \infty \text{ для некоторого } A > 0\right\},$$

где $m \geqslant 2$ есть номер изучаемого уравнения (0.11) в его иерархии, а условие внедиагональности матриц φ_k наложено для того, чтобы избавиться от неоднозначности соответствия между потенциалами и их данными рассеяния, описанной в утверждении 5. Естественность класса $\mathcal{D}_{1/m}$ заключается в том, что его элементы — это те и только те формальные степенные ряды указанного вида, для которых левая часть равенства (0.13) (т.е. данные задачи Римана) корректно определена как формальный ряд Лорана при всех (x,t) в некоторой окрестности точки $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$. В случае $m = 1$ (или, что то же самое, $b = c_1 = c_2 = \dots = 0$) уравнение (0.11) принимает тривиальный вид

[11] Без которого пришлось бы признать любое решение конечнозонным, поскольку функция $W(x,t,z) \equiv I$ удовлетворяет (0.16) для любых U, V. У создателей теории конечнозонных решений нам не удалось найти точных формулировок условий невырожденности. Поэтому мы выбираем тот вариант условия невырожденности, который естественно возникает в нашей конструкции, а остальные возможные варианты просто перечисляем в замечании I.8.

$q_t = 0$, но его "решения", т.е. любые ростки $q(x)$ голоморфных внедиагональных $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значных функций в точке $x_0 \in \mathbb{C}$, также включаются в область действия описываемого метода. Этому посвящен весь § II.2.

В п. II.1.1 вводятся нужные нам банаховы пространства формальных степенных рядов. Для каждого $\alpha \geqslant 0$ будем обозначать через Gev_α и называть *классом Жеврея* α множество всех формальных степенных рядов вида $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{-(k+1)}$ с $\varphi_k \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ таких, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-\alpha} |\varphi_k| x^k$ имеет ненулевой радиус сходимости. Здесь $|\cdot|$ означает любую норму на $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$, обладающую свойством $|AB| \leqslant |A||B|$. Не вводя на векторном пространстве Gev_α никакой нормы или топологии, мы представляем его как объединение возрастющего семейства банаховых пространств, изометрически изоморфных l_1, а именно, $\mathrm{Gev}_\alpha = \bigcup_{A>0} G_\alpha(A)$, где $G_\alpha(A)$ есть множество всех формальных степенных рядов $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{-(k+1)}$ с $\varphi_k \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ таких, что $\|\varphi\|_{\alpha,A} := \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-\alpha} |\varphi_k| A^k < \infty$.

В том же духе мы при каждом $m \geqslant 1$ записываем векторное пространство всех $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значных целых функций порядка $\leqslant m$ и конечного типа (при порядке m) в виде $\mathrm{Ent}_m = \bigcup_{B>0} E_m(B)$, где $E_m(B)$ есть множество всех формальных степенных рядов $\varepsilon(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l z^l$ с $\varepsilon_l \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ таких, что $\|\varepsilon\|_{m,B} := \sup_{l \geqslant 0} |\varepsilon_l| (l!)^{1/m} B^{-l} < \infty$. Ясно, что каждое $E_m(B)$ есть банахово пространство, изометрически изоморфное пространству l_∞.

Важным свойством банаховых пространств $G_\alpha(A)$ и $E_m(B)$ является возможность перемножать их элементы при $\alpha m \leqslant 1$ и $B < A$, причем эти неравенства в общем случае неулучшаемы. Этот факт выражается следующим утверждением (леммой II.1), в котором через $\{\cdot\}_+$ и $\{\cdot\}_-$ обозначены положительная и отрицательная части формального ряда Лорана: $\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k\}_+ = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$, $\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k\}_- = \sum_{k\leqslant -1} a_k z^k$.

Утверждение 8. *Пусть $A > B > 0$, $m \geqslant 1$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1/m$. Тогда произведение элементов из $G_\alpha(A)$ и $E_m(B)$, взятых в любом порядке, есть корректно определенный формальный ряд Лорана, принадлежащий прямой сумме $G_\alpha(A-B) + E_m(B)$. Отображения $(\varphi,\varepsilon) \mapsto \{\varphi\varepsilon\}_\pm$ и $(\varphi,\varepsilon) \mapsto \{\varepsilon\varphi\}_\pm$ являются непрерывными билинейными формами на $G_\alpha(A) \times E_m(B)$ со значениями в $G_\alpha(A-B)$ и $E_m(B)$.*

Основной результат § II.1 — это следующее утверждение (теорема II.1) о разрешимости задачи Римана (0.13) в контексте расходящихся степенных рядов и об аналитических свойствах ее решений как функций от параметров. Фактически нам нужен лишь весьма частный случай, когда Ω есть $\mathbb{C}^2_{xt}$, а по-

лином $P(x,t,z)$ имеет вид $a(x-x_0)+(bz^m+c_1z^{m-1}+\ldots+c_m)(t-t_0)$ для тех же диагональных матриц $a,b,c_1,c_2,\ldots\in\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$, что и в утверждении 4. В пункте (B) утверждения 9 используется обозначение $\mathrm{Gev}_{\alpha-0}:=\bigcup_{0\leqslant s<\alpha}\mathrm{Gev}_s$.

Утверждение 9. (A) *Пусть даны комплексное многообразие Ω, целое число $m\geqslant 1$, голоморфные отображения $p_0,p_1,\ldots,p_m:\Omega\to\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ и точка $\xi_0\in\Omega$ такие, что $p_k(\xi_0)=0$ при $k=0,1,\ldots,m$. Положим $P(\xi,z):=\sum_{k=0}^m p_k(\xi)z^k$ для всех $\xi\in\Omega$, $z\in\mathbb{C}$. Тогда для любого ряда $f\in I+\mathrm{Gev}_{1/m}$ найдутся окрестность $\Omega(f)$ точки ξ_0 в Ω, числа $A,B>0$ и голоморфные отображения $\gamma_-:\Omega(f)\to I+G_{1/m}(A)$ и $\gamma_+:\Omega(f)\to E_m(B)$ такие, что при каждом $\xi\in\Omega(f)$ выполнено следующее равенство формальных рядов Лорана:*

$$e^{P(\xi,z)}f^{-1}(z)=\gamma_-^{-1}(\xi,z)\gamma_+(\xi,z) \tag{0.17}$$

и все значения целой функции $z\mapsto\gamma_+(\xi,z)$ принадлежат группе $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ всех обратимых комплексных $n\times n$-матриц и удовлетворяют равенству

$$\det\gamma_+(\xi,z)=e^{\operatorname{tr}P(\xi,z)}\quad\text{для всех}\quad z\in\mathbb{C}. \tag{0.18}$$

(B) *Если в условиях пункта* (A) *имеем $f\in I+\mathrm{Gev}_{(1/m)-0}$, а Ω является многообразием Штейна с $H^2(\Omega,\mathbb{Z})=0$, то существует не обращающаяся в нуль в точке ξ_0 голоморфная функция $\tau_f\in\mathcal{O}(\Omega)$ со следующими свойствами.*

(a) *Отображения $\xi\mapsto\tau_f(\xi)(\gamma_-(\xi,z)-I)$ и $\xi\mapsto\tau_f(\xi)(\gamma_-^{-1}(\xi,z)-I)$ аналитически продолжаются до глобальных голоморфных отображений $\Omega\to G_{1/m}(A)$ при каждом $A>0$.*

(b) *Для любого исчерпания $\{\xi_0\}=K_0\subset K_1\subset\ldots$ многообразия Ω голоморфно выпуклыми компактами $K_j\subset\operatorname{int}K_{j+1}$ с $H^2(\operatorname{int}K_j,\mathbb{Z})=0$ найдется последовательность чисел $B_j>0$ такая, что отображения $\xi\mapsto\tau_f(\xi)\gamma_+(\xi,z)$ и $\xi\mapsto\tau_f(\xi)\gamma_+^{-1}(\xi,z)$ продолжаются при каждом $j=1,2,\ldots$ до голоморфных отображений $\operatorname{int}K_j\to E_m(B_j)$.*

(c) *Равенства* (0.17) *и* (0.18) *выполняется для всех $\xi\in\Omega$ с $\tau_f(\xi)\neq 0$.*

Таким образом, если формальный $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значный степенной ряд $f(z)=I+\varphi_0z^{-1}+\varphi_1z^{-2}+\ldots$ принадлежит такому классу Жеврея, что левая часть равенства (0.17) корректно определена в некоторой окрестности точки ξ_0 по утверждению 8, то задача Римана (0.17) разрешима в (вообще говоря, меньшей) окрестности точки ξ_0, а ее решение $\gamma_\pm(\xi,z)$ голоморфно по ξ в этой точке. Если же, как в пункте (B), ряд $f(z)$ принадлежит строго меньшему классу Жеврея, то задача Римана (0.17) разрешима всюду на Ω кроме, может быть,

некоторой комплексной гиперповерхности $\{\xi \in \Omega \,|\, \tau_f(\xi) = 0\}$, не проходящей через точку ξ_0, а решение $\gamma_\pm(\xi, z)$ глобально мероморфно по ξ на Ω и имеет не более чем полюс вдоль указанной гиперповерхности.

Для доказательства пункта (A) утверждения 9 задача Римана (0.17) сводится к линейному неоднородному уравнению (II.1.6) вида $X(\xi)\varphi = u(\xi)$ на банаховом пространстве $E = G_\alpha(A)$ для надлежащих $\alpha \leqslant 1/m$ и $A > 0$, где заданный непрерывный линейный оператор $X(\xi) : E \to E$ и заданный вектор $u(\xi) \in E$ голоморфно зависят от ξ в окрестности ξ_0 и $X(\xi_0) = I$ есть тождественный оператор. Ясно, что решение $\varphi(\xi) = X(\xi)^{-1}u(\xi)$ существует, единственно и голоморфно зависит от ξ в некоторой окрестности точки ξ_0.

Для доказательства пункта (B) мы замечаем, что в условиях этого пункта оператор $X(\xi)$ и вектор $u(\xi)$ определены и голоморфны по ξ на всем пространстве параметров Ω, причем оператор $Y(\xi) := X(\xi) - I$ компактен при каждом $\xi \in \Omega$. Поэтому требуемое заключение вытекает из следующего известного[12] вспомогательного утверждения (леммы II.8).

Утверждение 10. *Пусть Ω есть многообразие Штейна с $H^2(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$, а $Y : \Omega \to \mathcal{B}(E)$ есть голоморфное отображение из Ω в пространство линейных непрерывных операторов на банаховом пространстве E, причем операторы $Y(\xi)$ компактны для всех $\xi \in \Omega$ и оператор $I + Y(\xi_0)$ обратим для некоторой точки $\xi_0 \in \Omega$. Тогда найдется голоморфная функция $\tau \in \mathcal{O}(\Omega)$ с $\tau(\xi_0) = 1$ такая, что*

(i) *$I + Y(\xi)$ обратим для тех и только тех $\xi \in \Omega$, для которых $\tau(\xi) \neq 0$;*

(ii) *$\tau(\xi)(I + Y(\xi))^{-1}$ есть голоморфное отображение $\Omega \to \mathcal{B}(E)$.*

Утверждение 9(A) дает нам возможность определить обратное преобразование рассеяния для всех $f \in I + \mathrm{Gev}_1$ (в то время как в утверждении 4 допускались лишь $f \in I + \mathrm{Gev}_0$) формулой (0.14) с $t = t_0$ (или, эквивалентно, с $b = c_1 = c_2 = \ldots = 0$). Это делается в п. II.1.3. Фиксируем диагональную матрицу $a \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ с простым спектром и произвольную точку $x_0 \in \mathbb{C}$. Для каждого формального степенного ряда $\varphi \in \mathrm{Gev}_1$ рассмотрим решение $\gamma_\pm(x, z)$ задачи Римана (0.17) с $P(x, z) = a(x - x_0)z$ и $f(z) = I + \varphi(z)$. Обозначим через $\mathcal{R}(x_0)$ множество ростков всех голоморфных $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значных отображений в точке x_0, а через $\mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ — множество всех внедиагональных ростков $q \in \mathcal{R}(x_0)$, т.е. таких, что $q_{ll}(x) \equiv 0$ при $l = 1, \ldots, n$. Тогда все коэффициенты

[12] И много раз переоткрывавшегося. По крайней мере, ссылки на авторство этого результата, приведенные в монографиях Т. Като (1972), С. Ленга (1977), М. Рида и Б. Саймона (1982) и Д. Р. Яфаева (1994), попарно не пересекаются.

$g_k(x)$ в записи

$$\gamma_-(x,z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k(x)}{z^{k+1}}$$

принадлежат $\mathcal{R}(x_0)$, а формула (по существу совпадающая с (0.14) при $t = t_0$)

$$B\varphi(x) := [g_0(x), a] \tag{0.19}$$

задает отображение $B : \mathrm{Gev}_1 \to \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$, называемое *обратным преобразованием рассеяния* и играющее важную роль в дальнейшем. Обозначение $B\varphi$ выбрано в честь преобразования Бореля (I.2.21), к которому (0.19) сводится для верхнетреугольных $\mathrm{gl}(2,\mathbb{C})$-значных сходящихся рядов $\varphi \in \mathrm{Gev}_0$ (см. (I.2.23)).

Прямое преобразование рассеяния $L : \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}} \to \mathrm{Gev}_1$ определяется в § II.2 формулой

$$Lq(z) := \mu(x_0, z) - I, \tag{0.20}$$

где $\mu(x,z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} m_k(x) z^{-(k+1)}$ есть единственное решение дифференциального уравнения $\mu_x = (az + q(x))\mu - \mu az$ в классе формальных степенных рядов указанного вида с $m_k \in \mathcal{R}(x_0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, такое, что все коэффициенты ряда $\mu(x_0, z) - I$ внедиагональны. Обозначение Lq выбрано в честь преобразования Лапласа (I.2.20), к которому (0.20) сводится в случае верхнетреугольных $\mathrm{gl}(2,\mathbb{C})$-значных потенциалов $q(x)$, являющихся целыми функциями экспоненциального типа (см. лемму I.6(B)). Первая часть следующего утверждения (теоремы II.2) показывает, что отображения L и B действительно взаимно обратны, если ограничиться только внедиагональными рядами из Gev_1 (как уже говорилось при определении пространства $\mathcal{D}_{1/m}$, это ограничение снимает неоднозначность, описанную в утверждении 5). Вторая часть утверждения 11 в соответствии с утверждением 9(B) гласит, что потенциалы, данные рассеяния которых принадлежат строго меньшему классу Жеврея, чем это необходимо для задачи Римана (0.17), являются глобально мероморфными по x.

Утверждение 11. (A) *Отображение $q \mapsto Lq$ есть биекция множества $\mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ на множество $\mathrm{Gev}_1^{\mathrm{od}}$ всех внедигональных рядов из Gev_1. Обратным отображением является сужение на $\mathrm{Gev}_1^{\mathrm{od}}$ отображения $B : \mathrm{Gev}_1 \to \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$, определенного в (0.19).*

(B) *Если $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ и $Lq \in \mathrm{Gev}_{1-0}$, то росток $q(x)$ аналитически продолжается до глобально мероморфной внедиагональной $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значной функции на $\mathbb{C}^1_x$, обладающей следующим свойством тривиальной монодромии во*

всех свох полюсах: при каждом $z \in \mathbb{C}$ вспомогательная линейная система $E_x = (az + q(x))E$ имеет глобально мероморфную фундаментальную систему решений или, эквивалентно, всякое голоморфное решение $u : D \to \mathbb{C}^n$ системы $u_x = (az + q(x))u$ на какой-либо области $D \subset \mathbb{C}^1_x$ аналитически продолжается до мероморфного решения на всем $\mathbb{C}^1_x$.

Ключевую роль в доказательстве утверждения 11 играют понятие калибровочного преобразования и следующая теорема Я. Сибуя (1990). Пусть даны целые числа $m, \nu \geqslant 1$ и *обратимый* линейный оператор $A : \mathbb{C}^\nu \to \mathbb{C}^\nu$. Пусть формальный степенной ряд $y(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) z^{-k}$ от параметра $z \in \mathbb{C}$, коэффициенты которого $a_k(x)$ суть $\mathbb{C}^\nu$-значные голоморфные ростки в точке $x_0 \in \mathbb{C}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = z^m Ay + \sum_{j=0}^{m-1} z^j B_j(x, y), \tag{0.21}$$

где все $B_j(x, y)$ суть $\mathbb{C}^\nu$-значные полиномы от компонент вектора y с коэффициентами из $\mathcal{O}(x_0)$. Тогда ряд $y(x_0, z)$ принадлежит классу Жеврея $\mathrm{Gev}_{1/m}$.

В наших применениях этой теоремы, $\mathbb{C}^\nu$ есть векторное пространство всех внедиагональных матриц $X \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, а оператор $AX := [C, X]$ сопоставляет каждой такой матрице ее коммутатор с некоторой диагональной матрицей $C \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$. Роль матрицы C играет a в § II.2 и b в § II.3. Обратимость оператора A равносильна тому, что матрица C имеет простой спектр. Этим и объясняются принятые в нашей работе условия невырожденности на матрицы a и b.

Что касается сформулированного в утверждении 11(B) свойства тривиальной монодромии, то оно всего лишь выражает геометрический смысл компоненты $\gamma_+(x, z)$ решения задачи Римана (0.17) с $P(x, z) = a(x - x_0)z$, состоящий в том, что столбцы матрицы $\gamma_+(x, z)$ задают поле реперов в слоях тривиального расслоения, параллельное относительно изучаемой плоской связности. Иными словами, $\gamma_+(x, z)$ является фундаментальной системой решений вспомогательной линейной системы (линейная независимость столбцов матрицы $\gamma_+(x, z)$ вытекает из (0.18)). Несмотря на такую легкость доказательства, свойство тривиальной монодромии оказывается нетривиальным и эффективно проверяемым[13] ограничением на глобально мероморфные матричнозначные функции, данные рассеяния которых относительно какой-либо

[13]Так, в замечании III.3 приведен результат И. Дюйстермаата и А. Грюнбаума (1986), явно описывающий все мероморфные потенциалы уравнения Кортевега–де Фриза, обладающие свойством тривиальной монодромии в данном полюсе.

точки $x_0 \in \mathbb{C}$ имеют класс Жеврея, меньший 1. Последнее же свойство интересно тем, что оно является необходимым (но не достаточным) условием разрешимости задачи Коши для уравнения (0.11) с данным начальным условием. Это выясняется в § II.3, к описанию содержания которого мы и переходим.

Напомним, что в нашей работе *солитонными уравнениями параболического типа* называются уравнения (или, собственно говоря, системы уравнений с частными производными) вида, уже указанного в (0.11):

$$q_t = [a, F_{m+1}(q)], \tag{0.22}$$

где $q(x,t)$ есть неизвестная внедиагональная $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значная функция, $m \geqslant 2$ есть заданное целое число, а через $F_0, F_1, F_2, \ldots$ обозначается последовательность дифференциальных полиномов по x, отвечающая некоторой последовательности диагональных матриц $a, b, c_1, c_2, \ldots \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ согласно утверждению 3(A), причем всегда предполагается выполненным условие невырожденности: *матрицы a, b имеют простой спектр.*

Обозначим через $\mathcal{R}(x_0,t_0)$ множество ростков всех голоморфных $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значных отображений в точке $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$, а через $\mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$ — множество всех внедиагональных ростков из $\mathcal{R}(x_0,t_0)$. *Локальная голоморфная задача Коши* для уравнения (0.22) состоит в том, что задан внедиагональный голоморфный росток $q_0 \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ и требуется найти росток $q \in \mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$, удовлетворяющий уравнению (0.22) и начальному условию $q(x,t_0) = q_0(x)$.

Утверждение 12. (A) *Задача Коши $q(x,t_0) = q_0(x)$ для уравнения* (0.22) *имеет локальное голоморфное решение $q(x,t)$ в окрестности точки $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$ тогда и только тогда, когда $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/m}$. Если такое решение $q(x,t)$ существует, то только одно.*

(B) *Всякое голоморфное решение $q(x,t)$ уравнения* (0.22) *в произвольном бидиске $D := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x-x_0| < \delta_1,\ |t-t_0| < \delta_2\}$ аналитически продолжается до функции, мероморфной в полосе $S := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t-t_0| < \delta_2\}$ и обладающей свойством тривиальной монодромии по x (в смысле утверждения* 11(B)) *при каждом фиксированном t. При этом существует голоморфное решение $q_0(x,t)$ уравнения* (0.22) *в бидиске D, не допускающее аналитического продолжения ни через одну граничную точку полосы S.*

(C) *Оболочка мероморфности любого локального голоморфного решения $q \in \mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$ уравнения* (0.22) *имеет вид $\mathbb{C}^1_x \times X$, где X — некоторая риманова область над $\mathbb{C}^1_t$. Обратно, для любой римановой области $\pi : X \to \mathbb{C}^1_t$*

над $\mathbb{C}^1_t$ *и любой точки* $(x_0, t_0) \in \mathbb{C} \times \pi(X)$ *существует локальное решение* $q \in \mathcal{R}(x_0, t_0)^{\mathrm{od}}$ *уравнения* (0.22) *с оболочкой мероморфности* $\mathbb{C}^1_x \times X$.

(D) *Если в обозначениях пункта* (A) *росток* $q_0(x) := q(x, t_0)$ *удовлетворяет* $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{(1/m)-0}$, *то решение* $q(x,t)$ *рассматриваемой задачи Коши аналитически продолжается до внедиагональной* $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$*-значной функции, мероморфной на всем* $\mathbb{C}^2$ *и обладающей следующим свойством тривиальной монодромии по* x *и* t *во всех своих полюсах. Для каждого* $z \in \mathbb{C}$ *вспомогательная линейная система*

$$E_x = (az + q(x,t))E, \quad E_t = (bz^m + F_1(q)(x,t)z^{m-1} + \ldots + F_m(q)(x,t))E$$

(*заданная равенствами* (0.5) *с учетом* (0.12)) *имеет глобально мероморфную фундаментальную систему решений на* $\mathbb{C}^2_{xt}$.

Доказательство необходимости условия $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/m}$ из пункта (A) для существования локального голоморфного решения задачи Коши проводится сведением уравнения, которому удовлетворяет формальное калибровочное преобразование нулевой связности $0\,dx + 0\,dt$ в связность $U\,dx + V\,dt$ (задавемую функцией $q(x,t)$ по формулам (0.12)), к виду (0.21) с переменной t вместо x и применением теоремы Сибуя (для чего нужно, чтобы матрица b имела простой спектр). Доказательство достаточности по существу такое же, как в утверждении 4, только разрешимость задачи Римана извлекается теперь из утверждения 9(A). Все остальные пункты утверждения 12 вытекают из пункта (A) и предыдущих утверждений. В замечаниях II.2–II.4 обсуждается тот факт, что из локальной разрешимости задачи Коши $q(x, t_0) = q_0(x)$ для какого-либо уравнения (0.22) с данным номером $m \geqslant 2$ вытекает ее глобальная разрешимость для всех уравнений вида (0.22) с номерами $m' < m$, а также строится пример не конечнозонных начальных условий, для которых указанная задача глобально разрешима при всех $m \geqslant 2$.

Заметим, что утверждение 1 для уравнений (0.1) и (0.3) является весьма частным случаем утверждения 12(B) благодаря примерам, приведенным в конце п. I.2.1. (Уравнение Буссинеска (0.2) будет включено в область действия утверждения 12 только в § III.4.) Что касается утверждения 2 и его аналогов для старших уравнений иерархии фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера, то они являются столь же частными случаями результатов § II.4, в котором все сказанное в § I.3 об унитарно-симметричных решениях, построенных в утверждении 4, переносится (в той мере, насколько это возможно) на класс всех локальных голоморфных унитарно-симметричных решений уравнений вида (0.22).

Всюду в § II.4 считается, что диагональная матрица $a \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ косоэрмитова, а начальная точка x_0 вещественна: $x_0 \in \mathbb{R}$. Назовем росток $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ *симметричным*, если $q(\overline{x})^* = -q(x)$ для всех комплексных x в окрестности x_0 или, эквивалентно, если матрица $q(x)$ косоэрмитова для всех вещественных x в окрестности x_0. Следуя терминологии § I.3, будем также называть формальный степенной ряд $f \in I + \mathrm{Gev}_1$ *симметричным*, если равенство $f(\overline{z})^* f(z) \equiv I$ выполняется в смысле формальных степенных рядов. Связь между этими понятиями такова (см. лемму II.13(C)).

Утверждение 13. *Росток $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ симметричен тогда и только тогда, когда он имеет вид $q = B\varphi$ для некоторого симметричного ряда $f = I + \varphi \in I + \mathrm{Gev}_1$. При любом α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, росток $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$, удовлетворяющий включению $Lq \in \mathrm{Gev}_\alpha$, симметричен тогда и только тогда, когда $q = B\varphi$ для некоторого симметричного ряда $f = I + \varphi \in I + \mathrm{Gev}_\alpha$.*

Основной результат § II.4 обобщает утверждение 6 на случай расходящихся рядов и содержит утверждение 2 в виде весьма частного случая. Будем называть целую функцию $E : \mathbb{C} \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ *симметричной*, если $E(\overline{z})^* E(z) = I$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Ясно, что все значения такой функции — обратимые матрицы, т.е. автоматически имеем отображение $E : \mathbb{C} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

Утверждение 14. (A) *Пусть $m \geqslant 1$ и $A_0 > 12B_0 > 0$. Если целая функция $E_0 \in E_m(B_0)$ и формальный ряд $f \in I + G_{1/m}(A_0)$ симметричны, то задача Римана $E_0 f^{-1} = \gamma_-^{-1}\gamma_+$ разрешима, т.е. для некоторых $A > B > 0$ найдется симметричная целая функция $\gamma_+ \in E_m(B)$ и симметричный формальный ряд $\gamma_- \in I + G_{1/m}(A)$ такие, что равенство $E_0 f^{-1} = \gamma_-^{-1}\gamma_+$ выполняется в смысле формальных рядов Лорана.*

(B) *Пусть $m \geqslant 2$ — целое число, $a, b, c_1, \ldots, c_m \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ — диагональные косоэрмитовы матрицы, причем a и b имеют простой спектр, и $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$. Тогда всякое локальное голоморфное решение $q \in \mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$ уравнения (0.22), для которого росток $q(x,t_0) \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ симметричен, аналитически продолжается до мероморфной внедиагональной $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значной функции $q(x,t)$ на области $S_\varepsilon = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t - t_0| < \varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon > 0$, причем это продолжение голоморфно (не имеет полюсов) на $S_\varepsilon \cap \mathbb{R}^2_{xt}$.*

Доказательство пункта (A) основано на альтернативе Фредгольма для операторов, возникающих в доказательстве утверждения 9(A). Техническое условие $A_0 > 12B_0 > 0$, скорее всего, можно ослабить до минимального предположения $A_0 > B_0 > 0$, при котором утверждение 8 гарантирует возможность

перемножить ряды $E_0(z)$ и $f^{-1}(z)$. Но такое уточнение утверждения 14(A) не имеет большого значения для наших целей, т.к. мы всегда можем уменьшить B_0, ограничиваясь меньшей окрестностью точки ξ_0 в пространстве параметров. Пункт (B) утверждения 14 выводится из пункта (A), утверждения 12(B) и утверждения 13 по существу тем же способом, что и для сходящихся рядов в § I.3. Примеры, показывающие что в общем случае нельзя утверждать голоморфность продолженного решения $q(x,t)$ ни на каком множестве, большем чем указано в утверждении 14(B), строятся с помощью теоремы Коши–Ковалевской в доказательстве теоремы III.4(C).

Глава III посвящена приложениям результатов главы II к вопросам голоморфного и мероморфного продолжения решений скалярных (а не матричных, как в главе II) эволюционных уравнений параболического типа, полученных редукциями систем (0.11) или (0.22).

Пусть $\mathcal{O}(x_0,t_0)$ есть множество всех ростков голоморфных функций в точке $(x_0,t_0)\in\mathbb{C}^2$. Скажем, что уравнение вида

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = a\frac{\partial^m u}{\partial x^m} + \Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{m-1}u}{\partial x^{m-1}}\right), \tag{0.23}$$

где $m > k \geqslant 1$ — целые числа, $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, а $\Phi(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{m-1})$ — произвольный полином с комплексными коэффициентами, обладает свойством *голоморфного* (*мероморфного*) *продолжения* (далее сокращенно СГП и СМП), если для любой точки $(x_0,t_0)\in\mathbb{C}^2$ и любого решения $u_0\in\mathcal{O}(x_0,t_0)$ этого уравнения существует голоморфная (мероморфная) функция $u(x,t)$ на полосе $\{(x,t)\in\mathbb{C}^2\,|\,|t-t_0|<\varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon>0$, совпадающее с $u_0(x,t)$ в окрестности точки (x_0,t_0). Как показано в лемме III.1, постулированное здесь свойство автоматически влечет выполнение всех утверждений пунктов (B) и (C) утверждения 12, кроме свойства тривиальной монодромии.

Рассмотрим 4 семейства уравнений вида (0.23):

$$u_t = P(\partial_x)u, \tag{0.24}$$

$$u_t = au_{xx} + Q(u)u_x, \tag{0.25}$$

$$u_t = au_{xx} + R(u_x), \tag{0.26}$$

$$u_t = au_{xx} + S(u)u_x^2, \tag{0.27}$$

где $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, P,Q,R,S — полиномы. Какие из этих уравнений обладают СГП или СМП? Ответ на этот вопрос дается в основном результате § III.1 (теореме III.1): свойством голоморфного продолжения обладают те и только те

из указанных уравнений, которые *линейны*, а свойство мероморфного продолжения имеет место тогда и только тогда, когда степени полиномов, задающих нелинейность, достаточно малы, а именно, $\deg Q \leqslant 1$, $\deg R \leqslant 1$, $S \equiv 0$. Доказательство этих утверждений опирается в своей положительной части на лемму III.2, принадлежащую, по-видимому, Г. С. Салехову (1950) (но снабженную нами новым простым доказательством на основе утверждения 12(B)), а в отрицательной части — на лемму III.3, известную еще Ш. Брио и К. Буке (1855). Приводится также следующий пример контраста между СМП и СГП: хотя все локальные голоморфные решения (существующие в изобилии по теореме Коши–Ковалевской с x в роли времени) уравнения

$$u_t = \partial_x(\partial_x + u)^{m-1}u, \qquad m = 3, 4, \dots \tag{0.28}$$

аналитически продолжаются до глобально мероморфных функций от x при каждом t, но если такое решение продолжается до целой функции от x хотя бы при одном значении t, то оно тождественно равно константе.

Пункт III.1.2 посвящен подробному обзору трех исторически сложившихся доказательств СГП для *линейных* уравнений вида (0.23) и для более общих линейных уравнений. Мы ассоциируем эти доказательства с работами С. В. Ковалевской (1875) — Г. С. Салехова (1950), К. Чисельмана (1969), и Ж. Лере (1957) — М. Цернера (1971) соответственно. В пункте III.1.3 вкратце перечислены направления современных исследований, наиболее близко подходящих к формулировке СМП для каких-либо нелинейных уравнений вида (0.23).

В § III.2 изучается вопрос о СГП и СМП для уравнений вида

$$u_t = au_{xxx} + Q(u)u_x, \tag{0.29}$$

$$u_t = au_{xxx} + R(u_x), \tag{0.30}$$

где $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, Q, R — полиномы. Ответ, содержащийся в теореме III.2, гласит, что эти уравнения обладают СГП тогда и только тогда, когда они линейны, а СМП имеет место в том и только том случае, когда $\deg Q \leqslant 2$, $\deg R \leqslant 2$. Примерами являются уравнение Кортевега–де Фриза ($Q(u) = bu$ для некоторого $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) и его модифицированная ($Q(u) = bu^2$) и потенциальная ($R(\xi) = b\xi^2$) версии. Доказательство положительной части основано на утверждении 12(B), а доказательство отрицательной части — на лемме III.3. Развитие этого круга идей позволяет нам установить в теореме III.3, что известное решение иерархии Кортевега–де Фриза в виде формального степенного ряда, изучавшееся Э. Виттеном (1991) и М. Л. Концевичем (1992), расходится по всем временны́м переменным, кроме первой.

В § III.3 установлено утверждение 1 (СМП во всех точках вещественной плоскости) для общего нелинейного уравнения Шредингера (0.3), а также утверждение 2 (о продолжении вещественно-аналитических решений в полосу на $\mathbb{R}^2_{xt}$) для фокусирующего случая $ab > 0$.

Утверждение 1 для уравнения Буссинеска (0.2) доказано в § III.4 в общем контексте *уравнений типа Кортевега–де Фриза*. Так называются эволюционные уравнения вида

$$L_t = [P, L], \tag{0.31}$$

где неизвестные функции — это коэффициенты $u_0, u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ линейного дифференциального оператора $L = \partial_x^n + \sum_{j=0}^{n-2} u_j(x,t)\partial_x^j$ фиксированного порядка $n \geqslant 2$, под L_t понимается оператор, полученный из L заменой всех его коэффициентов на их частные производные по t (и, очевидно, имеющий порядок не выше $n-2$), а оператор $P = \partial_x^r + \sum_{k=0}^{r-2} w_k(x,t)\partial_x^k$ фиксированного порядка $r \geqslant 2$ выбирается так, чтобы порядок оператора $[P, L] := PL - LP$ тоже не превосходил $n-2$. В полной аналогии с утверждением 3(B), это условие на коэффициенты $w_0, w_1, \dots, w_{r-2} \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ оператора P выполнено тогда и только тогда, когда

$$P = L_+^{r/n} + \sum_{k=0}^{r-2} \gamma_k(t) L_+^{k/n} \tag{0.32}$$

для произвольных ростков $\gamma_0, \dots, \gamma_{r-2} \in \mathcal{O}(t_0)$ (см. (III.4.4)). Ограничиваясь, как и в (0.12), случаем, когда $\gamma_k(t) \equiv \gamma_k = \text{const}$ в равенстве (0.32), мы можем записать эволюционную задачу (0.31) в виде системы $n-1$ уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = F_j(u_0, u_1, \dots, u_{n-2}), \qquad j = 0, 1, \dots, n-2, \tag{0.33}$$

где $F_0, F_1, \dots, F_{n-2}$ — некоторые полиномы от функций $u_0, u_1, \dots, u_{n-2}$ и их производных по x. Основной результат § III.4 (теорема III.5) представляет собой следующий точный аналог утверждения 12 для случая вспомогательной линейной системы (0.4) вместо (0.5).

Утверждение 15. *Фиксируем взаимно простые целые числа $n, r \geqslant 2$ и пусть набор ростков $u_0, u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ удовлетворяет в окрестности данной точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ системе* (0.33)*, эквивалентной уравнению* (0.31) *для некоторого оператора P вида* (0.32) *с постоянными коэффициентами $\gamma_k(t) \equiv \gamma_k = \text{const}$, $k = 0, 1, \dots, r-2$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(A) *Все ростки* $u_0(x,t_0), u_1(x,t_0), \dots, u_{n-2}(x,t_0) \in \mathcal{O}(x_0)$ *допускают аналитическое продолжение до функций* $\widetilde{u}_0(x), \widetilde{u}_1(x), \dots, \widetilde{u}_{n-2}(x)$, *мероморфных на всей плоскости* $\mathbb{C}^1_x$ *комплексного переменного* x.

(B) *Оператор* $\widetilde{L} := \partial_x^n + \sum_{j=0}^{n-2} \widetilde{u}_j(x)\partial_x^j$ *обладает следующим свойством тривиальной монодромии во всех полюсах своих коэффициентов: при каждом* $\lambda \in \mathbb{C}$ *обыкновенное дифференциальное уравнение* $\widetilde{L}\varphi = \lambda\varphi$ *имеет фундаментальную систему решений, мероморфных на всей плоскости* $\mathbb{C}^1_x$ *переменного* x. *Иными словами, любое решение* $\varphi \in \mathcal{O}(x_0)$ *уравнения* $\widetilde{L}\varphi = \lambda\varphi$ *аналитически продолжается до мероморфной функции на* $\mathbb{C}^1_x$.

(C) *Все полюсы каждой из функций* $\widetilde{u}_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, n-2$, *имеют порядок не выше* $n - j$.

(D) *Любое решение* $u_0, u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathcal{O}(D)$ *системы* (0.33) *в произвольном бидиске* $D := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x-x_0| < \delta_1,\ |t-t_0| < \delta_2\}$ *аналитически продолжается до набора мероморфных функций в полосе* $S := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t-t_0| < \delta_2\}$ *и, вообще говоря, не может быть аналитически продолжено дальше ни через одну граничную точку области* S.

(E) *Тем не менее, все решения* $u_0, u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$ *общего положения допускают аналитическое продолжение до набора мероморфных функций на всем пространстве* $\mathbb{C}^2$ *переменных* x, t.

Для доказательства мы, следуя В. Г. Дринфельду и В. В. Соколову (1984), разлагаем оператор L в произведение n операторов первого порядка:

$$L = (\partial_x - v_n(x,t)) \dots (\partial_x - v_1(x,t))$$

для некоторых ростков $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$ и определяем (автоматически внедиагональный в силу равенства $v_1 + \dots + v_n \equiv 0$) матричнозначный росток

$$q(x,t) := K^{-1} \operatorname{diag}(v_1(x,t), \dots, v_n(x,t)) K$$

с помощью матрицы $K \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ с элементами $K_{ij} = (\alpha_j)^{i-1}$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — все корни n-ой степени из единицы, перечисленные в произвольном порядке. Тогда вспомогательная линейная система (0.4), условием совместности которой является (0.31), принимает вид уравнений нулевой кривизны (0.5), (0.12) с номером $m = r$ для диагональных матриц

$$a := \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad b := a^r, \quad c_1 := 0, \quad c_j := \gamma_{r-j} a^{r-j},\ j = 2, \dots, r.$$

Ясно, что матрица a имеет простой спектр. В то же время матрица b имеет простой спектр тогда и только тогда, когда r и n взаимно просты. В этих

предположениях к полученному уравнению (0.11), эквивалентному (0.31), применимо утверждение 12. Из него и вытекают все пункты утверждения 15, кроме пункта (C), являющегося следствием широко известного критерия регулярной особой точки, принадлежащего Л. Фуксу (1868).

Глава IV начинается с рассмотрения известнейшего солитонного уравнения гиперболического типа: уравнения гармонических отображений $\mathbb{R}^2 \to U(n)$, где $\mathbb{R}^2$ снабжено лоренцевой метрикой, а унитарная группа $U(n)$ — стандартной инвариантной относительно сдвигов римановой метрикой. Вопросы, интересовавшие нас в главах I–III, становятся в этом случае тривиальными. Но если мы перейдем от лоренцевой метрики на $\mathbb{R}^2$ к евклидовой и добавим условие конечности энергии, равносильное по теореме Дж. Сакса и К. Уленбек (1981) продолжимости решения в бесконечно удаленную точку до гармонического отображения сферы Римана S^2 (с обычной сферической метрикой) в $U(n)$, то возникает новая задача: описать все решения. Подобные задачи рассматривались с позиций дифференциальной геометрии С. Черном (1965), Дж. Иллсом и Дж. Вудом (1983), Ф. Берсталлом (1986), С. Черном и Дж. Вольфсоном (1987) и многими другими вплоть до появления работы К. Уленбек (1989), полностью изменившей точку зрения, подходы и результаты.

Открытие Уленбек в общих чертах таково. Хорошо известно, что всякая изометрия (унитарное линейное преобразование) пространства $\mathbb{C}^n$ разлагается (с точностью до множителя $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$) в композицию конечного числа отражений, т.е. унитарных операторов вида $\Phi = I - 2P$, где P — ортопроектор на некоторое векторное подпространство $\mathbb{C}^n$. Оказывается, что всякое гармоническое отображение $S^2 \to U(n)$ точно так же разлагается (с точностью до постоянного множителя $U_0 \in U(n)$) в произведение конечного числа множителей вида $\Phi(\zeta) = I - 2P(\zeta)$, где $P(\zeta)$ при каждом $\zeta \in S^2 = \mathbb{C}P^1$ есть ортопроектор на некоторое векторное подпространство $\operatorname{im} P(\zeta) \subset \mathbb{C}^n$, голоморфно зависящее от ζ. Но эта голоморфность только для самого первого (справа) множителя понимается в обычном смысле, а для всех следующих — в некотором "подкрученном" смысле: относительно некоторой почти комплексной структуры на S^2, зависящей от всех предыдущих множителей. Несмотря на необходимость "подкрутки", описанная факторизация, к которой Уленбек пришла именно из соображений теории интегрируемых систем, оказалась самым мощным средством в задаче описания решений и привела к принципиально важным результатам, получить которые без нее и по сей день не представляется возможным.

Для более подробной формулировки рассмотрим функционал энергии

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{C}} |\varphi^{-1}d\varphi|^2\, dxdy = 2\int_{\mathbb{C}} |\varphi^{-1}\overline{\partial}\varphi|^2\, dxdy \tag{0.34}$$

на множестве всех гладких отображений $\varphi : \mathbb{C} \to U(n)$. Здесь $\overline{\partial}\varphi = (\varphi_x + i\varphi_y)/2$ означает производную по $\overline{z}$, а норма матрицы A определяется как $|A|^2 = \mathrm{tr}(AA^*)$. *Гармонические отображения из S^2 в $U(n)$* — это критические точки функционала $E(\varphi)$, т.е. решения уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\partial(\varphi^{-1}\overline{\partial}\varphi) + \overline{\partial}(\varphi^{-1}\partial\varphi) = 0$$

с $E(\varphi) < \infty$, где $\partial\psi = (\psi_x - i\psi_y)/2$ означает производную по z. Простейшие примеры таких решений задаются голоморфными и антиголоморфными отображениями из $S^2 = \mathbb{C}P^1$ в комплексный грассманиан $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$, вложенный в унитарную группу $U(n)$ в качестве вполне геодезического подмногообразия по формуле $V \mapsto \varphi = I - 2Q$, где $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ есть ортопроектор с образом V.

Результат Уленбек (1989) гласит, что для любого гармонического отображения $\varphi : S^2 \to U(n)$ найдется последовательность гармонических отображений $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m : S^2 \to U(n)$ такая, что φ_0 есть постоянное отображение (или, эквивалентно, решение нулевой энергии), $\varphi_m = \varphi$, а каждое отображение φ_{j+1} получается из φ_j добавлением некоторого *φ_j-унитона*. Последнее означает, что $\varphi_{j+1}(\zeta) = \varphi_j(\zeta)(I - 2P_j(\zeta))$ для некоторого семейства $\{P_j(\zeta) \,|\, \zeta \in \mathbb{C}\}$ ортопроекторов на $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих уравнениям

$$PAP^\perp = 0, \qquad P^\perp AP + 2P^\perp\overline{\partial}P = 0, \tag{0.35}$$

где $P = P_j$ есть указанное семейство проекторов, а $A = \varphi_j^{-1}\overline{\partial}\varphi_j$ есть логарифмическая $\overline{\partial}$-производная отображения φ_j. Дж. Валли (1988) вывел из (0.35) формулу для скачка энергии

$$E(\varphi_{j+1}) - E(\varphi_j) = 8\pi c_1(P_j)[S^2], \tag{0.36}$$

где $c_1(P_j)$ есть первый класс Чженя векторного расслоения на S^2, слоем которого над точкой $\zeta \in S^2$ является образ проектора $P_j(\zeta)$, а правая часть (0.36) с точностью до множителя 8π равна значению этого класса когомологий на фундаментальном цикле базы $[S^2] \in H_2(S^2)$. Поскольку числа $c_1(P_j)[S^2]$ всегда целые, отсюда вытекает, что энергия любого гармонического отображения из S^2 в $U(n)$ есть целое кратное 8π. Неизвестно, как можно было бы получить этот результат без теории унитонов.

В начале XXI столетия потребности физики (теории струн) и некоммутативной геометрии привели к рассмотрению следующего "проквантованного по Вейлю" варианта задачи об описании гармонических двумерных сфер в унитарной группе. Пусть H есть сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_0, e_1, \dots\}$. Зададим неограниченный оператор a на H с областью определения $\mathrm{dom}(a) = \{x \in H \mid \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)|x_j|^2 < \infty\}$ по формуле $a(e_j) = \sqrt{j}e_{j-1}$ для $j = 0, 1, 2, \dots$. Сопряженный к нему оператор a^* имеет ту же область определения $\mathrm{dom}(a^*) = \mathrm{dom}(a)$ и действует по формуле $a^*(e_j) = \sqrt{j+1}e_{j+1}$. Для каждого целого $n \geqslant 1$ распространим обозначения a и a^* на гильбертово пространство $H^n := H \oplus H \oplus \dots \oplus H$ (n слагаемых) $= \mathbb{C}^n \otimes H$, полагая $a(x_1, \dots, x_n) := (ax_1, \dots, ax_n)$ и аналогично для a^*. Теперь при каждом значении параметра (константы Планка) $\theta > 0$ заменим отображения $\varphi : \mathbb{C} \to U(n)$ на унитарные операторы $\Phi \in U(H^n)$, производные $\overline{\partial}$ и ∂ — на коммутаторы с $(2\theta)^{-1/2}a$ и $-(2\theta)^{-1/2}a^*$ соответственно, а взятие интеграла по $\mathbb{C}$ — на взятие $2\pi\theta\,\mathrm{Tr}$, где $\mathrm{Tr}\,X$ означает след ядерного оператора X на H^n. Тогда функционал (0.34) превратится в не зависящий от θ функционал

$$E(\Phi) := 2\pi\|[a, \Phi]\|^2_{\mathrm{HS}} \tag{0.37}$$

на множестве всех операторов $\Phi \in U(H^n)$ таких, что коммутатор $[a, \Phi]$ плотно определен и продолжается по непрерывности со своей области определения на все H^n, причем это продолжение принадлежит классу $\mathrm{HS}(H^n)$ операторов Гильберта–Шмидта. Здесь $\|A\|^2_{\mathrm{HS}} := \mathrm{Tr}(AA^*)$ означает квадрат нормы Гильберта–Шмидта. Чтобы избежать рассмотрения тонких вопросов, связанных с областями определения различных операторов, но сохранить геометрические аналогии, мы будем дополнительно предполагать, что оператор $\Phi - \Phi_0$ имеет конечномерный образ для какого-либо оператора вида $\Phi_0 = U_0 \otimes I$, где $U_0 \in U(n)$, а I есть тождественный оператор на H (тогда $E(\Phi_0) = 0$).

Основной целью главы IV является развитие теории унитонов для критических точек функционала (0.37) (далее именуемых просто *решениями $U(n)$-модели*), доказательство целочисленности энергии всех решений (в надлежащих единицах измерения) и описание пространств всех решений достаточно малой энергии.

В § IV.2 мы вводим обозначения и обсуждаем различные классы решений $U(n)$-модели без привлечения теории унитонов. Прежде всего выводятся различные формы записи уравнений экстремалей и устанавливается эффект эллиптической регулярности: для каждого решения Φ с $\mathrm{im}(\Phi - \Phi_0) \subset \mathrm{dom}(a^2)$

автоматически имеем $\mathrm{im}(\Phi - \Phi_0) \subset \mathrm{dom}(a^k)$ для всех $k \geqslant 2$. Затем рассмотрены решения энергии 0 и *грассмановы решения* (т.е. решения вида $I - 2P$ для некоторого ортопроектора $P : H^n \to H^n$).

В § IV.3 изложены общие результаты теории унитонов, начиная с некоммутативных аналогов класса Чженя в формуле (0.36) и процедуры добавления унитона (0.35). Из существования канонических отрицательных унитонов (п. IV.3.3) выводится наличие унитонной факторизации и целочисленность энергии (с точностью до множителя 8π) всех изучаемых решений. В оставшейся части § IV.3 введено понятие *канонического ранга* решения и дано описание решений с наименьшим и наибольшим возможным значением канонического ранга при данной энергии, а также установлены некоторые общие свойства грассмановых решений, которые затем иллюстрируются на примере диагональных решений $U(1)$-модели. В частности, в п. IV.3.5 вводится важное для дальнейшего понятие *дефекта* грассманова решения.

В § IV.4 изучаются пространства решений $U(1)$-модели, представимых в виде конечномерного возмущения тождественного оператора. Основными целочисленными характеристиками таких решений являются нормированная энергия e, канонический ранг r и минимальное унитонное число u, всегда удовлетворяющие неравенствам $r \leqslant e$ и $u \leqslant e$. В п. IV.4.2 мы описываем множество всех BPS-*решений*, т.е. решений с $u = 1$ или, что то же самое, некоммутативных аналогов голоморфных отображений из $\mathbb{C}P^1$ в грассманианы, вложенные в $U(n)$. Оказывается, что все BPS-решения энергии e составляют пространство $\mathbb{C}^e$, вещественно-аналитически вложенное в унитарную группу $U(H)$ гильбертова пространства H. Это автоматически дает описание всех решений, для которых либо $e \leqslant 2$, либо $r = 1$, либо $r = e$: все они являются BPS-решениями. В п. IV.4.3 доказано, что всякое грассманово решение G дефекта 2 порождает сферу неграссмановых решений, интерполирующую между G и некоторым BPS-решением той же энергии. Поскольку любое не-BPS-решение с $r = e - 1$ принадлежит одной из этих сфер, мы автоматически получаем описание всех решений с $e = 3$ (п. IV.4.4). В п. IV.4.5 установлено, что множество всех не-BPS-решений энергии e и канонического ранга 2 является прямым произведением $\mathbb{C}^1$ на цепочку из $[(e-1)/2]$ двумерных сфер, последовательно склееных друг с другом своими полюсами. Это автоматически дает описание случая $e = 4$ (п. IV.4.6). В п. IV.4.7 изучены случаи $r = e - 2$ (частично) и $e = 5$. Кроме уже известных нам множеств решений с $e = 5, r = 4$ (3-параметрическое семейство сфер) и $e = 5, r = 2$ (произведение $\mathbb{C}^1$ на цепоч-

ку из двух сфер), найдено множество решений с $e = 5, r = 3$: оно состоит из 3 непересекающихся экземпляров $\mathbb{C}^3 \setminus \mathbb{C}^2$, расположенных вокруг общей оси $\mathbb{C}^2$ как 3 листа книги вокруг переплета. В заключительном п. IV.4.8 мы вкратце суммируем все полученные результаты.

ГЛАВА I. ЗАДАЧА РИМАНА В ТЕОРИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

1. Уравнения нулевой кривизны и метод одевания

Известно (см. [1], [2]), что почти все физически важные $(1+1)$-мерные интегрируемые эволюционные уравнения (точнее, их комплексифицированные версии) могут быть представлены как *уравнения нулевой кривизны с рациональной зависимостью от спектрального параметра*, т.е. имеют вид

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \tag{1.1}$$

где $U(x,t,z)$ и $V(x,t,z)$ суть $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значные рациональные функции от вспомогательного параметра z, коэффициенты которых зависят от пространственной и временной координат x, t. При этом дивизоры полюсов функций U, V фиксированы заранее[1] и не зависят от x, t, а под коэффициентами рациональной функции понимаются коэффициенты ее разложения на простейшие дроби или, что то же самое, коэффициенты главных частей лорановских разложений во всех полюсах. Впервые запись солитонных уравнений в виде (1.1) применялась С. П. Новиковым [3] в 1974 г. Но признание (1.1) в качестве общей схемы построения таких уравнений (и одновременно широких классов их решений) произошло лишь с появлением в 1979 г. так называемой второй версии *метода одевания* В. Е. Захарова и А. Б. Шабата [4]. По любому заданному решению уравнения нулевой кривизны этот метод позволяет построить большое семейство новых решений, выражая их через решения задачи Римана о факторизации матричнозначных функций. Поэтому начнем описание нужного нам варианта метода одевания с напоминания терминологии и обозначений, относящихся к задаче Римана.

[1] Напомним, что дивизором полюсов рациональной функции $f(z)$ называется формальная сумма $A = k_1 a_1 + \ldots + k_p a_p$, где $a_1, \ldots, a_p \in \overline{\mathbb{C}}$ — все полюсы $f(z)$, а $k_1, \ldots, k_n \in$ — их порядки. Удобно обозначать множество $\{a_1, \ldots, a_p\}$ всех полюсов функции $f(z)$ также через A. Через $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ здесь и далее обозначается расширенная комплексная плоскость, а через $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ — множество всех $n \times n$-матриц с комплексными коэффициентами.

Эта задача (известная также как однородная задача Гильберта, задача Римана–Гильберта или задача линейного сопряжения, см. [5]–[7]) возникает во многих вопросах анализа и геометрии. В простейшей ее версии (только и нужной нам) задаются открытые непересекающиеся множества $D_+, D_- \subset \overline{\mathbb{C}}$, замыкания которых покрывают всю расширенную комплексную плоскость: $\overline{D}_+ \cup \overline{D}_- = \overline{\mathbb{C}}$, а общая граница $\Gamma := \overline{D}_+ \cap \overline{D}_-$ является гладкой замкнутой кривой без самопересечений (нам потребуется только случай, когда Γ — окружность). Обозначим через $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ группу всех обратимых комплексных $n\times n$-матриц. Непрерывная функция $\gamma : \Gamma \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ называется *левофакторизуемой* (соответственно *правофакторизуемой*), если найдутся непрерывные функции $\gamma_\pm : \overline{D}_\pm \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, голоморфные на $D_\pm$ и такие, что $\gamma = \gamma_+\gamma_-^{-1}$ на Γ (соответственно $\gamma = \gamma_-^{-1}\gamma_+$ на Γ). Мы рассматриваем функцию γ как *данные* задачи Римана, а пару (γ_+, γ_-) — как *решение*. Если решение существует, то оно единственно с точностью до умножения элементов пары справа (соответственно слева) на одну и ту же постоянную обратимую матрицу.

Изложим метод одевания в контексте построения локальных голоморфных (по x и t) решений уравнения (1.1). Под *решением уравнения* (1.1) *на области* $\Omega \subset \mathbb{C}^2_{xt}$ понимается пара рациональных $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значных функций U, V от z с предписанными дивизорами полюсов A, B такая, что все коэффициенты функций U, V определены и голоморфны на Ω, а все коэффициенты рациональной функции $U_t - V_x + [U,V]$ от z тождественно равны 0 на Ω. Хорошо известно (см., например, [8], п. 1.61), что выполнение уравнения (1.1) с фиксированным $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (A \cup B)$ на какой-либо односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}^2_{xt}$ равносильно существованию голоморфного решения $E : \Omega \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ вспомогательной линейной системы

$$E_x = UE, \qquad E_t = VE. \tag{1.2}$$

Это решение единственно с точностью до умножения справа на любую обратимую матрицу, возможно, свою при каждом z. Если нас интересуют ростки решений U, V уравнения (1.1) в точке $(x_0, t_0) \in \Omega$, то естественно нормировать E требованием, что $E(x_0, t_0, z) \equiv I$ (единичная $n \times n$-матрица) при всех $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (A \cup B)$.

По произвольной тройке (U_0, V_0, E_0), состоящей из решения (U_0, V_0) уравнения нулевой кривизны (1.1) на области $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ и нормированного решения E_0 вспомогательной линейной системы (1.2), следующим образом строится новая тройка (U_1, V_1, E_1). Возьмем любое покрытие D_+, D_- расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, для которого кривая $\Gamma = \overline{D}_+ \cap \overline{D}_-$ не проходит через полюсы

рациональных функций U_0, V_0 и возьмем любую правофакторизуемую непрерывную функцию $g : \Gamma \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Для всех $(x, t) \in \Omega$ рассмотрим задачу Римана о нахождении обратимых непрерывных функций $\theta_\pm : \overline{D}_\pm \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, голоморфных на $D_\pm$ и таких, что

$$E_0(x,t,z)g(z)E_0^{-1}(x,t,z) = \theta_-^{-1}(x,t,z)\theta_+(x,t,z) \quad \text{при} \quad z \in \Gamma. \tag{1.3}$$

Чтобы добиться единственности решения, фиксируем точку $z_0 \in D_-$ и добавим условие $\theta_-(x, t, z_0) = I$ для всех (x, t). В силу условия нормировки $E_0(x_0, t_0, z) \equiv I$ и правофакторизуемости $g(z)$, задача Римана (1.3) разрешима при $(x, t) = (x_0, t_0)$. Поскольку данные этой задачи голоморфно зависят от $(x, t) \in \Omega$, отсюда вытекает[2], что она разрешима и для всех (x, t) в некоторой окрестности точки (x_0, t_0), причем функции $\theta_\pm(x, t, z)$ также голоморфны по (x, t) в этой окрестности. На самом деле, об аналитических свойствах решения рассматриваемой задачи Римана можно сказать гораздо больше: по известной теореме Б. Мальгранжа ([9], § 4; см. также лекции А. А. Болибруха [10], приложение 3, теорема 2) множество Ω_g всех точек $(x, t) \in \Omega$, для которых задача Римана (1.3) разрешима, есть либо вся область Ω, либо дополнение к некоторой комплексной кривой $C \subset \Omega$, не проходящей через точку (x_0, t_0), и матричнозначные функции $\theta_\pm(x, t, z)$ мероморфны на $\Omega \times D_\pm$, имея при каждом $z \in D_\pm$ не более чем полюс по (x, t) вдоль указанной кривой. Этот эффект глобальной мероморфности решения задачи Римана по параметрам, от которых данные этой задачи зависят голоморфно, будет в несколько обобщенной формулировке играть важную роль в рассмотрениях главы II. Пока нам достаточно знать, что функции $\theta_\pm(x, t, z)$ определены и голоморфны в некоторой окрестности точки (x_0, t_0) для всех $z \in \overline{D}_\pm$.

Положим

$$U_1(x,t,z) = \begin{cases} (\theta_+)_x\theta_+^{-1} + \theta_+U_0\theta_+^{-1} & \text{при} \quad z \in \overline{D}_+, \\ (\theta_-)_x\theta_-^{-1} + \theta_-U_0\theta_-^{-1} & \text{при} \quad z \in \overline{D}_-. \end{cases} \tag{1.4}$$

Корректность этого определения (т.е. совпадение первой и второй строк при $z \in \Gamma = \overline{D}_+ \cap \overline{D}_-$) проверяется так. Заметим, что левая часть

$$W(x,t,z) := E_0(x,t,z)g(z)E_0^{-1}(x,t,z) \tag{1.5}$$

[2] См., например, [7], гл. 10. Правофакторизуемость непрерывной $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-значной функции $\gamma(z)$ на Γ равносильна обратимости порожденного ею теплицева оператора $\varphi \mapsto \{\gamma\varphi\}_+$ на пространстве Харди $H^2(\partial D_+)$, причем решение $\gamma_\pm$ соответствующей задачи Римана выражается через обратный оператор. В нашем случае теплицев оператор голоморфно зависит от параметров $(x, t) \in \Omega$, откуда и вытекают все сделанные утверждения.

равенства (1.3) (т.е. данные рассматриваемой задачи Римана) удовлетворяет при всех $z \in \Gamma$ так называемым резольвентным уравнениям

$$W_x = [U_0, W], \qquad W_t = [V_0, W]. \tag{1.6}$$

Действительно, дифференцируя равенство $WE_0 = E_0 g$ по x и заменяя согласно (1.2) производную E_{0x} на $U_0 E_0$, получаем первое уравнение (1.6), а аналогичное расуждение с t вместо x дает второе уравнение. Теперь дифференцируем по x равенство $\theta_- W = \theta_+$, справедливое для всех $z \in \Gamma$ согласно (1.3), и заменяем в полученном равенстве W_x на $[U_0, W]$ согласно первому уравнению (1.6), а W на $\theta_-^{-1}\theta_+$. Получим совпадение первой и второй строк в (1.4) при всех $z \in \Gamma$.

Поскольку функции $\theta_\pm(x,t,z)$ голоморфны и обратимы при всех $z \in D_\pm$, включая и полюсы функции U_0, мы видим из (1.4), что $U_1(x,t,z)$ является при каждом $(x,t) \in \Omega_g$ голоморфной функцией от z на всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, кроме кривой Γ (в точках которой наша функция, однако, непрерывна и потому голоморфна; см., например, [11], гл. III, § 11, п. 32, теорема 2) и полюсов U_0, в которых U_1 имеет также полюсы, причем того же порядка. По теореме Лиувилля заключаем, что U_1 есть рациональная функция от z с тем же дивизором полюсов, что и U_0. Таким образом, дивизор полюсов функции U_1 равен A.

Заменяя x на t и U_0 на V_0 в формуле (1.4) и пользуясь вторым уравнением (1.6), получаем аналогичным рассуждением голоморфную матричнозначную функцию $V_1(x,t,z)$, которая при каждом $(x,t) \in \Omega_g$ является рациональной функцией от z с тем же дивизором полюсов, что и V_0. Таким образом, дивизор полюсов функции V_1 равен B.

При каждом $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (A \cup B)$ можно указать (вообще говоря, не нормированное) обратимое решение $E_1(x,t,z)$ вспомогательной линейной системы

$$E_{1x} = U_1 E_1, \qquad E_{1t} = V_1 E_1, \tag{1.7}$$

определенное для всех $(x,t) \in \Omega_g$. А именно, при $z \in \overline{D}_+$ достаточно положить $E_1 = \theta_+ E_0$, а при $z \in \overline{D}_-$ можно взять $E_1 = \theta_- E_0$. Выполнение первого уравнения (1.7) проверяется дифференцированием формулы $E_1 = \theta_\pm E_0$ по x с последующей заменой E_{0x} на $U_0 E_0$ и E_0 на $\theta_\pm^{-1} E_1$, а выполнение второго уравнения (1.7) — тем же рассуждением с заменой t на x. Из наличия таких решений системы (1.7) вытекает, что *построенная пара* (U_1, V_1) *является решением уравнения* (1.1) *на* Ω_g. Для доказательства достаточно приравнять

друг другу смешанные производные $E_{1xt} = (U_1E_1)_t = U_1V_1E_1 + U_{1t}E_1$ и $E_{1tx} = (V_1E_1)_x = V_1U_1E_1 + V_{1x}E_1$ и сократить на обратимую матрицу E_1.

Заметим, что умножая построенные решения системы (1.7) справа на обратимые матрицы, зависящие только от z, легко предъявить решение системы (1.7), нормированное условием $E_1(x_0, t_0, z) \equiv I$ для всех $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (A \cup B)$. Оно имеет вид

$$E_1(x,t,z) = \begin{cases} \theta_+(x,t,z)E_0(x,t,z)\theta_+^{-1}(x_0,t_0,z) & z \in \overline{D}_+, \\ \theta_-(x,t,z)E_0(x,t,z)\theta_-^{-1}(x_0,t_0,z) & z \in \overline{D}_-. \end{cases} \tag{1.8}$$

Совпадение первой и второй строк в (1.8) для $z \in \Gamma = \overline{D}_+ \cap \overline{D}_-$ получается из равенств (1.3), взятых в точках (x,t) и (x_0,t_0), с учетом нормировки $E_0(x_0,t_0,z) \equiv I$. Формула (1.8) позволяет повторить процесс одевания (причем в "явном виде", если исходная тройка U_0, V_0, E_0 была задана явными формулами и все возникающие задачи Римана также решались явно) для любых новых областей, покрывающих $\overline{\mathbb{C}}$ и любой правофакторизуемой функции $g_1(z)$ на их общей границе. Ясно, что можно итерировать описанную конструкцию и дальше, неограниченное число раз. Из упомянутой выше теоремы Мальгранжа вытекает, что все построенные таким образом решения мероморфны по переменным x, t в исходной области $\Omega \subset \mathbb{C}^2$. Этим описание нужного нам (как исходная точка для специализации и обобщений) варианта метода одевания завершено.

Замечание 1. Голоморфные решения (U_0, V_0) и (U_1, V_1) уравнения (1.1) на области Ω называются *калибровочно эквивалентными*, если существует голоморфное отображение $\theta : \Omega \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (называемое *калибровочным преобразованием* решения (U_0, V_0) в решение (U_1, V_1)) такое, что

$$U_1 = \theta_x\theta^{-1} + \theta U_0\theta^{-1}, \qquad V_1 = \theta_t\theta^{-1} + \theta V_0\theta^{-1} \tag{1.9}$$

(можно добавить сюда еще и формулу преобразования $E_1 = \theta E_0$ решений вспомогательной линейной системы (1.2), дополнив ее условием $\theta(x_0, t_0) = I$, если мы хотим сохранить нормировку в точке (x_0, t_0)). Это действительно отношение эквивалентности, причем обладающее групповым свойством: если θ_1 переводит (U_0, V_0) в (U_1, V_1), а θ_2 переводит (U_1, V_1) в (U_2, V_2), то $\theta_2\theta_1$ переводит (U_0, V_0) в (U_2, V_2), а θ_1^{-1} переводит (U_1, V_1) в (U_0, V_0). С геометрической точки зрения калибровочно эквивалентные решения представляют собой одну и ту же плоскую связность в тривиальном главном $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-расслоении над $\Omega \times \overline{\mathbb{C}} \setminus (A \cup B)$, записанную в разных тривиализациях этого расслоения, причем

разница между тривиализациями не зависит[3] от z. Условившись не различать между собой калибровочно эквивалентные решения уравнения (1.1), мы могли бы и не дополнять задачу Римана (1.3) условием нормировки $\theta_-(x,t,z_0)\equiv I$ (правда, тогда пришлось бы отдельно потребовать, что $\theta_\pm(x,t,z)$ голоморфно зависят от (x,t)), поскольку выбор любой другой нормировки (в частности, изменение точки $z_0\in D_-$) приводит к некоторому калибровочному преобразованию нового решения (U_1,V_1) на Ω_g, построенного методом одевания.

Замечание 2. В большинстве физически интересных примеров решений уравнения (1.1) рациональные функции U,V имеют одноточечные множества полюсов, которые либо совпадают между собой (как для уравнения Кортевега–де Фриза или нелинейного уравнения Шредингера), либо нет (как для уравнения sine–Gordon и модели главного кирального поля). В первом случае можно назвать (1.1) интегрируемым эволюционным уравнением *параболического типа* (мы уточним эту терминологию в § 2), а во втором — *гиперболического типа*. Для уравнений гиперболического типа И. М. Кричевер [12], [13] (см. также [2], часть II, гл. 1, § 7) предложил замечательную модификацию метода одевания, позволяющую не только построить все локальные голоморфные решения уравнения (1.1) одеванием некоторых простейших решений, но и представить любое локальное решение в виде нелинейной суперпозиции двух волн, бегущих по характеристикам, подобно формуле Даламбера для решений волнового уравнения. В частности, эта конструкция применима к уравнению главных киральных полей, представляющему собой комплексификацию уравнения гармонических отображений двумерной плоскости с лоренцевой метрикой в унитарную группу (некоммутативный аналог евклидова варианта этих уравнений будет рассмотрен с другой точки зрения в главе IV). Но мы не будем углубляться в дальнейшие детали этого подхода, поскольку он (вопреки некоторым утверждениям в [2], стр. 309) не дает совершенно никакой информации о решениях солитонных уравнений *параболического типа*, изучение которых начинается в следующем параграфе.

[3]Если допустить зависимость от z, то придется признать *любые* два голоморфных решения (U_0,V_0) и (U_1,V_1) уравнения (1.1) на области $\Omega\subset\mathbb{C}^2_{xt}$ эквивалентными, т.к. они всегда связаны между собой формулой (1.9) для некоторого голоморфного отображения $\theta:\Omega\times\overline{\mathbb{C}}\setminus(A\cup B)\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Действительно, поскольку $\theta=E_0$ согласно (1.2) переводит нулевое решение $(0,0)$ в (U_0,V_0), то из группового свойства калибровочных преобразований вытекает, что $\theta=E_1E_0^{-1}$ переводит (U_0,V_0) в (U_1,V_1). В этом одна из причин того, что формулы вида (1.9) естественно возникали в наших рассуждениях раньше (например, в (1.4)) и будут возникать впредь (например, в §§ II.2, II.3).

2. Солитонные уравнения параболического типа

2.1. Описание класса изучаемых уравнений. Итак, попробуем обозреть совокупность тех уравнений нулевой кривизны (1.1), для которых U и V — полиномы от z степеней 1 и $m \geqslant 2$ соответственно (т.е. имеют дивизоры полюсов $A = \infty$ и $B = m\infty$). Обращение в нуль коэффициента при z^{m+1} в левой части (1.1) равносильно тому, что старшие коэффициенты полиномов U, V коммутируют для всех x, t. Нас интересует только случай, когда они диагонализуются в некотором общем базисе (зависящем от x, t). Взяв координаты векторов этого базиса за столбцы матрицы калибровочного преобразования, мы можем считать, что старшие коэффициенты не зависят от x, t и диагональны:

$$(2.1)\quad U(x,t,z) = az + q(x,t)\ , \quad V(x,t,z) = bz^m + r_1(x,t)z^{m-1} + \ldots + r_m(x,t)$$

для некоторых *диагональных* матриц $a, b \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ и некоторых голоморфных функций $q, r_1, \ldots, r_m : \Omega \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ на заданной области $\Omega \subset \mathbb{C}^2$. Тогда левая часть уравнения (1.1) есть полином степени m от z:

$$U_t - V_x + [U,V] = q_t - V_x + [U,V] = \sum_{j=0}^{m+1} s_j(x,t) z^{m+1-j}$$

со следующими коэффициентами (где для удобства пишем $r_0(x,t) \equiv b$):

$$(2.2)\qquad \begin{cases} s_0(x,t) \equiv [a,b] = 0\ , \\ s_j(x,t) = -(r_{j-1})_x + [q, r_{j-1}] + [a, r_j] \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, m\ , \\ s_{m+1}(x,t) = q_t - (r_m)_x + [q, r_m]\ . \end{cases}$$

Таким образом, уравнение (1.1) с дивизорами $A = \infty$ и $B = m\infty$ эквивалентно системе $m+1$ матричных уравнений $s_1(x,t) \equiv 0$, …, $s_{m+1}(x,t) \equiv 0$ относительно $m+1$ неизвестных матричнозначных функций $q, r_1, \ldots, r_m : \Omega \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$.

Предполагая для невырожденности, что матрица a имеет *простой спектр*, т.е. все ее собственные значения различны, а матричнозначная функция $q(x,t)$ *внедиагональна*, т.е. $q_{ii}(x,t) \equiv 0$ при $i = 1, \ldots, n$, отметим следующую особенность алгебраической структуры этой системы[4]. Из тех уравнений системы,

[4]Можно не требовать внедиагональности $q(x,t)$ (см., например, [14], замечание в конце п. 1.1), а относительно матрицы a предполагать лишь, что она не есть скалярное кратное I. В этом случае динамика диагональной части $q(x,t)$ будет тривиальной: $\partial q_{ii}/\partial t \equiv 0$ при $i = 1, \ldots, n$, а алгебраические рассуждения станут намного более громоздкими.

которые не содержат производных по t (т.е. из первых m ее уравнений и диагональной части $(m+1)$-го уравнения) функции $r_1, \dots, r_m$ последовательно выражаются в виде некоторых полиномов (с постоянными коэффициентами) от функции q и ее производных по x, причем однозначно с точностью до m произвольных диагональных матричных констант (возможно, своих при каждом t). Таким образом, (1.1) запишется уже не в виде системы $m+1$ матричных соотношений на $m+1$ неизвестную матричную функцию, а в виде одного внедиагонального матричного уравнения на одну внедиагональную матричную функцию $q(x,t)$. Это уравнение имеет вид $\partial_t q = P(q, \partial_x q, \dots, \partial_x^m q)$ для некоторого полинома P, более явно описываемого ниже (см. формулу (2.6)).

Для более детальной формулировки сделанных утверждений (содержащейся в лемме 3 ниже и ее следствии) фиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{C}$ и обозначим через $\mathcal{R}(x_0)$ множество ростков всех голоморфных $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значных отображений в точке x_0, а через $\mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ — множество всех внедиагональных ростков $q \in \mathcal{R}(x_0)$, т.е. таких, что $q_{ii}(x) \equiv 0$ при $i = 1, \dots, n$. Отображение $F : \mathcal{R}(x_0) \to \mathcal{R}(x_0)$ называется *дифференциальным полиномом*, если каждый матричный элемент функции $F(\kappa)$ есть обычный полином (один и тот же для всех κ) от матричных элементов функции κ и их производных по x. Начнем с описания всех решений резольвентного уравнения $F_x = [U, F]$ (см. первое уравнение (1.6)), имеющих, в отличие от контекста равенств (1.6), вид формального степенного ряда по обратным степеням z.

Лемма 1. *Пусть $a, b, c_1, c_2, \dots \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ — произвольные диагональные матрицы, причем a имеет простой спектр. Тогда существует единственная последовательность дифференциальных полиномов $F_j : \mathcal{R}(x_0) \to \mathcal{R}(x_0)$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ со следующими свойствами:*

(a) $F_0(\kappa) \equiv b$,

(b) $F_j(0) \equiv c_j$ *для всех* $j = 1, 2, \dots$,

(c) *формальный ряд Лорана* $F(\kappa, z) := \sum_{j=0}^{\infty} F_j(\kappa) z^{-j}$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\partial_x F(\kappa, z) = [az + \kappa, F(\kappa, z)]$$

тождественно по x и z для всех $\kappa \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$.

Доказательство. Условие (c) означает, что при каждом $j = 0, 1, 2, \dots$ тождественно на множестве $\mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ выполняется равенство

$$\partial_x F_j(\kappa) = [\kappa, F_j(\kappa)] + [a, F_{j+1}(\kappa)]. \tag{2.3}$$

(Здесь $\partial_x F_j$ означает композицию дифференциального полинома $F_j : \mathcal{R}(x_0) \to \mathcal{R}(x_0)$ и отображения $\partial_x : \mathcal{R}(x_0) \to \mathcal{R}(x_0)$, заменяющего каждый матричный элемент функции κ на его производную.) Положим $D_j := (F_j)_d$ и $N_j := (F_j)_{od}$. (Здесь и далее через X_d и X_{od} обозначаются *диагональная* и *внедиагональная части* матрицы $X \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, т.е. $X_d := \mathrm{diag}(X_{11}, \dots, X_{nn})$ и $X_{od} := X - X_d$.) Отделяя диагональную и внедиагональную части в уравнениях (2.3) и полагая для удобства $F_{-1} \equiv 0$, получим систему

$$(2.4^j_d) \qquad \partial_x D_{j-1} = [\kappa, N_{j-1}]_d,$$

$$(2.4^j_{od}) \qquad [a, N_j] = \partial_x N_{j-1} - [\kappa, F_{j-1}]_{od}$$

где $j = 0, 1, 2, \dots$. Заметим, что оператор $X \mapsto [a, X]$ биективно[5] отображает пространство всех внедиагональных $n \times n$-матриц на себя (поскольку $[a, X]_{kl} = (a_{kk} - a_{ll})X_{kl}$ при $1 \leqslant k, l \leqslant n$). Поэтому уравнения (2.4) можно решать последовательно по индукции. База индукции обеспечивается тем, что отображение $F_0 \equiv b$ удовлетворяет (2.4^0_{od}) и (2.4^1_d), а уравнение (2.4^0_d) превращается в тождество $0 = 0$. Переход от $j-1$ к j для $j \geqslant 1$ таков: зная F_{j-1}, мы однозначно находим N_j из уравнения (2.4^j_{od}), после чего уравнение (2.4^{j+1}_d) восстанавливает D_j с точностью до прибавления произвольной постоянной диагональной матрицы C_j.

Таким образом, для произвольной последовательности диагональных матриц $C_1, C_2, \dots \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ существует единственная последовательность отображений $F_j : \mathcal{R}(x_0) \to \mathcal{R}(x_0)$, удовлетворяющая условиям (a), (c) и следующему аналогу условия (b):

$$F_j(\kappa)(x_0) = C_j \quad \text{для всех } \kappa \in \mathcal{R}(x_0).$$

Эти отображения $F_j : \mathcal{R}(x_0) \to \mathcal{R}(x_0)$ являются *интегро-дифференциальными полиномами*, т.е. каждый матричный элемент функции $F_j(\kappa)$ получается из матричных элементов функции κ конечным числом алгебраических операций и операций дифференцирования и интегрирования.

Осталось показать, что построенные отображения F_j на самом деле являются дифференциальными полиномами. Это можно сделать с помощью следующего рассуждения из [15], п. 9.1.7. Рассмотрим формальный степенной ряд $F(\kappa, z) := \sum_{j=0}^{\infty} F_j(\kappa) z^{-j}$ от переменной z^{-1}. Условие (c) леммы 1 эквивалентно равенству $\partial_x F = [U, F]$ формальных рядов Лорана, где $U := az + \kappa$.

[5] Именно здесь используется предположение о простоте спектра матрицы a.

Из него легко вывести по индукции, что $\partial_x F^k = [U, F^k]$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Взяв матричный след от обеих частей этих уравнений, получаем, что

$$\partial_x \operatorname{tr} F^k = \operatorname{tr} \partial_x F^k = \operatorname{tr}[U, F^k] = 0 \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots .$$

Иными словами, если обозначить через $\mathcal{O}(x_0)$ множество ростков всех голоморфных $\mathbb{C}$-значных функций в точке x_0, то каждый коэффициент $\Phi : \mathcal{R}(x_0) \to \mathcal{O}(x_0)$ формального степенного ряда $\partial_x \operatorname{tr} F^k$ есть интегро-дифференциальный полином, удовлетворяющий равенству $\partial_x \circ \Phi \equiv 0$. Отсюда вытекает, что $\Phi \equiv \mathrm{const}$ в сильном смысле, т.е. функция $\Phi(\kappa) \in \mathcal{O}(x_0)$ не только является константой в окрестности x_0, но еще и не зависит[6] от κ. Таким образом, коэффициенты h_l^k формального степенного ряда

$$\operatorname{tr} F(\kappa, z)^k = \operatorname{tr}(F_0(\kappa) + F_1(\kappa) z^{-1} + \dots)^k = h_0^k + h_1^k z^{-1} + \dots$$

постоянны и не зависят от κ.

Докажем индукцией по j, что отображения F_j являются дифференциальными полиномами. При $j = 1$ это очевидно. Допустим, что все F_j с $j \leqslant l-1$ являются дифференциальными полиномами и покажем, что F_l таков. Внедиагональная компонента $N_l := (F_l)_{od}$ является дифференциальным полиномом согласно (2.4^l_{od}). Далее, коэффициент при z^{-l} в $F(\kappa, z)^k$ равен сумме, в которой k слагаемых содержат F_l (каждое из этих слагаемых есть произведение $k-1$ множителей, равных $F_0 \equiv b$, и одного множителя F_l), а остальные содержат только F_j с $j \leqslant l-1$. Тем самым, след этого коэффициента равен

$$k \operatorname{tr}(b^{k-1} F_l) + (\text{дифференциальный полином}) = \\ = k \operatorname{tr}(b^{k-1} D_l) + (\text{дифференциальный полином}).$$

Приравнивая данный след константе h_l^k и полагая $k = 1, \dots, n$, мы получаем систему из n линейных уравнений на n неизвестных $(D_l)_{11}, \dots, (D_l)_{nn}$. Правая часть указанной системы задается дифференциальным полиномом, а ее детерминант совпадает с определителем Вандермонда, который отличен от нуля, если все диагональные элементы матрицы b различны. Тем самым, в этом случае D_l является дифференциальным полиномом. Оставшийся случай

[6] Эта независимость не имеет места для произвольных отображений $\Phi : \mathcal{R}(x_0) \to \mathcal{O}(x_0)$ с $\partial_x \circ \Phi \equiv 0$ (например, можно положить $\Phi(\kappa)(x) = \kappa_{11}(x_0)$ для всех x в окрестности x_0). Но она выполняется для интегро-дифференциальных полиномов.

(когда среди собственных значений матрицы b могут быть совпадающие) получается из уже рассмотренного по непрерывности, учитывая, что отображение F_l зависит от матричных элементов b линейно (и значит непрерывно). $\square$

Из доказательства леммы 1 видно, что каждый дифференциальный полином F_j однозначно определяется лишь первыми $j+2$ матрицами $a, b, c_1, \dots, c_j$, поэтому мы иногда будем обозначать его через $F_j =: F_j^{(a,b,c_1,\dots,c_j)}$. Заметим, что $F_j(\kappa)$ содержит производные от κ лишь порядков $\leqslant j-1$. Кроме того, доказательство леммы 1 дает следующее усиление утверждения о единственности дифференциальных полиномов F_j.

Лемма 2. *Фиксируем матрицы $a, b \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ как в лемме 1 и внедиагональный росток $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$. Пусть последовательность ростков $\varphi_j \in \mathcal{R}(x_0)$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ удовлетворяет условиям:*

(i) $\varphi_0(x) \equiv b$,

(ii) *при каждом $j = 0, 1, 2, \dots$ имеем $\partial_x \varphi_j = [q, \varphi_j] + [a, \varphi_{j+1}]$.*

Тогда найдутся диагональные матрицы $c_1, c_2, \dots \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ такие, что $\varphi_j = F_j^{(a,b,c_1,\dots,c_j)}(q)$ для всех $j = 1, 2, \dots$. При этом для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнено равенство $\mathrm{tr}(\varphi_0 + \varphi_1 z^{-1} + \varphi_2 z^{-2} + \dots)^k = \mathrm{tr}(b + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots)^k$ формальных степенных рядов от z^{-1}.

Теперь вернемся к уравнению нулевой кривизны (1.1) для полиномов U, V вида (2.1). Выше оно было эквивалентно переписано в виде системы

$$s_1(x,t) = 0, \quad \dots, \quad s_{m+1}(x,t) = 0,$$

где $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значные функции $s_1, \dots, s_{m+1}$ определены равенством (2.2). Покажем, что эта система в свою очередь сводится к одному внедиагональному матричному уравнению на одну внедиагональную матричную функцию.

Лемма 3. *Фиксируем произвольные матрицы $a, b \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ как в лемме 1 и любой внедиагональный росток $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$. Для того, чтобы набор ростков $r_1, \dots, r_m \in \mathcal{R}(x_0)$ удовлетворял условиям*

(a) $(r_{j-1})_x = [q, r_{j-1}] + [a, r_j]$ *при $j = 1, \dots, m$,*

(b) *росток $r_{mx} - [q, r_m]$ внедиагонален,*

необходимо и достаточно, чтобы существовали такие диагональные матрицы $c_1, \dots, c_m \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, что $r_j = F_j^{(a,b,c_1,\dots,c_j)}(q)$ для $j = 1, \dots, m$. Если это условие выполнено, то внедиагональный росток $r_{mx} - [q, r_m]$ удовлетворяет соотношению

$$r_{mx} - [q, r_m] = [a, F_{m+1}^{(a,b,c_1,\dots,c_m,c_{m+1})}(q)] \tag{2.5}$$

при любом выборе диагональной матрицы $c_{m+1} \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$.

Доказательство. Положим $D_j := (r_j)_d$ и $N_j := (r_j)_{od}$ для $j = 1, \dots, m$. Условия (a) и (b) означают выполнение уравнений (2.4^j_d) для $j = 0, 1, \dots, m+1$ (случай $j = m+1$ отвечает условию (b)) и уравнений (2.4^j_{od}) для $j = 0, 1, \dots, m$. Повторяя индуктивное рассуждение из доказательства леммы 1, получаем, что $r_j = F_j^{(a,b,c_1,\dots,c_j)}(q)$, $j = 1, \dots, m$ для некоторых диагональных матриц $c_1, \dots, c_m$. При этом равенство (2.4^{m+1}_{od}) принимает вид $[a, N_{m+1}(q)] = (r_{mx} - [q, r_m])_{od}$, очевидно эквивалентный (2.5), т.к. $[a, D_{m+1}(q)] \equiv 0$ при любом выборе диагональной матрицы c_{m+1}, нужном для нахождения $D_{m+1}(\kappa)$. $\square$

Следствие. *Для того, чтобы полиномы* $U(x,t,z)$, $V(x,t,z)$ *вида* (2.1) *с диагональными матрицами* $a, b \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ (*причем* a *имеет простой спектр*) *и внедиагональной функцией* $q(x,t)$ *задавали голоморфное решение уравнения нулевой кривизны* (1.1) *в области* $\Omega \subset \mathbb{C}^2$, *необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий.*

(a) *Коэффициенты* $r_1, \dots, r_m : \Omega \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ *полинома* V *должны выражаться через внедиагональную функцию* $q : \Omega \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ *формулами*

$$r_1 = F_1(q), \quad \dots, \quad r_m = F_m(q)$$

для некоторых диагональных матриц $c_1(t), \dots, c_m(t) \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, *голоморфно зависящих от* t *в области, равной проекции* Ω *на координатную ось* $\mathbb{C}^1_t$.

(b) *Внедиагональная голоморфная функция* $q : \Omega \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ *должна удовлетворять на* Ω *уравнению*

$$q_t = [a, F_{m+1}(q)] \tag{2.6}$$

для того же выбора диагональных матриц $c_1(t), \dots, c_m(t)$, *что в пункте* (a) *и для произвольной диагональной матрицы* $c_{m+1} \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ (*от выбора которой правая часть* (2.6) *на самом деле не зависит*).

В дальнейшем нас будут интересовать не все решения U, V уравнений нулевой кривизны (1.1), имеющие вид (2.1), а только те, которые отвечают решениям уравнения (2.6) для некоторых *не зависящих от* t диагональных матриц $c_1, \dots, c_j$. Кроме того, в целях невырожденности мы будем требовать, чтобы не только матрица a, но и матрица b имела простой спектр[7]. Это отражено в следующем определении.

[7]Действительно, если взять, например, $b = c_1 = c_2 = \dots = 0$, то уравнение (2.6) принимает тривиальный вид $q_t = 0$ при любом $j \geqslant 2$. Заметим, однако, что построение решений

Определение. Пусть $m \geqslant 2$ — целое число и $a, b, c_1, \dots, c_m \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ — произвольные диагональные матрицы, причем a и b имеют простой спектр. По этому набору матриц однозначно определяется внедиагональная часть дифференциального полинома F_{m+1} из леммы 1, а значит, и правая часть уравнения (2.6). Будем в этом случае называть уравнение (2.6) *солитонным уравнением параболического типа*, заданным матрицами $a, b, c_1, \dots, c_m$.

Из леммы 3 и ее следствия вытекает эквивалентное описание обсуждаемого уравнения (2.6): это не что иное как уравнение нулевой кривизны $U_t - V_x + [U, V] = 0$ для полиномов U, V вида

$$U(x,t,z) = az + q(x,t), \qquad V(x,t,z) = \sum_{j=0}^{m} F_{m-j}(q)(x,t) z^j, \tag{2.7}$$

где F_0, F_1, …, F_m суть дифференциальные полиномы, заданные последовательностью матриц $a, b, c_1, \dots, c_m$ согласно лемме 1.

Класс солитонных уравнений параболического типа хорошо известен в литературе, особенно западной (см., например, [16], гл. 6 или [17], § 2), под несколькими названиями, включающими в себя (в разных сочетаниях) аббревиатуры ZS и AKNS в честь В. Е. Захарова, А. Б. Шабата [18] и М. Абловица, Д. Каупа, А. Ньюэлла, Х. Сигура [19], разработавших быстроубывающий вариант метода обратной задачи рассеяния для 2×2-случая. Л. А. Дикий ([15], п. 9.1.1) добавляет еще и букву D в честь Б. А. Дубровина [20], впервые рассмотревшего общий $n \times n$-случай в рамках конечнозонного варианта метода обратной задачи рассеяния. Заметим в связи с этим, что наложение граничных условий (быстроубывающих или квазипериодических) приводит к необходимости по-другому определять дифференциальные полиномы F_j и прочие важные объекты, так что становится нелегко говорить о совпадении формально похожих систем, изучаемых разными авторами.

Приведем примеры солитонных уравнений параболического типа, ограничиваясь пока случаем 2×2-матриц. (Ситуации, где нужны $n \times n$-матрицы для любого $n \geqslant 2$, встретятся нам в гл. III.) Всякая внедиагональная 2×2-матрица $q(x,t)$ определяется своими элементами $u(x,t) := q_{12}(x,t)$ и $v(x,t) := q_{21}(x,t)$. Из формул (2.4) вытекает, что в 2×2-случае дифференциальные полиномы

этого тривиального уравнения с помощью задачи Римана, осуществляемое в п. 2.2, дает нетривиальный и очень интересный для изучения класс мероморфных матричнозначных функций на $\mathbb{C}^1_x$. Это замечание относится и к обобщениям конструкции п. 2.2, изучаемым в гл. II, где нам впервые потребуется использовать простоту спектра матрицы b в доказательствах.

$M_j(q) := [a, F_{j+1}(q)]$, фигурирующие в правой части уравнений (2.6), зависят от выбора диагональных матриц $a, b, c_1, c_2, \dots$ следующим весьма простым образом:

$$M_j(q) = \beta\alpha^{-j} M_j^0(q) + \gamma_1\alpha^{1-j} M_{j-1}^0(q) + \dots + \gamma_j\alpha^0 M_0^0(q).$$

Здесь числа $\alpha := a_{11} - a_{22}$ и $\beta := b_{11} - b_{22}$ по условию не равны нулю, $\gamma_k := (c_k)_{11} - (c_k)_{22}$ для $k = 1, 2, \dots$, а коэффициенты $M_j^0(q)$ — это некоторые универсальные (т.е. не зависящие от $a, b, c_1, c_2, \dots$) дифференциальные полиномы. Выпишем первые три из них:

$$M_0^0(q) = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -v & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1^0(q) = \begin{pmatrix} 0 & u_x \\ v_x & 0 \end{pmatrix},$$
$$M_2^0(q) = \begin{pmatrix} 0 & u_{xx} - 2u^2v \\ -v_{xx} + 2uv^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В частности, уравнение (2.6) при $n = 2$ и $m = 2$ принимает вид системы

$$\begin{cases} u_t = A_0(u_{xx} - 2u^2v) + A_1u_x + A_2u, \\ v_t = -A_0(v_{xx} - 2uv^2) + A_1v_x - A_2v, \end{cases} \tag{2.8}$$

где $A_0 = \beta\alpha^{-2}$, $A_1 = \gamma_1\alpha^{-1}$, $A_2 = \gamma_2$.

Переход от (2.6) к уравнениям, представляющим непосредственный физический интерес, осуществляется наложением дополнительных ограничений алгебраического характера на компоненты u и v внедиагональной 2×2-матрицы q. Эти ограничения называются *редукциями* или *условиями вещественности*. Мы не будем приводить здесь общее определение и свойства редукций (которые можно найти в [1], [2], [17] и цитированной там литературе), а ограничимся перечисленными ниже примерами.

(A) *Верхнетреугольный 2×2-случай: линейные уравнения.* Допустим, что $v \equiv 0$, и фиксируем целое число $m \geqslant 2$. Тогда (2.6) становится линейным дифференциальным уравнением на u с постоянными коэффициентами:

$$u_t = A_0\partial_x^m u + A_1\partial_x^{m-1}u + \dots + A_m u, \tag{2.9}$$

где $A_0 = \beta\alpha^{-m}$ и $A_k = \gamma_k\alpha^{k-m}$ для $1 \leqslant k \leqslant m$. Ясно, что можно подобрать диагональные матрицы $a, b, c_1, \dots, c_m$ так, чтобы набор $A_0, A_1, \dots, A_m$ был любой наперед заданной последовательностью комплексных чисел.

(B) *Нелинейные уравнения Шредингера.* Пусть $a = b = \operatorname{diag}(-i/2, i/2)$, $c_1 = c_2 = 0$ и матрица q удовлетворяет условию $v(x,t) = -\overline{u(\overline{x}, \overline{t})}$ для всех $(x,t) \in \Omega$.

Тогда при вещественных x, t каждое из двух уравнений (2.8) превращается в фокусирующее нелинейное уравнение Шредингера

$$iu_t + u_{xx} + 2u|u|^2 = 0. \tag{2.10}$$

Заменяя условие $v(x,t) = -\overline{u(\overline{x},\overline{t})}$ на $v(x,t) = \overline{u(\overline{x},\overline{t})}$, получаем дефокусирующее нелинейное уравнение Шредингера $iu_t + u_{xx} - 2u|u|^2 = 0$. Если же положить $c_1 = 0$ и $c_2 = \rho^2 I$ для некоторого $\rho > 0$, то получим дефокусирующее нелинейное уравнение Шредингера с граничными условиями конечной плотности:

$$iu_t + u_{xx} + 2(\rho^2 - |u|^2)u = 0. \tag{2.11}$$

Уравнения (2.10) и (2.11) очень подробно изучены в [2]. Их физический смысл объясняется в [2], стр. 76 (см. также [1], гл. I, § 10).

(C) *Уравнения Кортевега–де Фриза.* Пусть $m = 3$, $a = b = \mathrm{diag}(1/2, -1/2)$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ и $v \equiv 1$. Тогда матричное уравнение (2.6) сводится к скалярному уравнению Кортевега–де Фриза

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x. \tag{2.12}$$

Заменяя условие $v \equiv 1$ на $v \equiv u$ и считая $c_1 = c_3 = 0$, получаем модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (с произвольной константой $C := (c_2)_{11} - (c_2)_{22} \in \mathbb{C}$, которая пригодится нам в доказательстве теоремы III.2)

$$u_t = u_{xxx} + (6u^2 + C)u_x. \tag{2.13}$$

2.2. Построение решений с помощью задачи Римана. Следующая теорема описывает частный случай конструкции § 1 (одевание тождественно нулевого решения уравнения (2.6) посредством функции, голоморфной в точке ∞), который впервые привлек внимание специалистов в связи с интерпретацией идей М. Сато (о представлении солитонных уравнений в виде динамических систем на бесконечномерных грассмановых многообразиях) в работе Г. Сигала и Дж. Вильсона [21]. Случай $c_1 = c_2 = \ldots = 0$ этой теоремы рассматривался также в [22], предложение 2.7, [23], теорема 3.2.6 и [17], предложение 2.9.

Для формулировки теоремы введем в рассмотрение множество $\mathcal{D}$ всех голоморфных $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-значных функций f на $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > R_0\} \cup \{\infty\}$ (R_0 свое для каждой f) с $f(\infty) = I$. Иными словами, $\mathcal{D}$ состоит из ростков голоморфных $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-значных функций f в точке ∞ с $f(\infty) = I$.

Теорема 1. *Пусть $a, b, c_1, c_2, \ldots \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ — диагональные матрицы, причем матрица a имеет простой спектр. Фиксируем целое число $m \geqslant 2$ и точку $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$. Для каждой функции $f \in \mathcal{D}$ обозначим через $\Omega(f)$ множество всех $(x, t) \in \mathbb{C}^2$ таких, что функция*

$$\gamma(x, t, z) := \exp\{az(x - x_0) + (bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m)(t - t_0)\} f^{-1}(z)$$

правофакторизуема на некоторой (и тогда на любой) окружности $\{|z|{=}R\}$, $R_0 < R < +\infty$. Тогда множество $\Omega(f) \subset \mathbb{C}^2$ содержит некоторую окрестность точки (x_0, t_0). Далее, для каждой точки $(x, t) \in \Omega(f)$ обозначим через $(\gamma_+(x, t, z), \gamma_-(x, t, z))$ решение соответствующей задачи Римана[8]

$$\gamma(x, t, z) = \gamma_-^{-1}(x, t, z)\gamma_+(x, t, z) \quad \text{при} \quad R_0 < |z| < +\infty, \tag{2.14}$$

нормированное условием $\gamma_-(x, t, \infty) = I$, и положим

$$q(x, t) := \lim_{z \to \infty} z[\gamma_-(x, t, z) - I, a]. \tag{2.15}$$

Тогда функция $q : \Omega(f) \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ внедиагональна, голоморфна в некоторой окрестности точки (x_0, t_0) и удовлетворяет там дифференциальному уравнению

$$q_t = [a, F_{m+1}(q)], \tag{2.6}$$

где $F_j : \mathcal{R}(x_0) \to \mathcal{R}(x_0)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ есть последовательность дифференциальных полиномов (по x), заданная матрицами $a, b, c_1, \ldots$ согласно лемме 1.

В дальнейшем функция $q(x, t)$, сопоставляемая произвольному ростку $f \in \mathcal{D}$ по формуле (2.15), обозначается также через $q_f(x, t)$. Конечно, из упомянутой в § 1 теоремы Мальгранжа ([9], § 4; [10], приложение 3, теорема 2) немедленно вытекает, что область определения $\Omega(f)$ построенного здесь решения $q_f(x, t)$ уравнения (2.6) есть либо все $\mathbb{C}^2$, либо дополнение в $\mathbb{C}^2$ к множеству нулей

[8] Области $D_+ = \{|z| < R\}$ и $D_- = \{|z| > R\} \cup \{\infty\}$ исчезли из формулировки задачи Римана (2.14) по следующей причине. Если какая-нибудь $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-значная функция $\gamma \in \mathcal{O}(|z| > R_0)$ представима на окружности $\{|z| = R\}$ при некотором $R > R_0$ в виде $\gamma(z) = \gamma_-^{-1}(z)\gamma_+(z)$ для некоторых непрерывных $\gamma_\pm : \overline{D}_\pm \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, голоморфных на $D_\pm$, то функция $\gamma_+(z)$ голоморфно продолжается с круга $\overline{D}_+ = \{|z| \leqslant R\}$ на всю плоскость $\mathbb{C}$, если положить ее равной $\gamma_-(z)\gamma(z)$ при $R \leqslant |z| < +\infty$. После такого продолжения равенство $\gamma(z) = \gamma_-^{-1}(z)\gamma_+(z)$ выполняется уже для $|z| > R_0$, а не только при $|z| = R$. Поэтому, независимо от R, мы можем рассматривать $\gamma_+(x, t, \cdot)$ как голоморфное отображение $\mathbb{C} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, а $\gamma_-(x, t, \cdot)$ — как элемент $\mathcal{D}$, что и отражено в обозначениях (2.14).

некоторой целой фукции $\tau \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$, $\tau \not\equiv 0$, причем функция $q_f(x,t)$ глобально мероморфна на $\mathbb{C}^2$ со знаменателем $\tau(x,t)$. Но мы сейчас не будем акцентировать на этом свое внимание, а докажем теорему 1 в том виде, как она сформулирована. Именно это доказательство удобно переносится на более общий случай, рассматриваемый в гл. II. Оно формально не зависит от рассмотрений § 1, но по существу является их повторением с надлежащими модификациями.

Доказательство теоремы 1. 1) Покажем, что (x_0,t_0) — внутренняя точка множества $\Omega(f)$, а функции $\gamma_\pm$ голоморфны в этой точке. Действительно, изучаемая нами задача Римана $\gamma = \gamma_-^{-1}\gamma_+$ (см. (2.14)) равносильна (при любом $R \geqslant R_0$) линейному уравнению $A\xi = \eta$ на банаховом пространстве E всех $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значных функций, голоморфных при $|z| > R$, непрерывных при $|z| \geqslant R$ и равных нулю в точке $z = \infty$. (Здесь $\eta := -P\gamma$ и $A\xi := P(\xi\gamma)$, где P есть оператор взятия отрицательной части ряда Лорана. Решения $\gamma_\pm$ восстанавливаются по формулам $\gamma_- = I + \xi$, $\gamma_+ = (I+\xi)\gamma$.) Оператор A и вектор η голоморфно зависят от $(x,t) \in \mathbb{C}^2$, причем A является тождественным оператором при $(x,t) = (x_0,t_0)$. Следовательно, он обратим в некоторой окрестности точки (x_0,t_0) и решение ξ (и значит $\gamma_\pm$) голоморфно зависит от x,t в этой окрестности.

2) Покажем, что функция $\gamma_{+x}\gamma_+^{-1} - az$ не зависит от z и совпадает с $q(x,t)$, так что для всех (x,t) в окрестности (x_0,t_0) и всех $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\gamma_{+x} = U(x,t,z)\gamma_+, \quad \text{где} \quad U(x,t,z) := az + q(x,t). \tag{2.16}$$

(Следующее рассуждение присутствует во всех версиях метода обратной задачи рассеяния, начиная с [4]. Впервые оно применялось, по-видимому, Биркгофом [24] для приведения системы дифференциальных уравнений к простому виду заменой неизвестных функций.) Согласно пункту 1), уравнение $\gamma_+(x,t,z) = \gamma_-(x,t,z)E_0(x,t,z)f^{-1}(z)$ (где $E_0(x,t,z) := \exp\{az(x-x_0) + (bz^j + c_1z^{j-1} + \ldots + c_j)(t-t_0)\}$) можно дифференцировать по x и t любое число раз всюду в окрестности точки (x_0,t_0). Поэтому

$$\begin{aligned}\gamma_{+x}\gamma_+^{-1} &= (\gamma_-E_0f^{-1})_x(\gamma_-E_0f^{-1})^{-1} = (\text{поскольку } f \text{ не зависит от } x)\\ &= (\gamma_-E_0)_x(\gamma_-E_0)^{-1} = (\gamma_{-x} + \gamma_-az)E_0(\gamma_-E_0)^{-1} = \gamma_{-x}\gamma_-^{-1} + z\cdot\gamma_-a\gamma_-^{-1}.\end{aligned}$$

Разлагая крайние части этого равенства в ряды Лорана по z, мы видим, что левая часть содержит только неотрицательные степени z, тогда как в

правой части все степени не превосходят 1. Поэтому обе части суть полиномы степени $\leqslant 1$ от z. Точнее, имеем $\gamma_{+x}\gamma_+^{-1} = \{z\gamma_- a\gamma_-^{-1}\}_+$, где символ $\{\cdot\}_+$ означает взятие "неотрицательной части" ряда Лорана: если $X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n z^n$, то $X_+ = \sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n$. Прямое вычисление показывает, что $\{z\gamma_-(x,t,z)a\gamma_-^{-1}(x,t,z)\}_+ = az + q(x,t)$, где $q(x,t)$ задается формулой (2.15). Отсюда и получаем (2.16).

3) Повторяя рассуждение 2) с заменой x на t, получаем, что

$$\gamma_{+t}\gamma_+^{-1} = \{z^m F(x,t,z)\}_+, \tag{2.17}$$

где $F(x,t,z) := \gamma_-(x,t,z)(b + c_1 z^{-1} + \ldots + c_m z^{-m})\gamma_-(x,t,z)^{-1}$. Утверждается, что при каждом фиксированном t функция $F(x,t,z)$ удовлетворяет в окрестности точки x_0 резольвентному уравнению $F_x = [U,F]$, в котором $U(x,t,z) = az + q(x,t)$ как в пункте 2). На самом деле (как мы уже видели при доказательстве формулы (1.6)) это утверждение выполняется для любой функции $F(x,t,z)$ вида $F(x,t,z) = \gamma_-(x,t,z)\Phi(t,z)\gamma_-^{-1}(x,t,z)$, где $\Phi(t,z)$ диагональна и не зависит от x. Действительно, дифференцируя уравнение $F\gamma_- = \gamma_-\Phi$ по x и умножая справа на γ_-^{-1}, получаем, что $F_x + F\gamma_{-x}\gamma_-^{-1} = \gamma_{-x}\Phi\gamma_-^{-1}$, т.е. $F_x = [\gamma_{-x}\gamma_-^{-1}, F]$. В последнем равенстве можно заменить $\gamma_{-x}\gamma_-^{-1}$ на U, т.к. $U - \gamma_{-x}\gamma_-^{-1} = \gamma_- az\gamma_-^{-1}$ коммутирует с $F = \gamma_-\Phi\gamma_-^{-1}$ (матрицы az и Φ диагональны). Этим доказано равенство $F_x = [U,F]$.

Тем самым, коэффициенты $\varphi_l(x,t)$ разложения $F(x,t,z) = \sum_{l=0}^{\infty}\varphi_l(x,t)z^{-l}$ удовлетворяют условиям леммы 2. (Заметим, что еще одним условием этой леммы является внедиагональность $q(x,t)$, но она сразу вытекает из определения (2.15), потому что коммутатор любой $n\times n$-матрицы с a внедиагонален.) По этой лемме получаем, что

$$F(x,t,z) = \sum_{l=0}^{\infty} F_l^{(a,b,c_1'(t),\ldots,c_l'(t))}(q)(x,t)z^{-l} \tag{2.18}$$

для некоторой последовательности $c_1'(t), c_2'(t), \ldots$ диагональных матриц, зависящих только от t. Приравнивая друг другу два выражения для $\operatorname{tr} F(x,t,z)^k$ (одно — из леммы 2, другое — из определения сразу после формулы (2.17)), имеем тождественно по z в окрестности ∞ равенства

$$\operatorname{tr}(b + c_1'(t)z^{-1} + c_2'(t)z^{-2} + \ldots)^k \equiv \operatorname{tr}(b + c_1 z^{-1} + \ldots + c_j z^{-j})^k \quad \text{при } k = 1,2,\ldots .$$

Так как все матрицы в этих равенствах диагональны, заключаем, что $c_l'(t) \equiv c_l$ при $l = 1,\ldots,m$. Следовательно, дифференциальные полиномы, являющиеся коэффициентами в (2.18), совпадают с дифференциальными полиномами

F_l, заданными матрицами $a, b, c_1, \dots$ согласно лемме 1. Пользуясь (2.17) и (2.18), получаем

$$\gamma_{+t} = V(x,t,z)\gamma_+, \quad \text{где} \quad V(x,t,z) := \sum_{j=0}^{m} F_{m-j}(q)(x,t)z^j. \tag{2.19}$$

4) Дифференцируя равенство (2.19) по x, а (2.16) по t, приравнивая результаты и сокращая на обратимую матрицу γ_+, получим равенство (1.1) для функций U, V, заданных формулами (2.16), (2.19) (или, что то же самое, формулами (2.7)), в которых F_l суть дифференциальные полиномы, заданные предписанными матрицами $a, b, c_1, \dots, c_m$. По лемме 3 (или ее следствию) это равенство (1.1) влечет выполнение требуемого уравнения (2.6) для функции $q(x,t)$. $\square$

Замечание 3. Специфику задачи Римана (2.14) можно подчеркнуть, введя следующую терминологию. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество всех голоморфных отображений $E : \mathbb{C} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ и назовем пару $(E, f) \in \mathcal{E} \times \mathcal{D}$ *факторизуемой*, если существует пара $(E_1, f_1) \in \mathcal{E} \times \mathcal{D}$ такая, что $E(z)f^{-1}(z) = f_1^{-1}(z)E_1(z)$ при $|z| > R$ (т.е. в некоторой проколотой окрестности точки $z = \infty$). Таким образом, речь в (2.14) идет о записи данного произведения элементов из $\mathcal{E}$ и $\mathcal{D}$ в виде "произведения таких же множителей, но в обратном порядке". Именно в такой формулировке задача Римана будет изучаться в гл. II.

Замечание 4. Несмотря на свойство глобальной мероморфности и, казалось бы, очень специальный выбор контура одевания и класса одевающих функций, класс решений $q_f(x,t)$, построенных в теореме 1, оказывается довольно широким. А именно, он содержит все *конечнозонные* решения и многие *быстроубывающие*, причем как для тех, так и для других конструкция из теоремы 1 совпадает с соответствующим вариантом метода обратной задачи рассеяния, если рассматривать росток $f \in \mathcal{D}$ как *данные рассеяния* матричнозначного потенциала $q_f(x,t_0) \in \mathcal{R}(x_0)$. Эти утверждения будут подробно обоснованы в §§ 4,5, а пока мы установим, что наши "данные рассеяния" определяются своими "потенциалами" не однозначно, но с точностью до умножения справа на любой диагональный росток из $\mathcal{D}$.

Лемма 4. *Функции $f, g \in \mathcal{D}$ задают одно и то же решение $q_f(x,t) = q_g(x,t)$ уравнения (2.6) в окрестности точки $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$ тогда и только тогда, когда функция $f^{-1}g \in \mathcal{D}$ диагональна. То же самое условие необходимо и достаточно для выполнения равенства $q_f(x,t_0) = q_g(x,t_0)$ в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Пусть функция $r(z) = f^{-1}(z)g(z)$ диагональна. Обозначим через $\gamma_\pm^f(x,t,z)$ и $\gamma_\pm^g(x,t,z)$ решения задач Римана (2.14), соответствующих функциям f и g. Тогда из единственности решения задачи Римана следует, что $\gamma_-^g = \gamma_-^f r$ и $\gamma_+^g = \gamma_+^f$. Теперь равенство $q_f(x,t) = q_g(x,t)$ в окрестности точки (x_0,t_0) вытекает из формулы $q = \gamma_{+x}\gamma_+^{-1} - az$ (см. (2.16)).

Обратно, пусть $f, g \in \mathcal{D}$ таковы, что $q_f(x,t_0) = q_g(x,t_0)$ в окрестности точки x_0. Из (2.14) имеем $\gamma_+(x_0,t_0,z) = I$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Поэтому из (2.16) по теореме единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений вытекает, что $\gamma_+^f(x,t_0,z) = \gamma_+^g(x,t_0,z)$ для всех x в окрестности x_0 и всех $z \in \mathbb{C}$. При $|z| > R_0$, пользуясь (2.14), перепишем это равенство в виде

$$\exp\{az(x-x_0)\}f^{-1}(z)g(z)\exp\{-az(x-x_0)\} = (\gamma_-^f)^{-1}(x,t_0,z)\gamma_-^g(x,t_0,z).$$

Если $\varphi(z) := f^{-1}(z)g(z)$, то матричные элементы $\varphi_{kl}(z)\exp\{(a_{kk}-a_{ll})z(x-x_0)\}$ левой части последнего равенства оказываются голоморфными в точке $z=\infty$ при любом фиксированном x в окрестности x_0. Поскольку $a_{kk} \neq a_{ll}$ при $k \neq l$ (здесь используется простота спектра матрицы a), получаем отсюда, что $\varphi_{kl}(z) \equiv 0$ при $k \neq l$, т.е. функция $f^{-1}g$ диагональна. $\square$

В оставшейся части § 2 приведены три примера ситуаций, когда задача Римана (2.14) решается в явном виде. Первый из этих примеров (п. 2.3) мотивирует наш подход и обозначения в гл. II и является основой доказательства леммы III.2, второй (п. 2.4) иллюстрирует конечнозонный случай, обсуждаемый в § 5, а третий (п. 2.5) существенно используется в п. 3.2.

2.3. Верхнетреугольные 2×2-потенциалы и преобразование Лапласа. Метод обратной задачи рассеяния для быстроубывающих потенциалов часто рассматривают как нелинейный аналог преобразования Фурье (это отражено в самом названии работы [19]; см. также [2], часть I, гл. 2, § 3 для уравнения (2.10)). В нашем же голоморфном контексте оказывается, что для верхнетреугольных 2×2-потенциалов (пример (А) п. 2.1) прямое преобразование рассеяния $q_f \mapsto f$ превращается в преобразование Лапласа (отличающееся от преобразования Фурье лишь заменой переменных), а теорема 1 сводится к способу построения некоторого класса целых решений любого линейного уравнения вида (2.9). Это в точности те решения, которые получаются, если решать задачу Коши для (2.9) с помощью преобразования Лапласа по x в предположении, что преобразование Лапласа начального условия оказалось голоморфным в окрестности бесконечности (т.е. само начальное условие есть целая функция экспоненциального типа). Вот некоторые подробности.

Лемма 5. *Любая пара* $(E, f) \in \mathcal{E} \times \mathcal{D}$, *состоящая из верхнетреугольных* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$*-значных матричных функций, факторизуема* (*в смысле замечания* 3), *причем решение* $(E_1, f_1) \in \mathcal{E} \times \mathcal{D}$ *также верхнетреугольно.*

Доказательство. Нам даны функции $A, B, C \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, причем A, B не обращаются в нуль на $\mathbb{C}$, и ростки $\mu, \nu, \varphi \in \mathcal{O}(\infty)$ с $\mu(\infty) = \nu(\infty) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$. Требуется найти функции $A_1, B_1, C_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и ростки $\mu_1, \nu_1, \varphi_1 \in \mathcal{O}(\infty)$ с теми же свойствами так, чтобы при $|z| > R_0$ выполнялось матричное равенство

$$\begin{pmatrix} A(z) & C(z) \\ 0 & B(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu(z) & \varphi(z) \\ 0 & \nu(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1(z) & \varphi_1(z) \\ 0 & \nu_1(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(z) & C_1(z) \\ 0 & B_1(z) \end{pmatrix}.$$

Оно эквивалентно системе $A\mu = \mu_1 A_1$, $B\nu = \nu_1 B_1$, $A\varphi + C\nu = \mu_1 C_1 + \varphi_1 B_1$, из первых двух уравнений которой по теореме Лиувилля вытекает, что $A_1 = A$, $\mu_1 = \mu$ и $B_1 = B$, $\nu_1 = \nu$. Теперь третье уравнение принимает вид $A\varphi + C\nu = \mu C_1 + \varphi_1 B$, и после деления на μ слева и на B справа получаем единственное решение: $C_1 = \{\mu^{-1}(A\varphi + C\nu)B^{-1}\}_+ B$ и $\varphi_1 = \mu\{\mu^{-1}(A\varphi + C\nu)B^{-1}\}_-$, где символы $\{\cdot\}_\pm$ означают взятие положительной и отрицательной части ряда Лорана на кольце $|z| > R_0$. $\square$

Пусть функция $u : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ локально интегрируема и существуют константы $A, B \in \mathbb{R}$ такие, что $|u(x)| \leqslant Ae^{Bx}$ для всех $x \geqslant 0$. *Преобразование Лапласа* функции u определяется формулой

$$Lu(z) := \int_0^\infty e^{-zx} u(x)\,dx. \tag{2.20}$$

Функция $Lu(z)$ голоморфна в полуплоскости $\{\operatorname{Re} z > B\}$ и стремится к 0 при $\operatorname{Re} z \to +\infty$. Преобразование Лапласа инъективно: если $Lu_1 = Lu_2$, то $u_1 = u_2$. Явное вычисление показывает, что функция $Lu(z)$ рациональна (и равна нулю при $z = \infty$) тогда и только тогда, когда $u(x)$ есть экспоненциальный полином, т.е. конечная линейная комбинация выражений вида $x^k e^{cx}$ с целыми $k \geqslant 0$ и комплексными c. Можно слегка обобщить это наблюдение, заметив, что функция $Lu(z)$ голоморфна в окрестности ∞ (и равна нулю при $z = \infty$) тогда и только тогда, когда u есть целая функция экспоненциального типа, т.е. $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^1)$ и существуют $A, B > 0$ такие, что $|u(x)| \leqslant Ae^{B|x|}$ для всех $x \in \mathbb{C}$. В этом случае обратное преобразование $u = B\varphi$ называется *преобразованием Бореля* и задается формулой

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j}{z^j} \quad \Longrightarrow \quad B\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{k+1} \frac{x^k}{k!} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{C}. \tag{2.21}$$

Хорошо известна важная роль преобразований Лапласа и Бореля в теории целых функций ([25], гл. 2, § 1) и теории суммирования расходящихся рядов, особенно в применении к формальным решениям дифференциальных уравнений (см., например, [26], [27]). Покажем, что эти преобразования естественно возникают при решении задачи Римана (2.14) для верхнетреугольных 2×2-матриц f. Будем для удобства считать, что исходная точка x_0 совпадает с началом координат: $x_0 = 0$ (иначе заменим x на $x - x_0$).

Лемма 6. *Фиксируем диагональную матрицу $a = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22})$ с $\alpha := a_{11} - a_{22} \neq 0$ и положим $E_0(x, z) := \exp(azx)$. Для произвольной функции $f \in \mathcal{D}$ рассмотрим решение $q_f : \Omega(f) \to \mathrm{gl}(2, \mathbb{C})$ уравнения (2.6) с $b = c_1 = c_2 = \ldots = 0$ как функцию только от x. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(A) *Функция f верхнетреугольна при $|z| > R_0$ тогда и только тогда, когда росток $q_f(x)$ верхнетреуголен в окрестности точки $x_0 = 0$.*

(B) *Если росток $q \in \mathcal{R}(x_0)$ верхнетреуголен и $q = q_f$ для некоторой $f \in \mathcal{D}$, то существует единственная верхнетреугольная функция $f \in \mathcal{D}$ такая, что $q = q_f$ и $f_{11} = f_{22} \equiv 1$. Определим $\mathbb{C}$-значные функции $\varphi(z)$ и $u(x)$ равенствами*

$$f(z) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad q(x) = q_f(x) = \begin{pmatrix} 0 & u(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Тогда взаимно-однозначному соответствию $f \leftrightarrow q$ отвечает следующее соответствие между $\varphi(z)$ и $u(x)$:

$$\text{если} \quad \varphi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j}{z^j}, \quad \text{то} \quad u(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k+1} x^k \varphi_{k+1}}{k!}. \tag{2.23}$$

Таким образом, $u(x) = -\alpha B\varphi(\alpha x)$, где $B\varphi$ есть преобразование Бореля (2.21) функции φ. В частности, $u(x)$ является целой функцией экспоненциального типа. Обратно, любое внедиагональное верхнетреугольное отображение $q : \mathbb{C}^1_x \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, единственная ненулевая компонента которого $q_{12}(x)$ есть целая функция экспоненциального типа, имеет вид $q = q_f$ для некоторой функции $f \in \mathcal{D}$.

Доказательство. (A) Пусть $f \in \mathcal{D}$ верхнетреугольна при $|z| > R_0$. Умножая f справа на $\operatorname{diag}(f_{11}^{-1}, f_{22}^{-1})$ и пользуясь леммой 4, мы можем считать, не теряя общности, что $f_{11} = f_{22} \equiv 1$, т.е. f имеет вид (2.22). Задача Римана (2.14) имеет вид $E_0 f^{-1} = \gamma_-^{-1}\gamma_+$ и решается по формулам из доказательства

леммы 5:

$$\gamma_-(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & \{\varphi(z)e^{\alpha z x}\}_- \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда можно явно найти $q_f(x)$ по формуле (2.15). А именно, матрицы $Q(x) := \lim_{z\to\infty} z\{\gamma_-(x,z) - I\}$ и $q_f(x) = [Q(x), a]$ внедиагональны и верхетреугольны, единственная ненулевая компонента $u(x) := q_{12}(x)$ матрицы $q_f(x)$ задается формулой (2.23), а соответствующая компонента матрицы $Q(x)$ равна $-\alpha^{-1}u(x)$.

Обратно, пусть росток $q_f(x)$ верхнетреуголен в окрестности точки $x_0 = 0$. Пользуясь дифференциальным уравнением $\gamma_{+x} = (az + q(x))\gamma_+$ (см. (2.16)) и условием $\gamma_+(0,z) = I$, можно явно найти первый столбец матрицы γ_+:

$$(\gamma_+)_{11}(x,z) = \exp(a_{11}zx)\ , \quad (\gamma_+)_{21}(x,z) \equiv 0\,.$$

В частности, первые столбцы матриц γ_-^{-1} и $\gamma_-^{-1}\gamma_+$ пропорциональны, т.е. первые столбцы матриц γ_-^{-1} и $E_0 f^{-1}$ пропорциональны при $|z| > R_0$. Обозначая первые столбцы матриц γ_-^{-1} и f^{-1} через $(\mu_1,\mu_2)^t$ и $(\varphi_1,\varphi_2)^t$, имеем тем самым

$$(E_0)_{11}(E_0)_{22}^{-1}\varphi_1\mu_2 = \varphi_2\mu_1 \quad \text{при} \quad |z| > R_0.$$

Если функции $\varphi_1\mu_2$ и $\varphi_2\mu_1$ не равны тождественно нулю, то это уравнение позволяет мероморфно продолжить функцию $(E_0)_{11}(E_0)_{22}^{-1}(z) = \exp(\alpha z x)$ в точку $z = \infty$, что невозможно при $\alpha \neq 0$ и $x \neq 0$. Следовательно, $\varphi_1\mu_2 = \varphi_2\mu_1 \equiv 0$. Поскольку $\varphi_1(\infty) = \mu_1(\infty) = 1$ по определению $\mathcal{D}$, заключаем, что $\varphi_2 = \mu_2 \equiv 0$, что и требовалось.

(B) Формула (2.23) в обозначениях (2.22) уже выведена при доказательстве пункта (A). Остальные утверждения вытекают из классического результата о том, что преобразование Бореля (2.21) биективно отображает множество всех функций $\varphi(z)$, голоморфных в точке ∞ и удовлетворяющих $\varphi(\infty) = 0$, на множество всех целых функций $u(x)$ экспоненциального типа (см. [25]). $\square$

2.4. Постоянные потенциалы. В ситуации п. 2.3 отображения $f \mapsto q_f$ и $q_f \mapsto f$ оказались (после естественной нормировки) линейными. Конечно, такие случаи исключительны, что видно уже из следующего примера: данные рассеяния постоянного потенциала задаются довольно сложной алгебраической функцией от z, зависящей весьма нелинейно от породившего ее потенциала.

Лемма 7. *Пусть $a \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ — любая диагональная матрица с простым спектром, а $C \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ — любая внедиагональная матрица. Тогда существует функция $f \in \mathcal{D}$ такая, что $q_f(x,t_0) = C$ для всех $x \in \mathbb{C}^1$. (Выбор матриц $b, c_1, \dots$ безразличен, поскольку нас интересует только $t = t_0$).*

Доказательство. Матрица $a + Cz^{-1}$ голоморфно зависит от z и равняется a при $z = \infty$. Поэтому (см., например, [28], гл. II, § 1, п. 8) для всех z в некоторой окрестности ∞ ее собственные значения различны, а соответствующие им собственные подпространства голоморфно зависят от z. Иными словами, найдется функция $f \in \mathcal{D}$ такая, что функция

$$r(z) := f^{-1}(z)(a + Cz^{-1})f(z)$$

диагональна и голоморфна в окрестности ∞. Заметим, что столбцы матрицы $f(z)$ образуют базис из собственных векторов матрицы $a + Cz^{-1}$, который однозначно определяется условием голоморфности f и нормировкой $f(\infty) = I$. Подставляя лорановские разложения

$$f(z) = I + f_1 z^{-1} + \dots \quad \text{и} \quad r(z) = r_0 + r_{-1}z^{-1} + \dots$$

в определение $r(z)$, получаем, что $r_0 = a$ и $r_{-1} = C + [a, f_{-1}]$. Но в последнем равенстве левая часть диагональна, а правая внедиагональна, поэтому $r_{-1} = 0$. Следовательно, диагональная функция $az - zr(z)$ равна нулю при $z = \infty$. Это означает, что функция $z \mapsto e^{(az - zr(z))x}$ принадлежит $\mathcal{D}$ при каждом $x \in \mathbb{C}$. Поскольку матрицы azx и $zr(z)x$ диагональны, имеем

$$e^{azx} f^{-1}(z) = e^{(az - zr(z))x} f^{-1}(z) \cdot f(z) e^{zr(z)x} f^{-1}(z)$$

для всех $x \in \mathbb{C}$ и $|z| > R$. Первый сомножитель справа принадлежит пространству $\mathcal{D}$, а второй равен $e^{(az+C)x}$. Тем самым, интересующая нас задача Римана (2.14) с $x_0 = 0$ и $t = t_0$ решена при всех $x \in \mathbb{C}$, причем в ее решении имеем $\gamma_+(x, t_0, z) = e^{(az+C)x}$. Из последней формулы и (2.16) находим $q_f(x, t_0) \equiv C$, что и требовалось. □

2.5. Множители Бляшке и добавление солитона. Для любых комплексных чисел α, β и любого проектора $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (т.е. линейного оператора с $P^2 = P$) положим

$$B_{\alpha\beta P}(z) := I + \frac{\beta - \alpha}{z - \beta} P = \mu P + (I - P), \quad \text{где} \quad \mu := \mu(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta}. \tag{2.24}$$

Для каждой пары A, B векторных подпространств в $\mathbb{C}^n$ с $A \oplus B = \mathbb{C}^n$ существует единственный проектор P, для которого $A = \operatorname{im} P$ и $B = \ker P$. Он называется проектором на A вдоль B. Если рассматривать A и B как две "координатные оси" в $\mathbb{C}^n$, то матрица $B_{\alpha\beta P}(z)$ при каждом фиксированном z умножает все векторы первой оси на $\mu(z)$ и оставляет все векторы второй оси на месте. Функции $B_{\alpha\beta P}(z)$ называются *множителями Бляшке* (или, как в [2], часть I, гл. 2, § 2, *множителями Бляшке–Потапова* в честь работы В. П. Потапова [29], где они и были введены для того, чтобы обобщить на матричный случай теорему о разложении ограниченной голоморфной функции на внутренний и внешний множители и произведение Бляшке).

Лемма 8. *Пусть $E \in \mathcal{E}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ есть проектор на подпространство $A \subset \mathbb{C}^n$ вдоль подпространства $B \subset \mathbb{C}^n$. Тогда для факторизуемости пары $(E, B_{\alpha\beta P}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{D}$ необходимо и достаточно, чтобы подпространства $E(\alpha)A$ и $E(\beta)B$ были трансверсальны:*

$$E(\alpha)A \cap E(\beta)B = \{0\}. \tag{2.25}$$

Если это условие выполнено, то решение (E_1, f_1) задачи Римана $EB^{-1}_{\alpha\beta P} = f_1^{-1}E_1$ задается формулой

$$f_1(z) = B_{\alpha\beta Q}(z), \tag{2.26}$$

где Q есть проектор на $E(\alpha)A$ вдоль $E(\beta)B$.

Доказательство. *Необходимость.* Из формулы $f_1 = E_1 B_{\alpha\beta P} E^{-1}$ следует, что $(z-\beta)f_1(z)$ есть целая $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значная функция. Поскольку $f_1(\infty) = I$, целая функция $(z - \beta)(f_1(z) - I)$ ограничена на бесконечности, т.е. постоянна. Поэтому $f_1(z) = I + C_1(z - \beta)^{-1}$ для некоторой постоянной матрицы C_1. То же рассуждение с заменой $(z - \beta)f_1(z)$ на $(z - \alpha)f_1^{-1}(z)$ дает, что $f_1^{-1}(z) = I + C_2(z - \alpha)^{-1}$ для некоторой постоянной матрицы C_2. Далее, уравнение $I = (I + C_1(z - \beta)^{-1})(I + C_2(z - \alpha)^{-1})$ выполняется для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha, \beta\}$ тогда и только тогда, когда $C_1 + C_2 = 0$ и $C_1C_2 - \alpha C_1 - \beta C_2 = 0$. Подставляя $C_2 = -C_1$ во второе уравнение этой системы, получим равенство $C_1^2 = (\beta - \alpha)C_1$, означающее, что $C_1 = (\beta - \alpha)Q$ для некоторого проектора Q. Таким образом, f_1 имеет вид (2.26) для некоторого проектора Q.

По условию, функция $E_1 = B_{\alpha\beta Q} E B^{-1}_{\alpha\beta P}$ имеет устранимые особенности при $z = \alpha$ и $z = \beta$. Положим $F(\mu) := E(z)$ и $F_1(\mu) := E_1(z)$, где связь между μ и z задается формулой (2.24). Тогда функция

$$F_1(\mu) = (\mu Q + I - Q)F(\mu)(\mu^{-1}P + I - P) \tag{2.27}$$

должна иметь устранимые особенности при $\mu = 0$ и $\mu = \infty$. Первый и второй множители справа голоморфны при $\mu = 0$ и равны в этой точке $I - Q$ и $E(\alpha)$ соответственно. Поэтому особенность функции $F_1(\mu)$ при $\mu = 0$ устранима тогда и только тогда, когда

$$(I - Q)E(\alpha)P = 0 \quad \text{или, эквивалентно,} \quad E(\alpha)\operatorname{im} P \subset \operatorname{im} Q,$$

а особенность $F_1(\mu)$ при $\mu = \infty$ устранима тогда и только тогда, когда

$$QE(\beta)(I - P) = 0 \quad \text{или, эквивалентно,} \quad E(\beta)\ker P \subset \ker Q.$$

По соображениям размерности оба включения должны быть равенствами. Полученные равенства $E(\alpha)A = \operatorname{im} Q$ и $E(\beta)B = \ker Q$ означают, что выполняется условие (2.25) и Q есть проектор на $E(\alpha)A$ вдоль $E(\beta)B$.

Достаточность. Определив $f_1(z)$ формулой (2.26) и повторив предыдущие рассуждения в обратном порядке, мы видим, что $E_1(z) := f_1(z)E(z)B^{-1}_{\alpha\beta P}(z)$ продолжается в точки $z = \alpha$ и $z = \beta$ как $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значная голоморфная функция и остается лишь проверить, что ее значения в этих точках — обратимые матрицы. Для этого перейдем к определителям в (2.27). Получим, что

$$\det F_1(\mu) = \mu^k \det F(\mu)\mu^{-l},$$

где числа $k := \dim \operatorname{im} Q$ и $l := \dim \operatorname{im} P$ на самом деле совпадают по определению Q. При $\mu = 0$ и $\mu = \infty$ полученное равенство $\det F_1(\mu) = \det F(\mu)$ дает, что матрицы $E_1(\alpha) = F_1(0)$ и $E_1(\beta) = F_1(\infty)$ обратимы. $\square$

В качестве приложения леммы 8 выведем формулу добавления солитона. Пусть $q_f(x,t)$ есть решение уравнения (2.6), построенное по функции $f \in \mathcal{D}$ с помощью теоремы 1. Для произвольных $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и любых трансверсальных подпространств $A, B \subset \mathbb{C}^n$ положим $h := B_{\alpha\beta P} f$, где P есть проектор на A вдоль B. По определению скажем, что решение $q_h(x,t)$ уравнения (2.6) получается из решения $q_f(x,t)$ *добавлением солитона*[9]. Утверждается, что

$$q_h(x,t) = q_f(x,t) + (\beta - \alpha)[P_f(x,t), a], \tag{2.28}$$

[9] В некотором обобщенном смысле, т.к., например, при $\alpha = \beta$ всегда имеем $q_h = q_f$. Однако все "настоящие" односолитонные решения уравнений, рассмотренных в примерах (B) и (C) п. 2.1 действительно получаются описанной конструкцией из нулевого решения (а N-солитонные — из $(N-1)$-солитонных) при надлежащих ограничениях на α, β, P, подробно описанных для уравнений примера (B) в [2], часть I, гл. 2, §§ 5, 8, а для уравнений примера (C) — в [17], §§ 12, 13. В примере (A) п. 2.1 добавление солитона всегда тривиально, т.к. в 2×2-случае множитель Бляшке может быть верхнетреугольным только если он диагонален.

где $P_f(x,t)$ есть проектор на $\gamma_+^f(x,t,\alpha)A$ вдоль $\gamma_+^f(x,t,\beta)B$. Действительно, пусть подпространства $\gamma_+^f(x,t,\alpha)A$ и $\gamma_+^f(x,t,\beta)B$ трансверсальны для рассматриваемой точки $(x,t) \in \Omega(f)$. Положим $E_0(x,t,z) := \exp\{az(x-x_0) + (bz^j + c_1 z^{j-1} + \ldots + c_j)(t-t_0)\}$. Тогда по лемме 8 выражение

$$E_0(x,t,z)h^{-1}(z) = E_0(x,t,z)f^{-1}(z)B^{-1}_{\alpha\beta P}(z) = (\gamma_-^f)^{-1}(x,t,z)\gamma_+^f(x,t,z)B^{-1}_{\alpha\beta P}(z)$$

имеет вид $(\gamma_-^f)^{-1}(x,t,z)B^{-1}_{\alpha\beta P_f(x,t)}(z)E_1(x,t,z)$ для некоторой целой функции $E_1(x,t,\cdot) \in \mathcal{E}$. Отсюда следует, что $(x,t) \in \Omega(h)$ и

$$\gamma_-^h(x,t,z) = B_{\alpha\beta P_f(x,t)}(z)\gamma_-^f(x,t,z)$$

для всех z в окрестности ∞. Сравнивая коэффициенты разложений Лорана обеих частей последнего равенства при $|z| > R_0$ и пользуясь формулой (2.15), получаем (2.28).

Замечание 5. В отличие от примеров из пунктов 2.3 и 2.4, лемма 8 и формула добавления солитона (2.28) достаточно широко известны в литературе. Приведенное выше доказательство леммы 8 использует рассуждения из [1], гл. III, § 2 и [17], предложение 4.2.

3. Унитарное условие вещественности

3.1. Условия разрешимости задачи Римана. Пусть на окружности $\Gamma := \{|z| = R\} = \overline{D}_+ \cap \overline{D}_-$, где $D_+ := \{|z| < R\}$ и $D_- := \{|z| > R\} \cup \{\infty\}$, задана гельдеровская $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-значная функция $\gamma(z)$. Как узнать, является ли она лево- или правофакторизуемой? Общеизвестным необходимым условием является обращение в нуль целого числа $N(\gamma) := \frac{1}{2\pi}\Delta \arg_{|z|=R} \det \gamma(z)$, называемого *полным индексом* рассматриваемой задачи Римана. В случае $n = 1$ (т.е. для отображений $\gamma : \Gamma \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$) это условие также и достаточно. Однако при $n > 1$ это уже не так. Здесь ситуация описывается теоремой Биркгофа–Гротендика о классификации голоморфных векторных расслоений над $\overline{\mathbb{C}}$ (различные ее формулировки и доказательства см., например, в [5], [10], [30]). А именно, *для каждой гельдеровской функции* $\gamma : \Gamma \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ *существует единственный* (*с точностью до перестановки*) *набор целых чисел* $l_1, \ldots, l_n$ (*называемых левыми частными индексами отображения* γ), *для которого найдутся непрерывные функции* $\gamma_\pm : \overline{D}_\pm \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, *голоморфные на* $D_\pm$ *и удовлетворяющие соотношению*

$$\gamma(z) = \gamma_+(z)\,\mathrm{diag}(z^{l_1}, \ldots, z^{l_n})\gamma_-^{-1}(z) \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{3.1}$$

Таким образом, отображение γ левофакторизуемо тогда и только тогда, когда все его левые частные индексы равны нулю. Правофакторизуемость отображения γ аналогично описывается набором целых чисел $r_1, \ldots, r_n$, называемых *правыми частными индексами*. В общем случае правые и левые частные индексы одного и того же отображения γ никак не связаны между собой за исключением того, что сумма тех и других равна полному индексу:

$$l_1 + \ldots + l_n = \frac{1}{2\pi}\Delta \arg_{|z|=R} \det \gamma(z) = r_1 + \ldots + r_n.$$

Эти формулы получаются сразу же из определения частных индексов, если перейти к определителям и применить принцип аргумента.

Поскольку частные индексы в общем случае не допускают алгоритмического вычисления, встает вопрос о простых достаточных условиях разрешимости задачи Римана.

Известное достаточное условие такого рода было найдено И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном ([31], теорема 8.1): *если функция $\gamma(z)$ достаточно близка к постоянной функции $\gamma_0(z) \equiv I$ на Γ или, более общо, если $\gamma(z)+\gamma(z)^* \geqslant 0$ (как эрмитова форма) для всех $z \in \Gamma$, то γ лево- и правофакторизуема.* Согласно сказанному выше, можно рассматривать это условие как матричный аналог принципа аргумента. Следующая теорема дает другое достаточное условие, основанное на принципе симметрии: функция γ будет лево- и правофакторизуемой, если она переводит точки, симметричные относительно вещественной оси, в точки, симметричные относительно унитарной группы $U(n)$.

Теорема 2. *Пусть гельдеровская функция $\gamma : \Gamma \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ такова, что $\gamma(\overline{z})^*\gamma(z) = I$ для всех $z \in \Gamma$. Тогда γ лево- и правофакторизуема.*

Отметим, что эта теорема не вытекает из теоремы Гохберга–Крейна, но и не содержит ее. Ниже мы опишем два доказательства теоремы 2 и ее приложения к уравнениям (2.6) с унитарным условием вещественности.

3.2. Первое доказательство теоремы 2. Назовем $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-значное отображение $\gamma(z)$, определенное на Γ или $\overline{D}_\pm$, *симметричным*, если оно удовлетворяет условию $\gamma(\overline{z})^*\gamma(z) \equiv I$ на своей области определения. Ясно, что симметричные отображения с фиксированной областью определения образуют группу относительно поточечного умножения. Покажем, что всякое симметричное непрерывное отображение $\gamma : \Gamma \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ является равномерным на Γ пределом некоторых рациональных симметричных отображений γ_k. Действительно, если $\det(I - \gamma(z))$ не обращается в нуль нигде на Γ, то преобразование Кэли $g(z) := i(I + \gamma(z))(I - \gamma(z))^{-1}$ отображения γ обладает свойством

симметрии $g(\overline{z}) = g(z)^*$ уже относительно вполне вещественного векторного подпространства $\mathrm{Herm}(\mathbb{C}^n)$ всех эрмитовых матриц в комплексном векторном пространстве $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$. Из этого свойства вытекает эрмитовость всех коэффициентов Фурье функции $g(z)$, а значит, им обладают и все арифметические средние $r_k(z)$ частичных сумм ряда Фурье функции $g(z)$, которые по теореме Фейера сходятся к $g(z)$ равномерно на Γ при $k \to \infty$. Их обратные преобразования Кэли $\gamma_k(z) := (r_k(z) - iI)(r_k(z) + iI)^{-1}$ рациональны, симметричны и сходятся к $\gamma(z)$ равномерно на Γ при $k \to \infty$. В общем случае унитарно-симметричную комплексную гиперповерхность $\{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid \det(I-A) = 0\}$ и вещественную кривую $\gamma(\Gamma) \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ всегда можно развести друг от друга сколь угодно малым шевелением последней в классе унитарно-симметричных кривых (т.е. почти произвольным на верхней половине окружности Γ) и мы опять получаем требуемую последовательность γ_k.

Рассуждая как в начале доказательства теоремы 1 (или, если угодно, сославшись на теорему Гохберга–Крейна), убеждаемся в существовании такого $\delta > 0$, что всякое гельдеровское отображение $\varphi : \Gamma \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, удовлетворяющие $|\varphi(z) - I| < \delta$ при $z \in \Gamma$, является лево- и правофакторизуемым. В частности, это замечание применимо к $\varphi = \gamma\gamma_k^{-1}$ при всех достаточно больших k. Тем самым, имеем на Γ равенство $\gamma\gamma_k^{-1} = p_-^{-1}p_+$ для некоторых непрерывных отображений $p_\pm : \overline{D}_\pm \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, голоморфных на $D_\pm$ и гельдеровских на Γ, причем $p_-(\infty) = I$. По отмеченному выше групповому свойству отображение $\gamma\gamma_k^{-1}$ симметрично на Γ, а тогда из единственности решения задачи Римана с данными $(\gamma\gamma_k^{-1})(z) = \{(\gamma\gamma_k^{-1})(\overline{z})^*\}^{-1}$ вытекает, что отображения $p_\pm$ также симметричны на $\overline{D}_\pm$.

Известно, что всякое рациональное $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-значное симметричное отображение f можно разложить в конечное произведение симметричных множителей Бляшке[10], т.е. найдутся числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, ортопроекторы $P_1, \ldots, P_s$ на пространстве $\mathbb{C}^n$ и унитарная матрица $M \in U(n)$ такие, что для всех $z \in \overline{\mathbb{C}}$ имеем $f(z) = MB_s(z) \ldots B_1(z)$, где $B_j(z) := B_{\alpha_j,\overline{\alpha}_j,P_j}(z)$ в обозначениях (2.24). Разложив таким образом рациональное симметричное отображение γ_k^{-1}, получаем на Γ равенство

$$\gamma(z) = p_-^{-1}(z)p_+(z)B_1^{-1}(z) \ldots B_s^{-1}(z)M^{-1}.$$

Теперь будем последовательно "протаскивать" множитель $p_+(z)$ направо через все множители Бляшке. На первом шагу есть две возможности: либо

[10] См. [32], теорема 5.4 или [30], стр. 358–361, а также [29] и [33] при дополнительном условии ограниченности f в верхней или нижней полуплоскости.

$|\alpha_1| > R$, либо $|\alpha_1| < R$. В первом случае отображение $B_1 : \overline{D}_+ \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ голоморфно и симметрично, так что мы просто переобозначаем $p_+ B_1^{-1}$ через p_+ и переходим к следующему шагу. Во втором случае будем искать новый симметричный множитель Бляшке $\widetilde{B}_1(z)$ такой, что

$$p_+(z) B_1^{-1}(z) = \widetilde{B}_1^{-1}(z) \widetilde{p}_+(z) \quad \text{на} \quad \Gamma \tag{3.2}$$

для некоторого (также симметричного) непрерывного отображения $\widetilde{p}_+ : \overline{D}_+ \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, голоморфного на D_+ и гельдеровского на Γ. Повторяя доказательство леммы 8, мы видим, что необходимым и достаточным условием существования такого нового множителя Бляшке является (как и в (2.25)) трансверсальность подпространств $p_+(\alpha_1) \operatorname{im} P_1$ и $p_+(\overline{\alpha}_1) \ker P_1$ пространства $\mathbb{C}^n$. Но из симметричности $p_+(z)$ и ортогональности проектора P_1 вытекает, что указанные подпространства ортогональны друг другу. Установив тем самым существование разложения (3.2), мы переобозначаем $\widetilde{p}_+$ через p_+ и переходим к следующему шагу. Сделав все шаги, получаем правофакторизуемость γ. Левофакторизуемость γ доказывается аналогично (или вытекает из уже доказанной правофакторизуемости γ^{-1}). $\square$

3.3. Второе доказательство теоремы 2. (Оно было предложено независимо друг от друга П. Г. Гриневичем и С. Ю. Немировским в 2004 г.) На этот раз докажем левофакторизуемость γ (доказательство правофакторизуемости аналогично). Применим к обеим частям равенства (3.1) операцию $X \mapsto X^{\#} := (X^*)^{-1}$ (отражение $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ относительно унитарной группы) и подставим в него $\overline{z}$ вместо z. Так как $\gamma(z) \equiv \gamma^{\#}(\overline{z})$ по условию, то из единственности разложения (3.1) следует, что множество левых частных индексов отображения γ симметрично относительно начала координат: $\{l_1, \ldots, l_n\} = \{-l_1, \ldots, -l_n\}$. В частности, полный индекс $l_1 + \ldots + l_n$ отображения γ равен нулю.

Предположим, что γ имеет положительный левый частный индекс, скажем, $l_1 > 0$. Тогда найдутся непрерывные отображения $b_\pm : \overline{D}_\pm \to \mathbb{C}^n$, голоморфные на $D_\pm$ и такие, что

$$b_+ = \gamma b_- \text{ на } \Gamma, \quad b_-(\infty) = 0, \quad \text{но} \quad b_- \not\equiv 0.$$

(Можно взять $b_-(z) = \gamma_-(z) z^{-l_1} e_1$ и $b_+(z) = \gamma_+(z) e_1$, где $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t$ есть первый координатный вектор. Заметим, что на геометрическом языке пара $b_\pm$ задает ненулевое голоморфное сечение голоморфного векторного расслоения над $\overline{\mathbb{C}}$ с функцией перехода γ, равное нулю в точке ∞.) Из равенства

столбцов $b_+(z) = \gamma(z)b_-(z)$ вытекает равенство строк $b_+^*(\overline{z}) = b_-^*(\overline{z})\gamma^*(\overline{z})$. Матрично перемножая эти равенства и пользуясь условием $\gamma(\overline{z})^*\gamma(z) = I$, получаем равенство $\mathbb{C}$-значных функций

$$b_+^*(\overline{z})b_+(z) = b_-^*(\overline{z})b_-(z) \quad \text{для всех } z \in \Gamma.$$

Так как левая часть последнего равенства голоморфна на D_+, а правая на D_-, то обе части склеиваются в одну голоморфную функцию на $\overline{\mathbb{C}}$. Эта функция постоянна по теореме Лиувилля и равна нулю в силу условия $b_-(\infty) = 0$. Но тогда при $z \in \mathbb{R} \cap D_-$ имеем $|b_-(z)|^2 = 0$, откуда $b_- \equiv 0$ вопреки предположению. Это противоречие доказывает, что все левые частные индексы отображения γ неположительны. Поскольку их сумма равна нулю (см. выше), все эти индексы равны нулю, что и требовалось. $\square$

3.4. Приложения. Рассмотрим любое уравнение (2.6), заданное *косоэрмитовыми* матрицами $a, b, c_1, c_2, \ldots$. Примером может служить комплексифицированная версия (2.8) (с коэффициентами $A_0 = i$, $A_1 = A_2 = 0$) нелинейного уравнения Шредингера (2.10). Среди всех решений $q(x,t)$ такого уравнения (2.6) выделяются те, которые *косоэрмитовы при вещественных* x, t: именно они дают решения физически интересных уравнений, возникающих после редукции. Первая часть следующей леммы показывает, что (с точностью до неоднозначности, описанной в лемме 4) решение $q_f(x,t)$, построенное в теореме 1, обладает этим свойством тогда и только тогда, когда породившая его задача Римана (2.14) удовлетворяет условиям теоремы 2 для всех вещественных x, t. Из второй части леммы вытекает, что *каждое такое решение* $q_f(x,t)$ *определено* (*и, разумеется, вещественно аналитично*) *на всей вещественной плоскости* $\mathbb{R}^2_{xt}$. Иными словами, все физически интересные решения изучаемого нами класса глобально определены. В этом и состоит желаемое приложение теоремы 2. Хорошо известен его аналог для быстроубывающих граничных условий (см., например, [2], стр. 85–89), далее обсуждаемый в п. 4.3 ниже.

Лемма 9. (A) *Если все матрицы* $a, b, c_1, c_2, \ldots$ *косоэрмитовы, то построенное в теореме* 1 *решение* q *уравнения* (2.6) *удовлетворяет* $q(x,t) = -q^*(x,t)$ *для всех вещественных* (x,t) *в окрестности точки* $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ *в том и только том случае, когда* $q = q_f$ *для некоторой функции* $f \in \mathcal{D}$, *удовлетворяющей* $f(\overline{z})^* f(z) = I$ *при* $|z| > R$.

(B) *Если все матрицы* $a, b, c_1, c_2, \ldots$ *косоэрмитовы и функция* $f \in \mathcal{D}$ *удовлетворяет* $f(\overline{z})^* f(z) = I$ *при* $|z| > R$, *то поставленная в теореме* 1 *задача*

Римана (2.14) *разрешима при всех вещественных* x, t, *т.е. имеем* $\Omega(f) \supset \mathbb{R}^2_{xt}$.

Доказательство. (A) Отображение $S : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, определенное формулой $Sf(z) = (f(\overline{z})^*)^{-1}$, обладает следующими свойствами:

$$S(f_1 f_2) = S(f_1)S(f_2), \qquad S(Sf) = f, \qquad Sf = f \iff f(\overline{z})^* f(z) \equiv I. \tag{3.3}$$

Пусть $f \in \mathcal{D}$ — произвольная функция и $g := Sf$. В силу косоэрмитовости матриц $a, b, c_1, c_2, \dots$ мы получаем из (3.3) и единственности решения задачи Римана (2.14), что $\gamma^g_-(x,t,z) = S\gamma^f_-(x,t,z)$ и $\gamma^g_+(x,t,z) = S\gamma^f_+(x,t,z)$ для всех $(x,t) \in \Omega(f) \cap \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{C}$. Пользуясь последним равенством и уравнением (2.16), получаем для любой функции $f \in \mathcal{D}$, что

$$q_{Sf}(x,t) = -q^*_f(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \cap \Omega(f) = \mathbb{R}^2 \cap \Omega(Sf). \tag{3.4}$$

В частности, если $f = Sf$, то $q_f = -q^*_f$ на $\mathbb{R}^2 \cap \Omega(f)$.

Обратно, пусть построенное в теореме 1 решение $q = q_h$, $h \in \mathcal{D}$, уравнения (2.6) таково, что $q = -q^*$ в некоторой окрестности точки (x_0, t_0) на вещественной плоскости $\mathbb{R}^2_{xt}$ (или хотя бы $q(x,t_0) = -q^*(x,t_0)$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$). Тогда из (3.4) по теореме единственности для голоморфных функций получаем, что $q_{Sh} \equiv q_h$ в некоторой окрестности точки (x_0, t_0) в $\mathbb{C}^2$ (соответственно, $q_{Sh}(x,t_0) \equiv q_h(x,t_0)$ в некоторой окрестности точки x_0 в $\mathbb{C}$). Следовательно, по лемме 4, $Sh = hd$ для некоторой диагональной функции $d \in \mathcal{D}$. Существует единственная диагональная функция $r \in \mathcal{D}$ такая, что $r^2 = d^{-1}$. Применение S к уравнению $Sh = hd$ с учетом (3.3) дает, что $Sd = d^{-1}$, т.е. $(Sr)^2 = r^{-2}$, откуда в силу равенств $r(\infty) = Sr(\infty) = I$ имеем $Sr = r^{-1}$. Поэтому функция $f := hr^{-1} \in \mathcal{D}$ удовлетворяет $Sf = (Sh)(Sr)^{-1} = hdr = hr^{-1} = f$, т.е. является симметричной. С другой стороны, по лемме 4 имеем $q = q_f$, что и требовалось.

(B) Это утверждение вытекает из теоремы 2, поскольку косоэрмитовость матриц $a, b, c_1, \dots$ и симметричность f влекут симметричность отображения $\gamma(x,t,\cdot)$ из теоремы 1 при всех вещественных x, t. $\square$

Замечание 6. Кроме условия унитарной симметрии $f(\overline{z})^* f(z) \equiv I$, в теории интегрируемых систем широко применяется условие "псевдоунитарной симметрии" $f(\overline{z})^* J f(z) = J$, где $J = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1) \neq \pm I$ (см. [2], [17]). Уже на примерах односолитонных решений видно, что теорема 2 не переносится на этот случай. В связи с этим интересно посмотреть, в каком месте перестают работать приведенные выше доказательства теоремы 2. В

первом доказательстве уже нельзя утверждать, что разложение (3.2) всегда существует (кроме того, кажется до сих пор открытым вопрос о представимости всякого J-симметричного рационального отображения в виде конечного произведения Бляшке, хотя этот вопрос был положительно решен в [33], гл. II, теорема 5, при дополнительном условии, что $f^*(z)Jf(z) \leqslant J$ в верхней или нижней полуплоскости). Во втором доказательстве, в самом его конце, из того, что $b_-^*(z)Jb_-(z) = 0$ при всех $z \in D_- \cap \mathbb{R}$, уже не вытекает тождественное обращение вектора $b_-(z)$ в нуль.

Замечание 7. Отметим, что в [2], часть I, гл. 2, § 2 и [34], предложение 6.2, имеются аналоги теоремы 2, в которых окружность $\{|z| = R\}$ заменяется соответственно на вещественную ось и на пару окружностей, причем "условие симметрии" в обоих случаях совсем не то, которое используется в теореме 2 (см. п. 4.3). С другой стороны, теорема 2 родственна результатам о существовании и регулярности конечнозонных решений ([35], теорема 1), но отнюдь не является их следствием (см. об этом § 5).

4. Сравнение с быстроубывающим случаем

В этом параграфе описывается связь класса решений уравнения (2.6), построенных в теореме 1, с классом быстроубывающих решений, построенных методом обратной задачи теории рассеяния для матричных дифференциальных операторов первого порядка. Впервые этот метод был предложен В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом [18] в 1971 г. для случая нелинейного уравнения Шредингера (2.10), отвечающего, как мы видели выше, уравнению нулевой кривизны для 2×2-матриц. О дальнейшем развитии метода в его наиболее изученном 2×2-варианте см., например, [16], гл. 6, всю первую часть монографии [2] и обзор [36], а в общем $n \times n$-случае — монографию [1], гл. III, §§ 3–5 и обзор [37].

В общих чертах, обратное преобразование рассеяния для быстроубывающих потенциалов весьма похоже на конструкцию из теоремы 1: используется по существу та же самая задача Римана, а вся разница заключается лишь в выборе пространств $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$, в которых живут данные рассеяния. Эти пространства имеют большое пересечение, состоящее, грубо говоря, из тех функций $f \in \mathcal{D}$, которые, не считая конечного числа нулей и полюсов, голоморфны и обратимы вне некоторого отрезка вещественной оси и имеют достаточно хорошие пределы сверху и снизу на этом отрезке. В частности, тут содержатся данные рассеяния, отвечающие произвольным многосолитонным решениям.

Однако общие элементы $f \in \mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$ не обязаны быть голоморфными на ∞ (так что функция q_f может не быть глобально мероморфной), а общие элементы из $\mathcal{D}$ не обязаны иметь почти все особенности на $\mathbb{R}^1$ (так что функция q_f может не стремиться к 0 при $x \to \pm\infty$). Отношение между двумя указанными вариантами метода обратной задачи рассеяния напоминает отношение между двумя известными подходами к построению решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на $\mathbb{R}^N$: можно строить такие решения с помощью степенных рядов, а можно с помощью преобразования Фурье.

4.1. Прямое преобразование рассеяния. Фиксируем матрицу $a = -i\,\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, где $a_1 > a_2 > \dots > a_n$, и рассмотрим произвольную внедиагональную функцию $q : \mathbb{R}^1_x \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ из класса Шварца $S(\mathbb{R}^1)$ (т.е. $\lim_{x\to\pm\infty} x^k q^{(l)}(x) = 0$ для всех целых $k, l \geqslant 0$). При каждом $z \in \mathbb{R}$ дифференциальное уравнение $E_x = (az + q(x))E$ имеет единственную пару $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-значных решений $J_\pm(x, z)$, для которых

$$\lim_{x\to\pm\infty} J_\pm(x, z)e^{-azx} = I.$$

Функции $J_\pm(x, z)$ называются решениями Йоста. Их отношение $S := J_+^{-1}J_-$ не зависит от x и задает отображение $S : \mathbb{R}^1_z \to \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, называемое матрицей монодромии, матрицей перехода или матрицей рассеяния потенциала q. Известно, что все верхние главные миноры матрицы $S(z)$ продолжаются до функций, непрерывных в замкнутой верхней полуплоскости $\overline{\Pi}_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}$ и голоморфных на открытой полуплоскости Π_+, а нижние главные миноры аналогично продолжаются в нижнюю полуплоскость $\Pi_- := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z < 0\}$. Пусть множество $Z_\pm$ состоит из всех точек $z \in \overline{\Pi}_\pm$, в которых хотя бы один верхний (соотв. нижний) главный минор матрицы $S(z)$ обращается в нуль. Положим $Z := Z_+ \cup Z_-$. Тогда для всех $z \in \mathbb{R}\setminus Z$ имеем (однозначно определенные) разложения Гаусса $S(z) = N_1(z)V_1(z) = V_2(z)N_2(z)$, где матрицы V_1, V_2 верхнетреугольные, N_1, N_2 нижнетреугольные и все диагональные элементы матриц V_1 и N_2 равны 1. Оказывается, что *подкрученные решения Йоста*

$$\begin{aligned} X_+(x, z) &:= J_-(x, z)V_1^{-1}(z) = J_+(x, z)N_1(z), \\ X_-(x, z) &:= J_-(x, z)N_2^{-1}(z) = J_+(x, z)V_2(z), \end{aligned} \tag{4.1}$$

также удовлетворяющие уравнению $E_x = (az + q(x))E$, продолжаются при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^1$ с прямой $\mathbb{R}^1_z$ до функций, непрерывных на $\overline{\Pi}_\pm \setminus$

$Z_\pm$ и голоморфных на $\Pi_\pm \setminus Z_\pm$ соответственно. Данные рассеяния потенциала $q(x)$ характеризуются особенностями кусочно-голоморфной $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-значной функции

$$\Phi(z) = \Phi_q(z) := \begin{cases} X_+(0,z) & \text{для} \quad z \in \Pi_+ \setminus Z_+, \\ X_-(0,z) & \text{для} \quad z \in \Pi_- \setminus Z_-. \end{cases} \tag{4.2}$$

Эти особенности распадаются на три непересекающихся класса: (1) *спектральные особенности*, отвечающие точкам из $\mathbb{R}^1_z \cap Z$; (2) *дискретная часть*, отвечающая невещественным точкам Z (при этом сами дискретные данные рассеяния описывают структуру особенностей функций Йоста $X_\pm(0,z)$ в этих точках); (3) *непрерывная часть*, отвечающая точкам $\mathbb{R}^1_z \setminus Z$, причем сами непрерывные данные рассеяния описываются скачком функции (4.2) вдоль $\mathbb{R}^1_z$:

$$C(z) := X_-^{-1}(0,z)X_+(0,z), \qquad z \in \mathbb{R}^1 \setminus Z\,. \tag{4.3}$$

Обычно ограничиваются так называемыми *регулярными* потенциалами $q \in S(\mathbb{R}^1_x)$, для которых множество (1) пусто, а множество (2) конечно и состоит только из нулей и полюсов общего положения. Аналитические свойства данных рассеяния регулярных потенциалов $q \in S(\mathbb{R}^1_x)$ определяются включением $\Phi_q \in \mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$, где $\mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$ есть некоторое множество мероморфных функций $f : \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1 \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, которое можно рассматривать как *аналог пространства $\mathcal{D}$ для быстроубывающих потенциалов*. Не давая полного определения множества $\mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$, приведем лишь некоторые свойства его элементов f, чтобы проиллюстрировать разницу между $\mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$ и $\mathcal{D}$:

(i) множество особых точек f на $\mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1$ конечно;

(ii) существуют матрицы $\psi_1^\pm, \psi_2^\pm, \ldots \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ такие, что при $\Pi_\pm \ni z \to \infty$ имеют место асимптотические разложения $f(z) \sim I + \psi_1^\pm z^{-1} + \psi_2^\pm z^{-2} + \ldots$, т.е. $\lim_{\Pi_\pm \ni z \to \infty} z^k(f(z) - I - \psi_1^\pm z^{-1} - \ldots - \psi_k^\pm z^{-k}) = 0$ для всех целых $k \geqslant 0$;

(iii) предельные значения $f_\pm(r) := \lim_{s \to 0+} f(r \pm is)$ существуют для всех $r \in \mathbb{R}^1$ и задают C^∞ отображения $f_\pm : \mathbb{R}^1_z \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, причем $\lim_{|r| \to \infty} f_\pm(r) = I$.

Отметим, что пересечение $\mathcal{D}^{\mathrm{rd}} \cap \mathcal{D}$ состоит из тех и только тех функций $f \in \mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$, которые голоморфны в окрестности точки $z = \infty$. В частности, оно содержит все рациональные $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-значные функции $f(z)$ с $f(\infty) = I$, не имеющие особенностей на вещественной оси.

4.2. Обратное преобразование рассеяния. Опишем процедуру восстановления регулярного потенциала $q \in S(\mathbb{R}^1)$ по его данным рассеяния $f := \Phi_q \in \mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$, считая для простоты, что функция f голоморфна на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Рассмотрим при каждом $x \in \mathbb{R}^1$ следующую задачу о факторизации со скачком вдоль $\mathbb{R}^1_z$: найти голоморфные отображения $m_\pm(x,\cdot) : \Pi_\pm \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, нормированные условием $\lim_{z\to\infty} m_\pm(x,z) = I$, граничные значения которых на $\mathbb{R}^1_z$ удовлетворяют

$$m_-^{-1}(x,z)m_+(x,z) = E_0(x,z)C(z)E_0^{-1}(x,z) \quad \text{для всех} \quad z \in \mathbb{R}^1. \tag{4.4}$$

Здесь $E_0(x,z) := e^{azx}$, а $C(z) := f_-^{-1}(z)f_+(z)$ есть скачок функции f вдоль R^1_z (сравните с (4.3)). Из формул (4.1) вытекает, что задача факторизации (4.4) разрешима при каждом $x \in \mathbb{R}^1$. А именно, ее решением является пара функций $m_\pm(x,z) = X_\pm(x,z)e^{-azx}$, которую можно рассматривать как единый элемент $m(x,\cdot) \in \mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$. Зная асимптотическое поведение $m(x,z)$ в точке $z=\infty$, можно восстановить q по формуле

$$q(x) = \lim_{z\to\infty} z[m(x,z),a]. \tag{4.5}$$

Если функция f принадлежит $\mathcal{D}^{\mathrm{rd}} \cap \mathcal{D}$ и голоморфна на $\mathbb{C}^1_z \setminus \mathbb{R}^1_z$, то *задача Римана* (4.4) *совпадает с применявшейся в теореме* 1 *задачей Римана* $\exp\{azx\}f^{-1}(z) = \gamma_-^{-1}(x,0,z)\gamma_+(x,0,z)$, *а формула* (4.5) *совпадает с определением* (2.15) *функции* $q_f(x,0)$. Действительно, функция $m(x,\cdot)$ класса $\mathcal{D}^{\mathrm{rd}} \cap \mathcal{D} \cap \mathcal{O}(\mathbb{C}^1_z \setminus \mathbb{R}^1_z)$ удовлетворяет равенству $\exp\{azx\}f^{-1}(z) = m^{-1}(x,z)E(x,z)$ для некоторой целой функции $E(x,\cdot) : \mathbb{C} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда ее скачок $m_-^{-1}(x,z)m_+(x,z)$ вдоль $\mathbb{R}^1_z$ удовлетворяет равенству (4.4).

Обратимся теперь к случаю, когда про заданную функцию $f \in \mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$ заранее неизвестно, существует ли регулярный потенциал q такой, что $f = \Phi_q$. Обозначим через $\Omega^{\mathrm{rd}}(f)$ множество всех $x \in \mathbb{R}^1$, для которых разрешима задача Римана (4.4). Пользуясь решением $m(x,\cdot) \in \mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$ этой задачи, *определим* внедиагональную функцию $q : \Omega^{\mathrm{rd}}(f) \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ по формуле (4.5). Основной результат об обратном преобразовании рассеяния состоит в том, что если $\Omega^{\mathrm{rd}}(f) = \mathbb{R}^1$, то $\Phi_q = fr^{-1}$ для некоторой *диагональной* функции $r \in \mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$. (На самом деле $r(z) = \lim_{x\to-\infty} m(x,z)$.) С другой стороны, если $f_1, f_2 \in \mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$ отличаются лишь умножением справа на диагональную функцию из $\mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$, то соответствующие им потенциалы q_1, q_2 совпадают. Таким образом, мы приходим к картине, подобной лемме 4: *регулярные потенциалы* $q \in S(\mathbb{R}^1)$ *находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами* $f \in \mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$, *удовлетворяющими* $\Omega^{\mathrm{rd}}(f) = \mathbb{R}^1$, *по модулю умножения справа на диагональный элемент из* $\mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$. Приведенное описание обратного преобразования рассеяния является аналогом теоремы 1 для случая $a = -i\,\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)$, $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$, и

$b = c_1 = c_2 = \ldots = 0$. Оно позволяет построить быстроубывающие решения и для других уравнений (2.6) с $c_1 = c_2 = \ldots = 0$, заменяя функцию $\exp\{axz\}$ в задаче факторизации (4.4) на функцию $\exp\{axz + bz^m t\}$.

4.3. Унитарное условие вещественности. Согласно сказанному выше в п. 4.2, полезно иметь достаточные условия разрешимости задачи Римана, которые для широких классов функций $f \in \mathcal{D}$ гарантировали бы совпадение множества $\Omega^{\mathrm{rd}}(f)$ со всей осью $\mathbb{R}^1$. Вот один из таких критериев (см. [2], стр. 85–89 или [37], теорема 3.6). *Если $f \in \mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$ удовлетворяет унитарному условию вещественности $f(\overline{z})^* f(z) \equiv I$, то $\Omega^{\mathrm{rd}}(f) = \mathbb{R}^1$.* Действительно, из этого условия вытекает, что $f_-^{-1}(z) = f_+^*(z)$ для всех $z \in \mathbb{R}$. Поэтому правая часть $\gamma := E_0 C E_0^{-1}$ равенства (4.4) может быть записана в виде $\gamma = E_0 f_+^* f_+ E_0^*$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^1$. (Равенство $E_0^{-1} = E_0^*$ вытекает из косоэрмитовости матрицы a.) В частности, имеем $\gamma = \gamma^* \geqslant 0$ на $\mathbb{R}^1_z$. Тогда по теореме Гохберга–Крейна (переформулированной для $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-значных функций на $\mathbb{R}^1$ вместо S^1) задача Римана (4.4) разрешима при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^1$, что и требовалось.

В этом рассуждении, по сравнению с теоремой 2 и леммой 9(B), унитарное условие вещественности $f(\overline{z})^* f(z) \equiv I$ имеет совершенно другой смысл: оно выражает симметрию *относительно носителя данных факторизации*.

5. Сравнение с конечнозонным случаем

Опишем связь решений уравнения (2.6), построенных в теореме 1, с конечнозонными решениями. (Как известно, этот класс решений впервые был рассмотрен С. П. Новиковым [3] для уравнения Кортевега–де Фриза.) До конца параграфа будем считать отмеченную точку $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ началом координат $(0, 0)$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2_{xt}$ есть некоторая окрестность начала координат в $\mathbb{R}^2$, внедиагональная гладкая функция $q : \Omega \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ удовлетворяет (2.6) на Ω, а $E : \Omega \times \mathbb{C}^1_z \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ есть нормированное условием $E(0, 0, z) = I$ решение системы (1.2), где U и V заданы по функции $q(x, t)$ формулами (2.7). Следуя определениям из работы И. М. Кричевера [13], стр. 91, и обзора [38], стр. 227–228, будем называть функцию q *конечнозонным решением общего положения*, если существует такая *рациональная* $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значная функция $G(z)$, голоморфная в точке $z = \infty$, что алгебраическая кривая $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \det(G(z) - wI) = 0\}$ распадается над проколотой окрестностью точки $z = \infty$ на n различных голоморфных ветвей и, для всех $(x, t) \in \Omega$, функция $E(x, t, z) G(z) E^{-1}(x, t, z)$ также

голоморфна в точке $z = \infty$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значных функций $G(z)$, голоморфных на $\{|z| > R\} \cup \{\infty\}$ (R свое для каждой G) и таких, что комплексная кривая $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |z| > R, \det(G(z) - w) = 0\}$ распадается над проколотой окрестностью точки $z = \infty$ на n различных голоморфных ветвей. (Как и в определении множества $\mathcal{D}$ в § 2, можно считать, что $\mathcal{M}$ состоит из ростков функций указанного вида в точке $z = \infty$.) Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ есть некоторая окрестность начала координат и $q : \Omega \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ — гладкое решение уравнения (2.6), а $E : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ — соответствующее решение линейной системы (1.2), нормированное условием $E(0, 0, z) = I$. Будем называть семейство элементов $W(x, t, \cdot)$ множества $\mathcal{M}$, гладко зависящих от параметров $(x, t) \in \Omega$, *сходящейся резольвентой решения* q, если выполнены равенства дифференциальных операторов

$$(5.1) \qquad [\partial_x - U(x, t, z), W(x, t, z)] = 0, \qquad [\partial_t - V(x, t, z), W(x, t, z)] = 0$$

для всех $(x, t) \in \Omega$, $|z| > R$, где функции $U(x, t, z)$, $V(x, t, z)$ определены формулами (2.7). Условия (5.1) эквивалентны уравнениям $W_x = [U, W]$, $W_t = [V, W]$, уже встречавшимся нам в (1.6). Из единственности решения системы (1.2) следует, что всякое решение этих уравнений можно записать в виде[11]

$$(5.2) \qquad W(x, t, z) = E(x, t, z) G(z) E^{-1}(x, t, z) \quad \text{при} \quad (x, t) \in \Omega, \, |z| > R$$

для некоторой функции $G \in \mathcal{M}$, а именно, для $G(z) = W(0, 0, z)$. Обратно, взяв произвольную функцию $G \in \mathcal{M}$ и определив $W(x, t, z)$ формулой (5.2), мы получим сходящуюся резольвенту решения q, если только правая часть формулы (5.2) голоморфно продолжается в точку $z = \infty$ при всех $(x, t) \in \Omega$.

Первые два утверждения следующей теоремы гласят, что решения уравнения (2.6), построенные в теореме 1 — это те и только те решения, которые обладают сходящейся резольвентой. С другой стороны, из сказанного выше ясно, что конечнозонные решения общего положения — это те и только те решения, которые обладают сходящейся резольвентой, *рациональной по* z. Таким образом, все конечнозонные решения общего положения получаются конструкцией из теоремы 1. Утверждение (D) теоремы 3 описывает данные рассеяния $f \in \mathcal{D}$, отвечающие этим решениям (см. также пример на эту тему в п. 2.4).

[11] Если обратимая матрица $E(x, t, z)$ удовлетворяет уравнениям (1.2): $E_x = UE$, $E_t = VE$, то WE также им удовлетворяет, а потому записывается в виде EG, где G не зависит от x, t.

Теорема 3. (A) *Для любой функции $f \in \mathcal{D}$ и любой диагональной* $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$*-значной функции $G_0(z)$, голоморфной в окрестности ∞, функция $W(x,t,z) = \gamma_-(x,t,z)G_0(z)\gamma_-^{-1}(x,t,z)$ является сходящейся резольвентой решения $q_f(x,t)$ уравнения* (2.6).

(B) *Пусть решение $q : \Omega \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ уравнения* (2.6) *обладает сходящейся резольвентой $W(x,t,z)$. Тогда существует функция $f \in \mathcal{D}$ такая, что функция $f^{-1}(z)W(0,0,z)f(z)$ диагональна (или, эквивалентно, столбцы матрицы $f(z)$ суть собственные векторы матрицы $W(0,0,z)$). Для любой такой функции $f \in \mathcal{D}$ имеем $q = q_f$.*

(C) *Пусть $q(x,t)$ есть конечнозонное решение общего положения для уравнения* (2.6). *Тогда $q = q_f$ для некоторой функции $f \in \mathcal{D}$.*

(D) *Решение q_f уравнения* (2.6) *является конечнозонным решением общего положения тогда и только тогда, когда найдутся диагональная функция $r \in \mathcal{D}$ и рациональная* $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$*-значная функция $G(z)$ такие, что $G(z)$ голоморфна в точке ∞, кривая $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid \det(G(z) - wI) = 0\}$ распадается над проколотой окрестностью точки $z = \infty$ на n различных ветвей, и столбцы матрицы $f(z)r(z)$ являются собственными векторами матрицы $G(z)$ для всех z из некоторой окрестности точки ∞.*

Доказательство. (A) Ясно, что функция $W(x,t,\cdot)$ принадлежит $\mathcal{M}$ при всех $(x,t) \in \Omega(f)$. С другой стороны, так как матрица G_0 диагональна, т.е. коммутирует с матрицей E_0 из задачи Римана $E_0 f^{-1} = \gamma_-^{-1}\gamma_+$ (см. (2.14)), то при всех $(x,t) \in \Omega(f)$ и $|z| > R$ имеем $W = \gamma_- G_0 \gamma_-^{-1} = \gamma_+ f G_0 f^{-1} \gamma_+^{-1}$, т.е. выполняется (5.2) с $E = \gamma_+$, $G = fG_0f^{-1}$.

(B) Покажем, что матрица $W(x,t,\infty)$ диагональна при всех $(x,t) \in \Omega$. Сначала допустим, что матрица $W(x,t,\infty)$ обратима для всех $(x,t) \in \Omega$. Тогда равенство (4.2) с $G(z) = W(0,0,z)$ можно записать в виде $E = WEG^{-1}$, откуда $U = E_x E^{-1} = (WE)_x (WE)^{-1} = W_x W^{-1} + WUW^{-1}$ Сравнение коэффициентов при z^1 в последнем равенстве дает, что $a = W(x,t,\infty)aW^{-1}(x,t,\infty)$, т.е. матрица $W(x,t,\infty)$ диагональна при всех $(x,t) \in \Omega$. Чтобы прийти к тому же заключению в общем случае, надо заменить $W(x,t,z)$ на $W(x,t,z) + \varepsilon I$ и перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Из определения $\mathcal{M}$ следует, что функция $G(z) = W(0,0,z)$, как и любой другой элемент $G \in \mathcal{M}$ с диагональной матрицей $G(\infty)$, может быть представлена в виде $G(z) = f(z)G_0(z)f^{-1}(z)$, где $f \in \mathcal{D}$, а матрица $G_0(z)$ диагональна и голоморфна в окрестности ∞ (см., например, [28], гл. II, § 4, п. 6). При этом диагональные элементы матрицы $G_0(z)$ суть значения тех n голоморфных вет-

вей, на которые распадается кривая $\{\det(G(z) - wI) = 0\}$ над окрестностью точки $z = \infty$, а столбцы матрицы $f(z)$ представляют собой соответствующие собственные векторы. При фиксированных G и G_0 матрица f определена однозначно с точностью до умножения справа на произвольную диагональную функцию $r \in \mathcal{D}$. В оставшейся части доказательства мы фиксируем обозначение $G(z) = W(0, 0, z)$. Выберем любую функцию $f \in \mathcal{D}$ такую, что функция $G_0 = f^{-1}Gf$ диагональна и покажем, что $q = q_f$.

Спектры матриц $W(x, t, z)$ и $G(z)$ совпадают при всех $(x, t) \in \Omega$ в силу (5.2). Поэтому применение рассуждения из предыдущего абзаца к функции $z \mapsto W(x, t, z)$ показывает, что существует гладко зависящее от $(x, t) \in \Omega$ семейство элементов $M(x, t, \cdot) \in \mathcal{D}$ такое, что

$$W(x, t, z) = M(x, t, z)G_0(z)M^{-1}(x, t, z) \quad \text{при} \quad (x, t) \in \Omega,\ |z| > R. \tag{5.3}$$

При $z \neq \infty$ левая часть (5.3) равна $W = EGE^{-1} = EfG_0(Ef)^{-1}$. Тем самым, поскольку для общей точки z все собственные значения диагональной матрицы $G_0(z)$ различны, из (5.3) следует, что $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-значная функция

$$\Phi(x, t, z) := M^{-1}(x, t, z)E(x, t, z)f(z) \tag{5.4}$$

диагональна при всех $(x, t) \in \Omega$, $|z| > R$. Обозначая M^{-1} через μ, получаем из (5.4), что $\Phi_x\Phi^{-1} = (\mu E)_x(\mu E)^{-1} = \mu_x\mu^{-1} + \mu U\mu^{-1}$. Подставляя сюда $U(x, t, z) = az + q(x, t)$ и $\mu(x, t, z) = I + \mu_1(x, t)z^{-1} + \dots$, получаем разложение функции $\Phi_x\Phi^{-1}$ в ряд Лорана по степеням z при фиксированных $(x, t) \in \Omega$:

$$\Phi_x\Phi^{-1}(x, t, z) = az + \{[\mu_1(x, t), a] + q(x, t)\} + \dots,$$

где точками обозначены отрицательные степени z. Так как разлагаемая в ряд функция диагональна, а коэффициент при z^0 внедиагонален, то последний равен нулю, т.е. диагональная функция $\Phi_x\Phi^{-1} - az$ голоморфна и равна нулю в точке $z = \infty$. Поэтому, заменяя $M(x, t, z)$ на $M(x, t, z)r(x, t, z)$ для надлежащей диагональной функции $r(x, t, \cdot) \in \mathcal{D}$ (при этом равенство (5.3) останется справедливым, а Φ заменится на $r^{-1}\Phi$ согласно (5.4)), мы можем считать, что

$$\Phi_x\Phi^{-1} = az. \tag{5.5}$$

Дифференцируя равенство (5.4) по t и пользуясь тем, что $E_tE^{-1} = V$, мы аналогично получаем, что $\Phi_t\Phi^{-1} = \mu_t\mu^{-1} + \mu V\mu^{-1}$. Тем самым имеем

$$\{M\Phi_t\Phi^{-1}M^{-1}\}_+ = V, \tag{5.6}$$

где $\{\cdot\}_+$ означает неотрицательную часть ряда Лорана. Рассмотрим функцию $S(x,t,z) := M(x,t,z)S_0(z)M^{-1}(x,t,z)$, где $S_0(z) := b + c_1 z^{-1} + \ldots + c_m z^{-m}$. Из (5.4) и диагональности Φ следует, что функция $S = EfS_0 f^{-1}E^{-1}$ удовлетворяет (5.2), т.е. является сходящейся резольвентой решения q. В частности, при каждом фиксированном t из некоторой окрестности нуля к функции $S(x,t,z)$ применима лемма 2 (доказательство которой буквально переносится на нужный нам сейчас случай гладкой внедиагональной функции $q : J \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ на интервале $J = (-\delta,\delta) \subset \mathbb{R}$ и последовательности гладких функций $\varphi_k : J \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$, $k = 0,1,2,\ldots$). По этой лемме имеем $S(x,t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(t)}(q) z^{-k}$, где дифференциальные полиномы $F_k^{(t)}$ заданы некоторой последовательностью $a, b, s_1(t), s_2(t), \ldots$ диагональных матриц, причем

$$\mathrm{tr}(b + c_1 z^{-1} + \ldots + c_m z^{-m})^l = \mathrm{tr}(b + s_1(t)z^{-1} + s_2(t)z^{-2} + \ldots)^l$$

для всех $l = 0,1,2,\ldots$. Отсюда в силу диагональности всех участвующих матриц вытекает, что $s_k(t) \equiv c_k$ при $k = 1,\ldots,m$. Поэтому из определения (2.7) функции V получаем, что $\{z^m S(x,t,z)\}_+ = V(x,t,z)$. Последнее вместе с (5.6) означает, что $\{M(\Phi_t\Phi^{-1} - z^m S_0)M^{-1}\}_+ = 0$, т.е. диагональная функция $\Phi_t\Phi^{-1} - z^m S_0$ голоморфна и равна нулю в точке $z = \infty$. Кроме того, из (5.5) следует, что эта функция не зависит от x. Поэтому, заменяя $M(x,t,z)$ на $M(x,t,z)r(t,z)$ для надлежащей диагональной функции $r(t,\cdot) \in \mathcal{D}$, мы можем считать, что наряду с (5.5) выполнено равенство

$$\Phi_t\Phi^{-1} = z^m S_0(z) = bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m. \tag{5.7}$$

Равенства (5.5) и (5.7) вместе с вытекающим из (5.4) условием нормировки $\Phi(0,0,z) = I$ означают, что $\Phi(x,t,z) = \exp\{azx + (bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m)t\}$. Но тогда формула (5.4) дает решение задачи Римана (2.14) из теоремы 1 в виде $\gamma_+ = E$, $\gamma_- = M$. Отсюда и, например, из (2.16) сразу следует, что $q = q_f$.

(C) Вытекает из утверждения (B), поскольку любое конечнозонное решение общего положения имеет сходящуюся (рациональную) резольвенту.

(D) Вытекает из утверждения (B) и леммы 4. $\square$

Замечание 8. Поясним название "конечнозонные решения общего положения". В [38], стр. 227, решение $U(x,t,z)$, $V(x,t,z)$ уравнений (2.6) называется конечнозонным, если существует рациональная по z функция $W(x,t,z)$, удовлетворяющая (5.1). Ясно, что здесь подразумевается какое-то условие невырожденности на W, поскольку функция $W(x,t,z) \equiv I$ удовлетворяет (5.1)

для любых U, V. Полагая $G(z) = W(0, 0, z)$, можно рассмотреть следующие варианты условия невырожденности, в порядке возрастания их ограничительности:

(1) алгебраическая кривая $\Sigma := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \det(G(z) - wI) = 0\}$ имеет хотя бы одну неприводимую компоненту кратности $< n$ или, иными словами, $G(z) \not\equiv c(z)I$ для скалярной функции $c(z)$;

(2) кривая Σ не имеет кратных компонент;

(3) кривая Σ распадается на n различных голоморфных ветвей над проколотой окрестностью точки $z = \infty$;

(4) все собственные значения матрицы $G(\infty)$ различны.

В настоящей работе принято условие (3), в [39] — условие (4), а в [38], по-видимому, имеются в виду условия (1) и (2). Последнее из них слабее, чем (3), т.к. разрешает кривой Σ иметь точки ветвления над $z = \infty$. Однако из утверждения (A) теоремы 3 вытекает, что условия (3) и (4) на самом деле задают один и тот же класс решений каждого из рассматриваемых уравнений (2.6). Можно предположить в виде гипотезы, что тот же самый класс решений уравнения (2.6) задается и условиями (1), (2). Если это верно, то в формулировке теоремы 3 можно опустить слова “общего положения”.

ГЛАВА II. ЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

1. Обратное преобразование рассеяния

В главе I изучалось отображение $\mathcal{D} \to \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$, $f \mapsto q_f$, заданное формулами (см. (I.2.15), (I.2.16))

$$q_f(x) = \lim_{z\to\infty} z[\gamma_-(x,z) - I, a] = \gamma_{+x}\gamma_+^{-1} - az, \tag{1.1}$$

где $\gamma_\pm(x,z)$ есть решение задачи Римана $e^{az(x-x_0)}f^{-1}(z) = \gamma_-^{-1}(x,z)\gamma_+(x,z)$ (частный случай $t = t_0$ или $b = c_1 = \ldots = 0$ равенства (I.2.14)). Согласно п. I.4.2, это отображение можно рассматривать в качестве аналога *обратного преобразования рассеяния* для построения локальных голоморфных решений уравнения (I.2.6). Некоторый недостаток этой терминологии состоит в том, что задаваемое формулой (1.1) отображение $\mathcal{D} \to \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ не инъективно (это ясно из леммы I.4) и не сюръективно (это вытекает из теоремы Мальгранжа, цитированной после формулировки теоремы I.1). Таким образом, не каждому потенциалу $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ отвечают какие-либо данные рассеяния $f \in \mathcal{D}$, а если и отвечают, то неоднозначно[1]. В настоящей главе II оба этих недостатка устраняются. Сюръективность обеспечивается расширением пространства $\mathcal{D}$. Вместо сходящихся в некоторой окрестности точки ∞ рядов Лорана

$$f(z) = I + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi_j}{z^{j+1}}, \qquad \varphi_j \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C}) \tag{1.2}$$

рассматриваются формальные степенные ряды такого же вида с надлежащими ограничениями на рост коэффициентов при $j \to \infty$, а именно, радиус сходимости ряда (1.2) должен становиться положительным после деления j-го

[1]Впрочем, эта неоднозначность становится иногда достоинством, позволяя достичь гибкости и естественности обозначений в некоторых важных конструкциях. Так, формула добавления солитона (I.2.28) отвечает для ненормированных данных рассеяния всего лишь их умножению на множитель Бляшке, а для нормированных — становится очень сложной.

члена этого ряда на $j!$ для всех $j = 0, 1, 2, \dots$. Затем инъективность отображения $f \mapsto q_f$ достигается требованием, чтобы все матрицы φ_j в (1.2) были внедиагональны.

В следующем п. 1.1 вводятся нужные нам банаховы пространства формальных степенных рядов, а в п. 1.2 доказывается (в несколько обобщенном виде) разрешимость упомянутой выше задачи Римана, дающей определение формального степенного ряда $\gamma_-(x, z)$ и целой функции $\gamma_+(x, z)$ для любого допустимого формального степенного ряда $f(z)$ вида (1.2). После этого в п. 1.3 мы определяем голоморфный внедиагональный росток $q_f(x)$ в точке $x_0 \in \mathbb{C}$ посредством первого равенства (1.1) и доказываем справедливость второго равенства (1.1). Кроме того, в п. 1.3 становится ясно, как обратить построенное соответствие $f \mapsto q_f$ с учетом внедиагональности всех φ_j в (1.2). Само построение получающегося таким образом *прямого преобразования рассеяния* $q_f \mapsto f$ и вывод его свойств будут проведены в § 2.

1.1. Леммы о пространствах формальных степенных рядов. Пусть $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ есть множество всех комплексных $n \times n$-матриц, $\mathcal{R}(x_0)$ — множество ростков всех голоморфных $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значных отображений в точке $x_0 \in \mathbb{C}$, а $\mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ — множество всех внедиагональных ростков $q \in \mathcal{R}(x_0)$, т.е. таких, что $q_{ll}(x) \equiv 0$ при $l = 1, \dots, n$. Следуя терминологии, принятой в теории формальных решений обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [26], [27]), мы для каждого $\alpha \geqslant 0$ будем обозначать через Gev_α и называть *классом Жеврея* α множество всех формальных степенных рядов вида $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{-(k+1)}$ с $\varphi_k \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ таких, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-\alpha} |\varphi_k| x^k$ имеет ненулевой радиус сходимости. Здесь $|\cdot|$ означает любую норму на $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, обладающую свойством $|AB| \leqslant |A||B|$. Обозначим через $\mathrm{Gev}_\alpha^{\mathrm{od}}$ множество всех внедиагональных $\varphi \in \mathrm{Gev}_\alpha$, т.е. таких, что $(\varphi_k)_{ll} = 0$ для всех $k \geqslant 0$ и всех $l = 1, \dots, n$. Положим также $\mathrm{Gev}_{\alpha-0} := \cup_{0 \leqslant s < \alpha} \mathrm{Gev}_s$.

Пусть даны числа $\alpha \geqslant 0$, $m \geqslant 1$ и $A, B > 0$. Обозначим через $G_\alpha(A)$ множество всех формальных степенных рядов $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{-(k+1)}$ с $\varphi_k \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ таких, что $\|\varphi\|_{\alpha, A} := \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-\alpha} |\varphi_k| A^k < \infty$. Ясно, что $G_\alpha(A)$ есть банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\alpha, A}$, изометрически изоморфное пространству l_1, и что для всех $\alpha \geqslant 0$ выполнено равенство

$$\mathrm{Gev}_\alpha = \bigcup_{A > 0} G_\alpha(A).$$

Мы не вводим на векторном пространстве Gev_α никакой нормы или топологии.

Рассмотрим также множество $E_m(B)$ всех формальных степенных рядов $\varepsilon(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l z^l$ с $\varepsilon_l \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ таких, что $|\varepsilon_l| \leqslant C(l!)^{-1/m} B^l$ для всех $l = 0, 1, 2, \ldots$ и некоторой константы $C > 0$. Ясно, что $E_m(B)$ есть банахово пространство с нормой $\|\varepsilon\|_{m,B} := \sup_{l \geqslant 0} |\varepsilon_l| (l!)^{1/m} B^{-l}$, изометрически изоморфное пространству l_∞. Кроме того, из формул для вычисления порядка и типа целой функции через коэффициенты ее тейлоровского разложения (см., например, [40], гл. I, § 1, п. 6) вытекает, что все элементы пространства $E_m(B)$ являются целыми $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значными функциями порядка не выше m и типа не выше $B^{1/m}$ при порядке m. Обозначим через $\mathrm{Ent}_m := \cup_{B>0} E_m(B)$ векторное пространство всех $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значных целых функций порядка $\leqslant m$ и конечного типа при порядке m (впрочем, это обозначение не будет использоваться до § 4).

Через $\{\cdot\}_+$ и $\{\cdot\}_-$ будем обозначать положительную и отрицательную части формального ряда Лорана: $\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k\}_+ = \sum_{k \geqslant 0} a_k z^k$, $\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k\}_- = \sum_{k \leqslant -1} a_k z^k$.

Лемма 1. *Пусть $A > B > 0$, $m \geqslant 1$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1/m$. Тогда произведение элементов из $G_\alpha(A)$ и $E_m(B)$, взятых в любом порядке, есть корректно определенный формальный ряд Лорана, принадлежащий $G_\alpha(A-B) + E_m(B)$. Отображения $(\varphi, \varepsilon) \mapsto \{\varphi\varepsilon\}_\pm$ и $(\varphi, \varepsilon) \mapsto \{\varepsilon\varphi\}_\pm$ являются непрерывными билинейными формами на $G_\alpha(A) \times E_m(B)$ со значениями в $G_\alpha(A-B)$ и $E_m(B)$.*

Доказательство. Имеем $\{\varphi\varepsilon\}_- = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^{-(k+1)}$ и $\{\varphi\varepsilon\}_+ = \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l z^l$, где $\psi_k = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_{k+p}\varepsilon_p$ и $\delta_l = \sum_{q=0}^{\infty} \varphi_q \varepsilon_{q+l+1}$. Обозначим $\|\varepsilon\|_{m,B}$ через C. Пользуясь неравенствами $m \geqslant 1$, $1/m \geqslant \alpha$ и формулой бинома Ньютона, получаем

$$\|\{\varphi\varepsilon\}_-\|_{\alpha,A-B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\psi_k|(A-B)^k}{(k!)^\alpha} \leqslant \sum_{k,p=0}^{\infty} \frac{|\varphi_{k+p}||\varepsilon_p|(A-B)^k}{(k!)^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k,p=0}^{\infty} |\varphi_{k+p}| \frac{B^p (A-B)^k}{k!^\alpha p!^{1/m}} \leqslant C \sum_{s=0}^{\infty} \frac{|\varphi_s|}{(s!)^\alpha} \sum_{k=0}^{s} \left(\frac{s!}{k!(s-k)!}\right)^\alpha B^{s-k}(A-B)^k$$

$$\leqslant C \sum_{s=0}^{\infty} \frac{|\varphi_s|}{(s!)^\alpha} (B + A - B)^s = C\|\varphi\|_{\alpha,A} = \|\varphi\|_{\alpha,A}\|\varepsilon\|_{m,B},$$

откуда и вытекают все требуемые свойства $\{\varphi\varepsilon\}_-$. Доказательство для $\{\varepsilon\varphi\}_-$ совершенно аналогично. С другой стороны, с помощью очевидного неравен-

ства $q!(l+1)! \leqslant (q+l+1)!$ и условия $B < A$ получаем

$$|\delta_l| = |\sum_{q=0}^{\infty} \varphi_q \varepsilon_{q+l+1}| \leqslant C \sum_{q=0}^{\infty} \frac{|\varphi_q| B^{q+l+1}}{(q+l+1)!^{1/m}} \leqslant \frac{C B^{l+1}}{(l+1)!^{1/m}} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{|\varphi_q| A^q}{q!^{1/m}},$$

откуда $\|\{\varphi\varepsilon\}_+\|_{m,B} \leqslant B\|\varphi\|_{1/m,A}\|\varepsilon\|_{m,B} \leqslant B\|\varphi\|_{\alpha,A}\|\varepsilon\|_{m,B}$. Этим доказаны все требуемые свойства $\{\varphi\varepsilon\}_+$. Доказательство для $\{\varepsilon\varphi\}_+$ аналогично. $\square$

Лемма 2. *Пусть $\alpha \geqslant 0$ и $A > 0$. Тогда $\|\varphi\psi\|_{\alpha,A} \leqslant A\|\varphi\|_{\alpha,A}\|\psi\|_{\alpha,A}$ для всех $\varphi, \psi \in G_\alpha(A)$. Кроме того, множество $I + \mathrm{Gev}_\alpha$ является группой относительно обычного произведения формальных степенных рядов.*

Доказательство. Заметим, что выражение

$$\|\varphi\psi\|_{\alpha,A} = \sum_{s=1}^{\infty} A^s (s!)^{-\alpha} |\sum_{k=0}^{s-1} \varphi_k \psi_{s-1-k}| \leqslant \sum_{k,l=0}^{\infty} |\varphi_k||\psi_l| A^{k+l+1} (k+l+1)!^{-\alpha}$$

не превосходит выражения

$$A\|\varphi\|_{\alpha,A}\|\psi\|_{\alpha,A} = \sum_{k,l=0}^{\infty} |\varphi_k||\psi_l| A^{k+l+1} (k!l!)^{-\alpha},$$

т.к. $(k+l+1)! \geqslant k!l!$. Этим доказана первая часть леммы, а также замкнутость множества $I + \mathrm{Gev}_\alpha$ относительно умножения. Осталось проверить, что $(I+\varphi)^{-1} \in I + \mathrm{Gev}_\alpha$ для любого $\varphi \in \mathrm{Gev}_\alpha$. Но если $\varphi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j z^{-j}$, то $(I+\varphi(z))^{-1} - I = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^{-j}$, где коэффициенты $\psi_1 = -\varphi_1$, $\psi_2 = -(\psi_1\varphi_1 + \varphi_2)$ и т.д. удовлетворяют неравенствам $|\psi_j| \leqslant \sum_{s=1}^{j-1} |\psi_{j-s}||\varphi_s| + |\varphi_j|$ при всех $j \geqslant 1$. Поскольку $s!^\alpha (j-s)!^\alpha \leqslant j!^\alpha$ для всех целых $s = 1, \ldots, j$, эти неравенства можно переписать в виде одного неравенства $2M(R) \leqslant M(R)L(R) + 1$ для формальных степенных рядов $L(R) := 1 + \sum_{s=1}^{\infty} (s!)^{-\alpha} |\varphi_s| R^s$ и $M(R) := 1 + \sum_{t=1}^{\infty} (t!)^{-\alpha} |\psi_t| R^t$. По условию ряд $L(R)$ сходится для всех достаточно малых $R > 0$, причем $L(0) = 1$. Но тогда ряд $M(R) \leqslant 1/(2 - L(R))$ тоже сходится для всех достаточно малых $R > 0$, что и требовалось. $\square$

Лемма 3. *Если $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2$, то $G_{\alpha_1}(A_1) \subset G_{\alpha_2}(A_2)$ для всех $A_1, A_2 > 0$. Если $A_1 > A_2$, то $G_\alpha(A_1) \subset G_\alpha(A_2)$ для всех $\alpha \geqslant 0$. Если $1 \leqslant m_1 < m_2$, то $E_{m_1}(B_1) \subset E_{m_2}(B_2)$ для всех $B_1, B_2 > 0$. Если $B_1 < B_2$, то $E_m(B_1) \subset E_m(B_2)$ для всех $m \geqslant 1$. Все эти вложения банаховых пространств непрерывны.*

Доказательство. Это вытекает непосредственно из определений. $\square$

Лемма 4. *Пусть функции* $E(z)=\sum_{p=0}^{\infty}c_pz^p$ *и* $F(z)=\sum_{q=0}^{\infty}d_qz^q$ *принадлежат* $E_m(B)$, *причем* $E(z)F(z)\equiv I$. *Тогда для всех* $\varphi\in G_{1/m}(A)$ *с* $A>2B$ *справедливо равенство* $\{\{\varphi E\}_-F\}_-=\varphi$.

Доказательство. Согласно формулам из доказательства леммы 1, коэффициент при $z^{-(k+1)}$ в степенном ряде $\{\{\varphi(z)E(z)\}_-F(z)\}_-$ равен

$$\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\varphi_{k+q+p}c_p\right)d_q=\sum_{r=0}^{\infty}\varphi_{k+r}\sum_{p+q=r}c_pd_q=\sum_{r=0}^{\infty}\varphi_{k+r}\delta_{0r}=\varphi_k.$$

Эти преобразования законны в силу абсолютной сходимости всех встречающихся здесь рядов, вытекающей из условия $A>2B$ по оценкам из леммы 1. $\square$

Лемма 5. *Пусть* $P(z)=\sum_{k=0}^{m}p_kz^k$ *есть полином степени не выше* m *с коэффициентами из* $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$. *Тогда функция* $e^{P(z)}$ *принадлежит* $E_m(B)$ *при любом* $B>(em|p_m|)^{1/m}$.

Доказательство. Для любого $\beta>|p_m|$ имеем $|P(z)|\leqslant\beta|z|^m$ при $|z|\geqslant R_0$. Поэтому из неравенств Коши вытекает, что коэффициенты ε_l разложения $e^{P(z)}=\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon_lz^l$ удовлетворяют $|\varepsilon_l|\leqslant R^{-l}\exp\{\beta R^m\}$ для всех $R\geqslant R_0$. Минимум правой части последнего неравенства как функции от R достигается при $R=(l/(m\beta))^{1/m}$, что $\geqslant R_0$ при $l\geqslant l_0$. Следовательно, при $l\geqslant l_0$ можно записать $|\varepsilon_l|\leqslant(em\beta/l)^{l/m}$. Пользуясь очевидным неравенством $l!\leqslant l^l$, получаем $|\varepsilon_l|\leqslant(l!)^{-1/m}B^l$ при любом $B\geqslant(em\beta)^{1/m}$, что и требовалось. $\square$

1.2. Разрешимость задачи Римана. Обобщим задачу Римана (I.2.14), заменив выражение $\gamma(x,t,z)$ из теоремы I.1 на $e^{P(\xi,z)}f^{-1}(z)$, где $P(\xi,z)$ есть любой $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значный полином от z, коэффициенты которого голоморфно зависят от параметра[2] $\xi\in\Omega$, а $f(z)$ есть произвольный ряд вида (1.2), принадлежащий такому классу Жеврея, что произведение $e^{P(\xi,z)}f^{-1}(z)$ задает корректно определенный формальный ряд Лорана по степеням z согласно леммам 1 и 2. Следующая теорема гласит, что это произведение можно записать с помощью множителей такого же типа, но взятых в обратном порядке (как в замечании I.3), при каждом значении ξ в некоторой окрестности любой точки

[2]В качестве пространства параметров Ω берется произвольное многообразие Штейна с $H^2(\Omega,\ )=0$, что создает гораздо больший запас общности, чем нам реально потребуется. Все нужные нам определения и факты о многообразиях Штейна можно найти в учебнике Б. В. Шабата [11]. Для наших целей достаточно считать, что Ω есть $\mathbb{C}$ или $\mathbb{C}^2$, а исчерпание, о котором говорится в теореме 1(B), состоит из кругов или бидисков. В этих случаях все условия теоремы 1, касающиеся $H^2(\cdot,\ )$, выполнены автоматически согласно теоремам 3 и 4 из [11], п. 49.

$\xi_0 \in \Omega$ такой, что $P(\xi_0, z) \equiv 0$. Утверждается также, что решение $\gamma_\pm(\xi, \cdot)$ поставленной задачи Римана голоморфно по ξ в этой окрестности. Если же f принадлежит любому строго меньшему классу Жеврея, чем выше, а многообразие Ω удовлетворяет топологическим условиям, гарантирующим разрешимость второй проблемы Кузена, то указанная запись возможна всюду вне некоторой (возможно, пустой) комплексной гиперповерхности в Ω, не проходящей через точку ξ_0, а решение $\gamma_\pm(\xi, \cdot)$ оказывается глобально мероморфным по $\xi \in \Omega$.

Теорема 1. (A) *Пусть даны комплексное многообразие Ω, целое число $m \geqslant 1$, голоморфные отображения $p_0, p_1, \ldots, p_m : \Omega \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ и точка $\xi_0 \in \Omega$ такие, что $p_k(\xi_0) = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, m$. Положим $P(\xi, z) := \sum_{k=0}^{m} p_k(\xi) z^k$ для всех $\xi \in \Omega$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда для любого ряда $f \in I + \mathrm{Gev}_{1/m}$ найдутся окрестность $\Omega(f)$ точки ξ_0 в Ω, числа $A, B > 0$ и голоморфные отображения $\gamma_- : \Omega(f) \to I + G_{1/m}(A)$ и $\gamma_+ : \Omega(f) \to E_m(B)$ такие, что при каждом $\xi \in \Omega(f)$ выполнено следующее равенство формальных рядов Лорана:*

$$e^{P(\xi,z)} f^{-1}(z) = \gamma_-^{-1}(\xi, z)\gamma_+(\xi, z) \tag{1.3}$$

и все значения целой функции $z \mapsto \gamma_+(\xi, z)$ принадлежат группе $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ всех обратимых комплексных $n \times n$-матриц и удовлетворяют равенству

$$\det \gamma_+(\xi, z) = e^{\operatorname{tr} P(\xi,z)} \quad \text{для всех} \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1.4}$$

(B) *Если в условиях утверждения* (A) *имеем $f \in I + \mathrm{Gev}_{(1/m)-0}$, а Ω является многообразием Штейна с $H^2(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$, то существует не обращающаяся в нуль в точке ξ_0 глобальная голоморфная функция $\tau_f \in \mathcal{O}(\Omega)$ со следующими свойствами.*

Во-первых, при любом $A > 0$ отображения $\xi \mapsto \tau_f(\xi)(\gamma_-(\xi, z) - I)$ и $\xi \mapsto \tau_f(\xi)(\gamma_-^{-1}(\xi, z) - I)$ аналитически продолжаются до глобальных голоморфных отображений $\Omega \to G_{1/m}(A)$.

Во-вторых, для любого исчерпания $\xi_0 = K_0 \subset K_1 \subset \ldots$ многообразия Ω голоморфно выпуклыми компактами $K_j \subset \operatorname{int} K_{j+1}$ с $H^2(\operatorname{int} K_j, \mathbb{Z}) = 0$ найдется последовательность чисел $B_j > 0$ такая, что отображения $\xi \mapsto \tau_f(\xi)\gamma_+(\xi, z)$ и $\xi \mapsto \tau_f(\xi)\gamma_+^{-1}(\xi, z)$ продолжаются при каждом $j = 1, 2, \ldots$ до голоморфных отображений $\operatorname{int} K_j \to E_m(B_j)$.

В-третьих, равенства (1.3) *и* (1.4) *выполняется для всех $\xi \in \Omega$ с $\tau_f(\xi) \neq 0$.*

Доказательство. (A) Положим $\varphi_0(z) := f^{-1}(z) - I$. По условию и лемме 2 имеем $\varphi_0 \in G_\alpha(A_0)$ для некоторых $\alpha \in [0, 1/m]$ и $A_0 > 0$. (Случай $\alpha < 1/m$

пригодится нам в доказательстве утверждения (B).) С другой стороны, так как $P(\xi_0, z) \equiv 0$, то по лемме 5 для любого $B > 0$ найдется окрестность $U_B \subset \Omega$ точки ξ_0 такая, что целая функция $e^{P(\xi,z)}$ принадлежит $E_m(B)$ при всех $\xi \in U_B$. Выбирая $0 < B < A_0$, получаем по лемме 1, что степенные ряды $\{e^P f^{-1}\}_- = \{e^P \varphi_0\}_- \in G_\alpha(A_0 - B)$ и $\{e^P f^{-1}\}_+ \in E_m(B)$ корректно определены при всех $\xi \in U_B$.

Фиксируем одно из таких значений ξ и будем искать решение $\gamma_-(\xi, z)$ уравнения (7) в виде $\gamma_- = I + \varphi \in I + G_\alpha(A_1)$ для некоторого пока не определенного $A_1 > 0$. Соответствующее условие на φ состоит в том, что

$$\big\{(I + \varphi)e^P f^{-1}\big\}_- = 0. \tag{1.5}$$

Это условие имеет вид системы линейных уравнений $(MT_P + K_P)\varphi = v_P$ с вектором $v_P := -\{e^P \varphi_0\}_- \in G_\alpha(A_0 - B)$ в правой части и операторами

$$M\varphi := \varphi f^{-1}, \quad T_P\varphi := \{\varphi e^P\}_-, \quad K_P\varphi := \{\{\varphi e^P\}_+ \varphi_0\}_-$$

в левой части. Оператор $M : G_\alpha(A) \to G_\alpha(A)$ непрерывен и обратим для любого положительного $A \leqslant A_0$ (см. лемму 2), причем обратный оператор есть $M^{-1}\varphi = \varphi f$. Оператор $T_P : G_\alpha(A) \to G_\alpha(A - B)$ непрерывен (по лемме 1) и "почти обратим" (по лемме 4) в том смысле, что $T_P T_{-P}\varphi = T_{-P} T_P \varphi = \varphi$ для всех $\varphi \in G_\alpha(A)$ с $A > 2B$. Поэтому для нахождения нужного нам решения φ соотношения (1.5) достаточно установить существование такого $\varphi \in G_\alpha(A_1)$, что

$$(I + T_{-P} M^{-1} K_P)\varphi = T_{-P} M^{-1} v_P. \tag{1.6}$$

Следующая лемма показывает, что оператор K_P может непрерывно отображать $G_\alpha(A_1)$ в $G_\alpha(A_2)$ для $A_2 > A_1$. Это позволяет рассматривать левую часть (1.6) как непрерывный линейный оператор, действующий из некоторого банахова пространства в себя, и изучать обратимость этого оператора.

Лемма 6. *Если $2^\alpha B < A_1 < A_0$ и $0 < 2^{1+\alpha} A_2 < A_0$, то K_P является непрерывным и даже компактным линейным оператором из $G_\alpha(A_1)$ в $G_\alpha(A_2)$. При $0 \leqslant \alpha < 1/m$ это утверждение остается верным, если заменить неравенства $2^\alpha B < A_1 < A_0$ на более слабое условие $0 < A_1 < A_0$.*

Доказательство. Для компактности оператора $K : l_1 \to l_1$, имеющего в стандартном базисе $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ матрицу $(K_{pq})_{p,q=0}^\infty$ (т.е. такого, что равенство $Kx = y$ для финитных векторов $x = \sum_{q=0}^\infty x_q e_q$ и $y = \sum_{p=0}^\infty y_p e_p$

эквивалентно системе $y_p = \sum_{q=0}^{\infty} K_{pq}x_q$) достаточно, чтобы было выполнено неравенство $\sum_{p,q=0}^{\infty} |K_{pq}| < \infty$. (Действительно, в этом случае известная формула

$$\|X\| = \sup_{q\geqslant 0} \|Xe_q\| = \sup_{q\geqslant 0} \sum_{p=0}^{\infty} |X_{pq}|$$

для нормы оператора $X \in \mathcal{B}(l_1)$ показывает, что $K = \lim_{j\to\infty} \pi_j K$ является пределом конечномерных операторов по указанной норме, где $\pi_j \in \mathcal{B}(l_1)$ есть проектор на $\langle e_0, e_1, \ldots, e_j\rangle$.) Проверим, что это неравенство выполняется для оператора $K := i_2 K_P i_1^{-1}$, где через $i_s : G_\alpha(A_s) \to l_1$ для $s = 1, 2$ обозначены стандартные диагональные изометрии

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k}{z^{k+1}} \overset{i_s}{\longmapsto} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_s^k}{k!^\alpha}\varphi_k e_k.$$

Записывая $e^{P(\xi,z)} = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l z^l$ и $\varphi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^0 z^{-(k+1)}$, получаем для матричных элементов оператора K формулу

$$K_{pq} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_2^p}{p!^\alpha} \frac{q!^\alpha}{A_1^q} \varepsilon_{q+r+1}\varphi_{p+r}^0. \tag{1.7}$$

По условию имеем $|\varepsilon_l| \leqslant C_1(l!)^{-1/m}B^l$ и $|\varphi_k^0| \leqslant C_2(k!)^\alpha (A_0)^{-k}$ для некоторых констант $C_1, C_2 > 0$. Кроме того, очевидные неравенства $1 \leqslant C_{p+q+r}^q$ и $C_{p+q+r}^p \leqslant 2^{p+q+r}$ для биномиальных коэффициентов дают

$$\frac{q!^\alpha (p+r)!^\alpha}{p!^\alpha (q+r+1)!^{1/m}} = \frac{(q+r+1)^{-1/m}}{(q+r)!^{(1/m)-\alpha}} \left(\frac{C_{p+q+r}^p}{C_{p+q+r}^q}\right)^\alpha \leqslant \frac{2^{(p+q+r)\alpha}}{(q+r)!^{(1/m)-\alpha}}.$$

Пользуясь всеми этими оценками, получаем

$$\frac{1}{C_1C_2} \sum_{p,q=0}^{\infty} |K_{pq}| \leqslant \sum_{p,q,r=0}^{\infty} \frac{A_2^p B^{q+r+1} 2^{(p+q+r)\alpha}}{A_1^q A_0^{p+r} (q+r)!^{(1/m)-\alpha}} =$$

$$= \sum_{p,q,r=0}^{\infty} \left(\frac{2^\alpha A_2}{A_0}\right)^p \left(\frac{2^\alpha B}{A_1}\right)^{q+r} \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^r \frac{B}{(q+r)!^{(1/m)-\alpha}}.$$

Обозначим число $\frac{2^\alpha B}{A_1}$ через R. Тогда неравенства из условия леммы показывают, что последний ряд не превосходит

$$\sum_{p,q,r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{BR^{q+r}}{(q+r)!^{(1/m)-\alpha}} = \sum_{q,r=0}^{\infty} \frac{2BR^{q+r}}{(q+r)!^{(1/m)-\alpha}} = 2B\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+1)R^s}{s!^{(1/m)-\alpha}}.$$

Если $\alpha = 1/m$, то этот ряд сходится при $0 < R < 1$. Если же $\alpha < 1/m$, то он сходится при всех $R > 0$. Лемма 6 доказана. $\square$

Лемма 7. *В условиях леммы* 6 *операторы* K_P, T_P *и вектор* v_P *являются голоморфными в некоторой окрестности* $U \subset U_B$ *точки* ξ_0 *функциями от* ξ *со значениями в банаховых пространствах*

$$\mathcal{B}(G_\alpha(A_1), G_\alpha(A_2)), \quad \mathcal{B}(G_\alpha(A_2), G_\alpha(A_2 - B)) \quad \text{и} \quad G_\alpha(A_0 - 2B)$$

соответственно.

Доказательство. Выберем окрестность $U \subset U_B$ точки ξ_0 так, что все функции $p_0, p_1, \ldots, p_m : \Omega \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ ограничены в U и выполнено неравенство $\sup_{\xi \in U} (em|p_m(\xi)|)^{1/m} < B/2$. (Такая окрестность существует, поскольку $p_m(\xi_0) = 0$.) Тогда для коэффициентов $\varepsilon_l(\xi)$ разложения $e^{P(\xi,z)} = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l(\xi) z^l$ имеем согласно доказательству леммы 5 оценку $|\varepsilon_l(\xi)| \leqslant (l!)^{-1/m} (B/2)^l$ для всех $\xi \in U$ и $l \geqslant l_0(\xi)$, причем в силу ограниченности всех $p_k(\xi)$ число $l_0(\xi)$ может быть выбрано одним и тем же для всех $\xi \in U$. Отсюда получаем, что $\| \sum_{l=l_1}^{\infty} \varepsilon_l(\xi) z^l \|_{m,B} = \sup_{l \geqslant l_1} |\varepsilon_l(\xi)| (l!)^{1/m} B^{-l} \leqslant (1/2)^{l_1}$ при $l_1 \geqslant l_0$. Таким образом, ряд $\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l(\xi) z^l$ сходится к $e^{P(\xi,z)}$ равномерно на U по норме пространства $E_m(B)$. Подставляя этот ряд в определения T_P и v_P и пользуясь оценками билинейных форм из леммы 1, получаем представление T_P и v_P в виде равномерного на U предела частичных сумм по норме соответствующих пространств. Эти частичные суммы голоморфны на U, т.к. они являются конечными линейными комбинациями фиксированных элементов со скалярными коэффициентами, голоморфно зависящими от $\xi \in U$. Поэтому их предел голоморфен на U по теореме Вейерштрасса. Этим утверждение леммы доказано для случаев T_P и v_P.

Рассмотрим случай K_P. Из доказательства леммы 6 видно, что K_P есть равномерный на U предел по норме пространства $\mathcal{B}(G_\alpha(A_1), G_\alpha(A_2))$ частичных сумм двойного ряда из конечномерных операторов. Каждый из этих операторов имеет матрицу с единственным ненулевым элементом K_{pq} для некоторых p, q. Пользуясь формулой (1.7) и первой частью доказательства настоящей леммы, получаем, что каждый из этих операторов голоморфно зависит от $\xi \in U$. Отсюда по теореме Вейерштрасса вытекает голоморфность оператора K_P на U относительно указанной нормы. Лемма 7 доказана. □

Обозначим левую часть равенства (1.6) через $X(\xi)\varphi$, а правую — через $u(\xi)$. Пусть числа B, A_1, A_2 выбраны так, что $0 < 2B < A_1 \leqslant A_2 - B$ и $4A_2 < A_0$ (например, можно положить $B = A_0/16$, $A_1 = 5A_0/32$ и $A_2 = 7A_0/32$). Тогда из леммы 6 и сказанного перед (1.6) вытекает, что при всех $\xi \in U$ оператор $X(\xi)$ есть непрерывный линейный оператор на банаховом пространстве

$G_\alpha(A_1)$, а $u(\xi)$ является вектором из этого пространства. Так как оператор $X(\xi)$ непрерывен по ξ (лемма 7) и обратим при $\xi = \xi_0$ (будучи тождественным), то он обратим при всех ξ в некоторой (содержащейся в U) окрестности точки ξ_0. Обозначим эту окрестность через $\Omega(f)$. Тогда при каждом $\xi \in \Omega(f)$ уравнение (1.6) имеет единственное решение $\varphi = X(\xi)^{-1}u(\xi) \in G_\alpha(A_1)$. По лемме 7 это решение задает голоморфное отображение $\varphi : \Omega(f) \to G_\alpha(A_1)$. Положим $\gamma_- := I + \varphi$ и $\gamma_+ := \gamma_- e^P f^{-1}$. Тогда при каждом $\xi \in \Omega(f)$ выполнено равенство (1.3), причем формальный ряд

$$\gamma_+ = \{(I+\varphi)e^P(I+\varphi_0)\}_+ = \{\varphi e^P\}_+ + \{e^P\varphi_0\}_+ + \{\varphi e^P\varphi_0\}_+ = \\ = \{\varphi e^P\}_+ + \{e^P\varphi_0\}_+ + \{\{\varphi e^P\}_+\varphi_0\}_+$$

принадлежит пространству $E_m(B)$ по лемме 1. В доказательстве леммы 7 мы видели, что $\xi \mapsto e^{P(\xi,\cdot)}$ есть голоморфное отображение из $\Omega(f)$ в $E_m(B)$. Пользуясь этим фактом, а также оценками билинейных форм из леммы 1 и установленной выше голоморфностью отображения $\varphi : \Omega(f) \to G_\alpha(A_1)$, получаем, что отображение $\gamma_+ : \Omega(f) \to E_m(B)$ голоморфно.

Чтобы установить равенство (1.4), заметим, что для всех $\beta \in I + G_\alpha(A)$, т.е. для $n \times n$-матриц, элементы которых суть формальные степенные ряды от z^{-1} с коэффициентами из $\mathbb{C}$, можно обычным образом корректно определить $\det\beta$ как формальный степенной ряд такого же вида (со свободным членом 1). При этом в (1.3) можно перейти к определителям по обычным правилам. Получаем равенство $\det e^{P(\xi,z)}(\det f(z))^{-1} = \det\gamma_+(\xi,z)(\det\gamma_-(\xi,z))^{-1}$ скалярных формальных рядов Лорана от z и z^{-1}. Поскольку скаляры коммутируют, это равенство можно переписать в виде $\det\gamma_-(\xi,z)(\det f(z))^{-1} = \det\gamma_+(\xi,z)(\det e^{P(\xi,z)})^{-1}$, где справа стоит степенной ряд от z, а слева — от z^{-1} со свободным членом 1. Значит, обе части тождественно равны 1. В частности, при каждом $\xi \in \Omega(f)$ имеем равенство

$$\det\gamma_+(\xi,z) = \det e^{P(\xi,z)}$$

формальных степенных рядов от z. Так как обе его части — целые функции от z, то оно выполнено и для всех $z \in \mathbb{C}$. Этим доказано равенство (1.4), из которого вытекает обратимость матрицы $\gamma_+(\xi,z)$ при всех $\xi \in \Omega(f)$, $z \in \mathbb{C}$. Доказательство утверждения (A) теоремы 1 закончено.

(B) Доказательство утверждения (B) использует ту же схему рассуждений, что и выше, но к ней добавляется следующая лемма о глобальной мероморфности семейства операторов, обратных к элементам голоморфного семейст-

ва фредгольмовых операторов индекса 0. Эта лемма (принадлежащая, повидимому, И. Ц. Гохбергу [41]) передоказывалась и использовалась многими авторами с разной степенью общности, иногда под названиями "мероморфная теорема Фредгольма" или "аналитическая альтернатива Фредгольма" (см., например, монографии [28], стр. 464–465, [42], стр. 384–386, [43], стр. 123, 367, [44], стр. 64, 402; во всех четырех случаях ссылки на литературу совершенно различны).

Лемма 8. *Пусть Ω есть многообразие Штейна с условием $H^2(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$ и пусть $Y : \Omega \to \mathcal{B}(E)$ есть голоморфное отображение из Ω в пространство линейных непрерывных операторов на банаховом пространстве E, причем операторы $Y(\xi)$ компактны для всех $\xi \in \Omega$ и оператор $I + Y(\xi_0)$ обратим для некоторой точки $\xi_0 \in \Omega$. Тогда найдется голоморфная функция $\tau \in \mathcal{O}(\Omega)$ с $\tau(\xi_0) = 1$ такая, что*

(i) *$I + Y(\xi)$ обратим для тех и только тех $\xi \in \Omega$, для которых $\tau(\xi) \neq 0$;*

(ii) *$\tau(\xi)(I + Y(\xi))^{-1}$ есть голоморфное отображение $\Omega \to \mathcal{B}(E)$.*

Доказательство. Положим $X(\xi) = I + Y(\xi)$ и обозначим через Z множество всех тех значений $\xi_1 \in \Omega$, для которых оператор $X(\xi_1)$ не обратим, т.е. $0 \in \operatorname{sp} X(\xi_1)$. Из свойств спектра компактного оператора ясно, что 0 является изолированным собственным значением конечной кратности для оператора $X(\xi_1)$. Если P — соответствующий спектральный проектор, то пространство $\operatorname{im} P \supset \ker X(\xi_1)$ конечномерно и оператор $X(\xi_1)$ имеет блочно-диагональный вид относительно разложения $E = \operatorname{im} P \oplus \ker P$:

$$X(\xi_1) = \operatorname{diag}(A_0, A_1) = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

где оператор A_1 обратим и $\operatorname{sp} A_0 = \{0\}$ (см. [28], п. III.6.5). Поэтому при любом фиксированном $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ оператор $X(\xi_1) - \mu P = \operatorname{diag}(A_0 - \mu I, A_1)$ обратим на E и, следовательно, $X(\xi) - \mu P$ обратим для всех ξ из некоторой окрестности $U \subset \Omega$ точки ξ_1. Имеем $X(\xi) = (X(\xi) - \mu P)(I + (X(\xi) - \mu P)^{-1}\mu P)$, где оператор $(X(\xi) - \mu P)^{-1}\mu P$ конечномерен и голоморфно зависит от $\xi \in U$. Поэтому оператор $X(\xi)$ обратим для тех и только тех значений $\xi \in U$, для которых $\tau_U(\xi) \neq 0$, где $\tau_U(\xi) = \det(I + (X(\xi) - \mu P)^{-1}\mu P)$ есть голоморфная функция на U, определяемая как в [28], п. III.4.3. Если $\tau_U(\xi) \equiv 0$ в U, то множество тех точек $\xi \in \Omega$, в окрестности которых $X(\xi)$ не обратим, оказывается непустым, открытым и замкнутым, т.е. совпадает со всем Ω вопреки условию обратимости $X(\xi_0)$. Поэтому $\tau_U(\xi) \not\equiv 0$ в U. Заметим, что $\xi \mapsto \tau_U(\xi)X(\xi)^{-1}$

есть голоморфное отображение $U \to \mathcal{B}(E)$. Далее, если окрестности U_1, U_2 точек $\xi_1, \xi_2 \in Z$ имеют непустое пересечение, то отношение τ_{U_1}/τ_{U_2} голоморфно и отлично от нуля всюду на $U_1 \cap U_2$. В силу классических результатов о разрешимости второй проблемы Кузена (см. например [11], гл. IV, § 16, п. 40, теорема 3) найдется функция $\tau \in \mathcal{O}(\Omega)$ такая, что $\tau(\xi_0) = 1$ и отношение τ_U/τ голоморфно и отлично от нуля всюду на U для всех $\xi_1 \in Z$. $\square$

Допустим теперь, что $0 \leqslant \alpha < 1/m$. Тогда можно считать, что $\varphi_0 \in G_\alpha(A_0)$ для всех $A_0 > 0$ (иначе заменим α на любое α_1 с $\alpha < \alpha_1 < 1/m$ и воспользуемся леммой 3). Пусть даны произвольные числа $A > 0$ и $j = 1, 2, \ldots$. Положим $B_j := 1 + \sup_{\xi \in K_j}(em|p_m(\xi)|)^{1/m}$, $A_1 := A$, $A_2 := A + B$ и $A_0 := A + 2B$. Рассуждая как в доказательстве леммы 7, мы видим, что семейство операторов $Y(\xi) := T_{-P(\xi,\cdot)} M^{-1} K_{P(\xi,\cdot)}$ удовлетворяет условиям леммы 8 с $\Omega = \operatorname{int} K_j$, $E = G_\alpha(A)$. Обозначим через τ_j функцию из заключения леммы 8. Тогда решение

$$\gamma_-(\xi,\cdot) = I + \left(I + T_{-P(\xi,\cdot)} M^{-1} K_{P(\xi,\cdot)}\right)^{-1} T_{-P(\xi,\cdot)} M^{-1} v_{P(\xi,\cdot)},$$
$$\gamma_+(\xi, z) = \gamma_-(\xi, z) e^{P(\xi,z)} f^{-1}(z)$$

задачи Римана (1.3) определено при всех $\xi \in \operatorname{int} K_j$, для которых $\tau_j(\xi) \neq 0$, а отображения $\gamma_- - I : \operatorname{int} K_j \to G_\alpha(A)$, $\gamma_+ : \operatorname{int} K_j \to E_m(B_j)$ являются мероморфными на $\operatorname{int} K_j$ со знаменателем $\tau_j(\xi)$. Как в конце доказательства леммы 8, мы можем решить вторую проблему Кузена для голоморфных функций τ_j на открытых множествах $\operatorname{int} K_j$, $j = 1, 2, \ldots$, образующих покрытие многообразия Ω. Получим такую функцию $\tau \in \mathcal{O}(\Omega)$, что τ_j/τ есть голоморфная функция без нулей на $\operatorname{int} K_j$ для любого $j = 1, 2, \ldots$. Этим доказательство теоремы 1 закончено. $\square$

1.3. Свойства обратного преобразования рассеяния. Зафиксируем произвольную диагональную матрицу $a \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ с простым спектром и для каждого формального степенного ряда $\varphi \in \mathrm{Gev}_1$ рассмотрим задачу Римана (1.3) с $P(\xi, z) = a\xi z$ и $f(z) = I + \varphi(z)$. Условия теоремы 1(A) выполнены при $m = 1$, $\Omega = \mathbb{C}$, $\xi_0 = 0$. Для лучшего согласования с обозначениями теоремы I.1 будем считать, что $\Omega = \mathbb{C}^1_x$ и $\xi = x - x_0$, где $x_0 \in \mathbb{C}$ — произвольная точка. Тогда теорема 1(A) гласит, что решение $\gamma_\pm(x, z)$ задачи Римана

$$e^{a(x-x_0)z} f^{-1}(z) = \gamma_-^{-1}(x, z)\gamma_+(x, z) \tag{1.8}$$

существует при всех x, достаточно близких к x_0 (а именно, при $x - x_0 \in \Omega(f)$)

и голоморфно зависит от x. В частности, все коэффициенты $g_k(x)$ в записи

$$\gamma_-(x,z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k(x)}{z^{k+1}}$$

принадлежат $\mathcal{R}(x_0)$. Определим отображение $B : \mathrm{Gev}_1 \to \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ следующей формулой, по существу совпадающей с первым равенством (1.1):

$$B\varphi(x) := [g_0(x), a] \quad \text{при} \quad x - x_0 \in \Omega(f). \tag{1.9}$$

Обозначение $B\varphi$ для этого матричнозначного внедиагонального ростка в точке x_0 выбрано в честь преобразования Бореля (I.2.21), с которым росток (1.9) почти совпадает в случае верхнетреугольного $\mathrm{gl}(2,\mathbb{C})$-значного сходящегося ряда $\varphi \in \mathrm{Gev}_0$ (см. (I.2.23)).

Лемма 9. *Положим $q(x) := B\varphi(x)$. Тогда заданные равенством* (1.8) *ростки $\gamma_\pm(x,z)$ в точке x_0 голоморфных отображений в банаховы пространства $G_1(A_0)$ и $E_1(B_0)$ (для надлежащих констант $A_0 > 4B_0 > 0$) удовлетворяют дифференциальным уравнениям*

$$\partial_x\gamma_+ = (az + q(x))\gamma_+, \qquad \partial_x\gamma_- = (az + q(x))\gamma_- - \gamma_- az \tag{1.10}$$

с начальными условиями $\gamma_+(x_0,z) = I$, $\gamma_-(x_0,z) = f(z)$.

Доказательство. Запишем равенство (1.8) в виде

$$\gamma_-(x,z)e^{a(x-x_0)z}f^{-1}(z) = \gamma_+(x,z)$$

и продифференцируем по x, следуя обычным правилам (которые применимы, т.к. обе части равенства являются голоморфными функциями от x со значениями в банаховом пространстве $G_1(A_0 - 2B_0) \oplus E_1(B_0)$, а все операции умножения суть непрерывные билинейные формы по лемме 1). Получим, что $\partial_x\gamma_+ = (\partial_x\gamma_- + \gamma_- az)e^{a(x-x_0)z}f^{-1}(z)$. Умножая справа на γ_+^{-1} (здесь важна обратимость γ_+, вытекающая из (1.4)), имеем $(\partial_x\gamma_+)\gamma_+^{-1} = (\partial_x\gamma_-)\gamma_-^{-1} + \gamma_- az\gamma_-^{-1}$. Приравнивая друг другу проекции левой и правой частей последнего равенства на $G_1(A_0 - 3B_0) \oplus \{0\}$ (т.е. отделяя отрицательные степени z) и на $\{0\} \oplus E_1(B_0)$ (т.е. отделяя неотрицательные степени z), получаем

$$(\partial_x\gamma_+)\gamma_+^{-1} = \{\gamma_- az\gamma_-^{-1}\}_+, \qquad 0 = (\partial_x\gamma_-)\gamma_-^{-1} + \{\gamma_- az\gamma_-^{-1}\}_-.$$

Но из определения (1.9) и прямого вычисления вытекает, что $\{\gamma_- az\gamma_-^{-1}\}_+ = az + B\varphi(x)$ и, тем самым, $\{\gamma_- az\gamma_-^{-1}\}_- = \gamma_- az\gamma_-^{-1} - az - B\varphi(x)$. Поэтому последние равенства принимают вид (1.10).

Чтобы установить начальные условия, заметим, что при $x = x_0$ равенство (1.8) можно записать в виде $\gamma_-(x_0, z)f^{-1}(z) = \gamma_+(x_0, z)$, где левая часть принадлежит $I + G_1(A_0)$ (т.е. содержит только неположительные степени z), а правая часть принадлежит $E_1(B_0)$ (т.е. содержит только неотрицательные степени z) и потому обе части равны коэффициенту при z^0, т.е. обе равны I. $\square$

Замечание 1. Первое равенство (1.10) совпадает со вторым уравнением (1.1) и на него можно смотреть как на альтернативное определение ростка $B\varphi$ в терминах только положительной компоненты $\gamma_+(x, z)$ решения задачи Римана (1.8). С геометрической точки зрения это равенство означает, что матрица $\gamma_+(x, z)$ задает поле реперов (в слоях тривиального векторного расслоения над окрестностью точки x_0 в $\mathbb{C}$), параллельное относительно плоской связности $U(x, z) = az+q(x)$ (см. первое уравнение (I.1.2)). Второе равенство (1.10) означает, что $\gamma_-(x, z)$ есть калибровочное преобразование связности $U_0(x, z) = az$ в связность $U_1(x, z) = az + q(x)$. Иными словами, функция $\theta(x, z) := \gamma_-(x, z)$ удовлетворяет первому равенству (I.1.9) для этих U_0, U_1 вместе с нормировочным условием $\theta(x, \infty) \equiv I$. Именно последняя интерпретация позволит нам в следующем параграфе указать способ восстановления любого внедиагонального ряда $\varphi \in \mathrm{Gev}_1$ по порожденному им ростку $B\varphi \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$.

2. Прямое преобразование рассеяния

Фиксируем точку $x_0 \in \mathbb{C}$ и диагональную матрицу $a \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ с простым спектром и назовем *локальными данными рассеяния* любого внедиагонального голоморфного ростка $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ формальный степенной ряд

$$Lq(z) := \mu(x_0, z) - I, \tag{2.1}$$

где $\mu(x, z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} m_k(x)z^{-(k+1)}$ есть единственное решение дифференциального уравнения $\mu_x = (az + q(x))\mu - \mu az$ (см. второе уравнение (1.10)) в классе формальных степенных рядов указанного вида с $m_k \in \mathcal{R}(x_0)$ для всех $k \geqslant 0$ такое, что ряд $\mu(x_0, z) - I$ внедиагонален (существование и единственность такого решения будут установлены в следствии из леммы 10 ниже). Обозначение Lq выбрано в честь преобразования Лапласа (I.2.20), к которому преобразование $q \mapsto Lq$ сводится в случае верхнетреугольных $\mathrm{gl}(2, \mathbb{C})$-значных

потенциалов $q(x)$, являющихся целыми функциями экспоненциального типа (см. лемму I.6(B)).

Следующая теорема утверждает, что внедиагональные голоморфные ростки $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ взаимно-однозначно кодируются своими данными рассеяния Lq, которые при этом могут быть *любыми* внедиагональными формальными рядами *класса Жеврея* 1. При этом ряд $Lq(z)$ не принадлежит никакому строго меньшему классу Жеврея, если не считать случаев, когда росток $q(x)$ допускает аналитическое продолжение до такой глобально мероморфной внедиагональной $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значной функции на всей плоскости $\mathbb{C}^1_x$ переменного x, что ни при каком $z \in \mathbb{C}$ ни одно решение вспомогательной линейной системы $E_x = (az + q(x))E$ (первое уравнение (I.1.2) с учетом первой формулы (I.2.7)) не имеет ветвления вокруг полюсов функции $q(x)$.

Теорема 2. (A) *Отображение $q \mapsto Lq$ есть биекция множества $\mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ на множество $\mathrm{Gev}_1^{\mathrm{od}}$ всех внедигональных рядов из Gev_1. Обратным отображением является сужение на $\mathrm{Gev}_1^{\mathrm{od}}$ отображения $B : \mathrm{Gev}_1 \to \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$, определенного в* (1.9).

(B) *Если $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ и $Lq \in \mathrm{Gev}_{1-0}$, то росток $q(x)$ аналитически продолжается до глобально мероморфной внедиагональной $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значной функции на $\mathbb{C}^1_x$, обладающей следующим свойством тривиальной монодромии во всех свох полюсах: при каждом $z \in \mathbb{C}$ вспомогательная линейная система $E_x = (az + q(x))E$ имеет глобально мероморфную фундаментальную систему решений или, эквивалентно, всякое голоморфное решение $u : D \to \mathbb{C}^n$ системы $u_x = (az + q(x))u$ на какой-либо области $D \subset \mathbb{C}^1_x$ аналитически продолжается до мероморфного решения на всем $\mathbb{C}^1_x$.*

Прежде чем доказывать теорему 2, проверим корректность определения формального степенного ряда $Lq(z)$. Для этого рассмотрим калибровочные преобразования формальных плоских связностей. Под *связностью* будем понимать любой формальный ряд Лорана вида $U(x,z) = az + \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)z^{-k}$, где $u_k \in \mathcal{R}(x_0)$ для всех $k \geqslant 0$. Группа *калибровочных преобразований* состоит из формальных степенных рядов вида $\Phi(x,z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)z^{-(k+1)}$, где $\varphi_k \in \mathcal{R}(x_0)$ для всех $k \geqslant 0$. Групповой операцией является обычное умножение формальных степенных рядов. По определению, действие элемента Φ переводит связность U в связность $V := \Phi_x\Phi^{-1} + \Phi U\Phi^{-1}$. Можно еще сформулировать это определение в виде дифференциального уравнения $\Phi_x = V\Phi - \Phi U$ или равенства $\partial_x - V = \Phi(\partial_x - U)\Phi^{-1}$ дифференциальных операторов первого порядка. Из последнего равенства легко вывести групповое свойство: если Φ

переводит U в V, а Ψ переводит V в W, то действие ряда $\Psi\Phi$ переводит U в W, а действие обратного ряда Φ^{-1} переводит V в U.

Можно рассматривать калибровочное преобразование как замену неизвестной функции в уравнении $(\partial_x - U)\xi = 0$. Переход от неизвестной функции ξ к $\eta = \Phi\xi$ переводит решения системы $(\partial_x - U)\xi = 0$ в решения системы $(\partial_x - V)\eta = 0$, т.к. $(\partial_x - V)\eta = \Phi(\partial_x - U)\xi$ для всех векторнозначных функций ξ. Поскольку система $(\partial_x - U_0)\xi = 0$ с диагональной матрицей U_0 может быть решена в явном виде, естественно найти те калибровочные преобразования, с помощью которых данная связность U получается из некоторой диагональной связности U_0. Следующая лемма описывает все такие преобразования для случая, когда $U = az + q(x)$ с $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$. Напомним, что через X_d обозначается диагональная часть матрицы $X \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ (т.е. имеем $(X_d)_{jk} = \delta_{jk} X_{jk}$ для всех $j, k = 1, \dots, n$), а через $X_{od} := X - X_d$ обозначается внедиагональная часть.

Лемма 10. *Пусть $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$. Тогда для любого набора диагональных ростков $\varkappa_j \in \mathcal{R}(x_0)$ $(j = 1, 2, \dots)$ и любого набора диагональных матриц $C_j \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ $(j = 1, 2, \dots)$ существует единственный формальный степенной ряд вида $\Phi(x, z) = I + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) z^{-j}$ с $\varphi_j \in \mathcal{R}(x_0)$ $(j = 1, 2, \dots)$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению*

$$\partial_x \Phi(x, z) = (az + q(x))\Phi(x, z) - \Phi(x, z)\left(az + \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k(x) z^{-k}\right) \tag{2.2}$$

и нормировочному условию $\{\varphi_j(x_0)\}_d = C_j$ при $j = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Сравнение коэффициентов при степенях z в левой и правой частях уравнения (2.2) дает равенства $0 = [a, \varphi_1] + q$ (при z^0) и $\varphi_j' = [a, \varphi_{j+1}] + q\varphi_j - \sum_{k=1}^{j-1} \varphi_k \varkappa_{j-k} - \varkappa_j$ (при z^{-j}, $j \geqslant 1$). Полагая $D_j := (\varphi_j)_d$ и $N_j := (\varphi_j)_{od}$, запишем эти равенства в виде

$$0 = [a, N_1] + q, \tag{2.3^0_{od}}$$

$$D_j' = (qN_j)_d - \sum_{k=1}^{j-1} D_k \varkappa_{j-k} - \varkappa_j, \tag{2.3^j_d}$$

$$N_j' = [a, N_{j+1}] + qD_j + (qN_j)_{od} - \sum_{k=1}^{j-1} N_k \varkappa_{j-k}. \tag{2.3^j_{od}}$$

Заметим, что линейный оператор $\mathcal{A}X := [a, X]$ обратим на векторном пространстве всех внедиагональных матриц $X \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$. Это позволяет нам последовательно найти (т.е. выразить через q, $\varkappa_j$ и C_j) ростки $N_1(x) = -\mathcal{A}^{-1} q(x)$

из (2.3^0_{od}), $D_1(x) = C_1 + \int_{x_0}^x ((q(s)N_1(s))_d - \varkappa_1(s))\,ds$ из (2.3^1_d), $N_2 = \mathcal{A}^{-1}(N_1' - qD_1 - (qN_1)_{od})$ из (2.3^1_{od}), D_2 из (2.3^2_d), N_3 из (2.3^2_{od}) и т.д. $\square$

Следствие. *Для любого $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ уравнение $\mu_x = (az+q(x))\mu - \mu az$ имеет единственное решение вида $\mu(x,z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} m_k(x) z^{-(k+1)}$ с $m_k \in \mathcal{R}(x_0)$ для всех $k \geqslant 0$ такое, что ряд $\mu(x_0,z) - I$ внедиагонален. Тем самым, формула* (2.1) *сопоставляет каждому ростку $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ корректно определенный формальный внедиагональный степенной ряд $Lq(z)$.*

Доказательство. Получается применением леммы 10 с $\varkappa_j \equiv 0$ и $C_j = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots$. $\square$

Лемма 11. *Всякое калибровочное преобразование тривиальной (или "нулевой") связности $U_0(x,z) \equiv az$ в себя диагонально и не зависит от x.*

Доказательство. Уравнения (2.3) с $q \equiv 0$ и $\varkappa_j \equiv 0$ принимают вид

$$0 = [a, N_1], \qquad D_j' = 0, \qquad N_j' = [a, N_{j+1}].$$

Отсюда в силу обратимости оператора $\mathcal{A}X = [a, X]$ на пространстве внедиагональных матриц по индукции вытекает, что $N_j \equiv 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots$. Видно также, что диагональные матрицы D_j не зависят от x. $\square$

Доказательство теоремы 2. 1) В качестве первого шага доказательства покажем, что $Lq \in \mathrm{Gev}_1$ для всех $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$. Наше рассуждение будет опираться на следующую теорему Я. Сибуя[3] о жевреевской асимптотике решений сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [26], теорема A.5.4.1 или [27], теорема XII-5-2). Пусть даны целые числа $m, \nu \geqslant 1$ и зависящее от параметра $z \in \mathbb{C}$ дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = z^m A y + \sum_{k=0}^{m-1} z^k B_k(x,y) \tag{2.4}$$

на росток $\mathbb{C}^\nu$-значной функции $y(x)$ в точке $x_0 \in \mathbb{C}$, где $A : \mathbb{C}^\nu \to \mathbb{C}^\nu$ есть обратимый линейный оператор, а каждое $B_k(x,y)$ есть $\mathbb{C}^\nu$-значный полином

[3] В работе М. Шмидта [45], стр. 99–103, содержится другое доказательство того, что формула (2.5) задает биективное отображение $L : \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}} \to \mathrm{Gev}_1^{\mathrm{od}}$. Это доказательство основано на прямых оценках рекуррентно определенных величин. Однако не все из этих оценок мне удалось проверить. Подход, основанный на теореме Сибуя, представляется идейно более прозрачным. Кроме того, он хорошо приспособлен к дальнейшим применениям в § 3.

от компонент вектора y с коэффициентами из $\mathcal{O}(x_0)$. Прямой подстановкой убеждаемся, что это уравнение имеет единственное формальное решение вида $y(x,z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x)z^{-k}$, где $\mathbb{C}^\nu$-значные ростки $a_k(x)$ голоморфны в некоторой общей для них окрестности точки x_0, причем всегда $a_0(x)\equiv 0$ (последнее вытекает из равенства $0=Aa_0$, получаемого приравниванием коэффициентов при z^m, в силу обратимости оператора A). Интересующая нас теорема гласит, что формальный ряд $y(x_0,\cdot)$ принадлежит классу Жеврея $\mathrm{Gev}_{1/m}$.

Чтобы получить дифференциальное уравнение, к которому применима теорема Сибуя, посмотрим на равенства (2.3), эквивалентные уравнению (2.2), с другой точки зрения. А именно, положим $D_j\equiv 0$ для всех целых $j\geqslant 1$ и последовательно найдем $N_1=-\mathcal{A}^{-1}q$ из (2.3^0_{od}), $\varkappa_1=(qN_1)_d$ из (2.3^1_d), $N_2=\mathcal{A}^{-1}(N_1'-(qN_1)_{od})$ из (2.3^1_{od}), $\varkappa_2=(qN_2)_d$ из (2.3^2_d), N_3 из (2.3^2_{od}) и т.д. Получаем, что для любого $q\in\mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ существует единственное калибровочное преобразование $M(x,z)$ некоторой диагональной связности (в наших обозначениях равной $az+\varkappa(x,z)$, где $\varkappa(x,z):=\sum_{j=1}^{\infty}\varkappa_j(x)z^{-j}$) в связность $az+q(x)$ такое, что формальный степенной ряд $M(x,z)-I$ внедиагонален для всех x из той окрестности точки x_0, в которой определен росток q. Покажем, что

$$Lq(z)=M(x_0,z)-I. \tag{2.5}$$

Действительно, формула $\delta(x,z):=\exp\int_{x_0}^{x}\varkappa(s,z)\,ds$ задает диагональное калибровочное преобразование связности $U_0(x,z)\equiv az$ в связность $az+\varkappa(x,z)$. Поэтому $\Delta(x,z):=\delta^{-1}(x,z)M^{-1}(x,z)\mu(x,z)$ есть калибровочное преобразование связности $U_0(x,z)\equiv az$ в себя, а все такие преобразования диагональны и не зависят от x по лемме 11. Из равенства $\mu=M\delta\Delta=\delta\Delta+(M-I)\delta\Delta$ в силу диагональности $\delta\Delta$ и внедиагональности $M-I$ вытекает, что $\mu_d=\delta\Delta$ и $\mu_{od}=(M-I)\delta\Delta$. Отсюда получаем равенство $\mu_{od}=(M-I)\mu_d$, которое при $x=x_0$ превращается в (2.5).

Итак, осталось установить, что $M(x_0,\cdot)-I\in\mathrm{Gev}_1$. Рассмотрим внедиагональный степенной ряд $N(x,z):=M(x,z)-I$. Уравнение (2.2) для $M(x,z)$, имеющее вид $M_x=(az+q)M-M(az+\varkappa)$, переписывается в терминах $N(x,z)$ так: $N_x=z\mathcal{A}N+q(I+N)-(I+N)\varkappa$. Взяв диагональные части, получим $0=(qN)_d-\varkappa$. Подставляя теперь $\varkappa=(qN)_d$ во внедиагональные части, получим уравнение вида (2.4), которому удовлетворяет N:

$$N_x=z\mathcal{A}N+q+(qN)_{od}-N(qN)_d.$$

Применяя теорему Сибуя с $m = 1$ (для чего надо записать все компоненты матрицы N в один вектор $y \in \mathbb{C}^\nu$ и воспользоваться обратимостью оператора $\mathcal{A}$), получаем, что $N(x_0, \cdot) \in \mathrm{Gev}_1$, что и требовалось.

2) Покажем, что отображение $L : \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}} \to \mathrm{Gev}_1^{\mathrm{od}}$ инъективно.

Запишем $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j (x - x_0)^j$ и $\mu(x, z) = I + \sum_{j,k=0}^{\infty} m_{jk} (x - x_0)^j z^{-(k+1)}$. Сравнение коэффициентов при $(x - x_0)^j z^0$ в равенстве $\mu_x = [az, \mu] + q\mu$ дает набор уравнений

$$[a, m_{j0}] + q_j = 0, \qquad j \geqslant 0, \tag{2.6}$$

а сравнение коэффициентов при $(x - x_0)^j z^{-(k+1)}$ в том же равенстве дает

$$(j+1) m_{j+1,k} = [a, m_{j,k+1}] + \sum_{s=0}^{j} q_s m_{j-s,k}, \qquad j, k \geqslant 0. \tag{2.7}$$

Пусть нам известны коэффициенты $m_{0k} \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ формального ряда $Lq(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m_{0k} z^{-(k+1)}$. Задача состоит в том, чтобы выразить через них матрицы $m_{j0} \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, в терминах которых можно найти $q_j = [m_{j0}, a]$ согласно (2.6). На первом шагу мы находим $q_0 = [m_{00}, a]$ из (2.6) и замечаем, что равенства (2.7) с $j = 0$ выражают набор всех m_{1k} через набор всех m_{0k} и q_0. Это позволяет нам на втором шагу найти $q_1 = [m_{10}, a]$ из (2.6) и выразить все m_{2k} через уже известные матрицы m_{1k}, m_{0k}, q_0, q_1 посредством равенств (2.7) с $j = 1$. Продолжая таким образом, получим явные формулы для всех коэффициентов q_j ростка $q(x)$ через коэффициенты m_{0k} формального ряда $Lq(z)$, чем и доказана инъективность отображения L.

3) Покажем, что $LB\varphi = \varphi$ для всех $\varphi \in \mathrm{Gev}_1^{\mathrm{od}}$.

Положим $q(x) := B\varphi(x)$ и рассмотрим решение $\gamma_\pm(x, z)$ задачи Римана (1.8), входящей в определение $B\varphi$. Второе равенство (1.10) показывает, что $\gamma_-(x, z)$ является калибровочным преобразованием связности $U_0(x, z) := az$ в связность $U(x, z) := az + q(x)$. Обозначая через $\mu(x, z)$ калибровочное преобразование из определения (2.1) формального степенного ряда $Lq(z)$, мы видим из группового свойства, что $\Delta(x, z) := \gamma_-^{-1}(x, z)\mu(x, z)$ является калибровочным преобразованием связности $U_0(x, z)$ в себя. Но все такие преобразования по лемме 11 диагональны и не зависят от x. Заметим, что $\gamma_-(x_0, z) = f(z)$ по начальному условию из леммы 9. Поэтому равенство $\gamma_-^{-1}(x, z)\mu(x, z) = \Delta(x, z)$ при $x = x_0$ принимает вид

$$I + Lq(z) = (I + \varphi(z))\Delta(z)$$

для некоторого диагонального степенного ряда $\Delta(z)$. Отделяя здесь диагональные и внедиагональные части и пользуясь (впервые в этом рассуждении) внедиагональностью $\varphi(z)$, мы получаем равенства $I = \Delta(z)$ и $Lq(z) = \varphi(z)\Delta(z)$, влекущие требуемое равенство $Lq(z) = \varphi(z)$.

4) Из пункта 3 доказательства вытекает сюръективность L как отображения $\mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}} \to \mathrm{Gev}_1^{\mathrm{od}}$. Объединяя это с результатом пункта 2, видим, что это отображение биективно и что L и B суть обратные друг к другу биекции между множествами $\mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ и $\mathrm{Gev}_1^{\mathrm{od}}$. Этим доказано утверждение (A) теоремы 2, а также установлено равенство $BLq = q$ для всех $q \in \mathrm{Gev}_1^{\mathrm{od}}$.

Воспользуемся этим равенством для доказательства утверждения (B). Действительно, если росток $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ таков, что формальный ряд $\varphi := Lq$ принадлежит Gev_{1-0}, то задача Римана (1.8) из определения ростка $B\varphi$ подпадает под условия теоремы 1(B) для $m = 1$ и $\Omega = \mathbb{C}^1_x$. Поэтому компонента $\gamma_-(x, z)$ ее решения является глобально мероморфной функцией от $x \in \mathbb{C}$ со значениями в банаховом пространстве $G_1(A)$ для любого $A > 0$. Отсюда вытекает глобальная мероморфность всех коэффициентов $g_k(x)$ разложения, приведенного перед (1.9), а значит, и глобальная мероморфность $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значной функции $B\varphi(x) = [g_0(x), a]$, определенной равенством (1.9). Но последняя функция совпадает в окрестности точки x_0 с $q(x)$ согласно отмеченному выше равенству $BLq = q$. Таким образом, мы построили аналитическое продолжение ростка $q(x)$ до глобально мероморфной $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значной функции на $\mathbb{C}^1_x$.

Чтобы установить свойство тривиальной монодромии во всех полюсах продолженной функции $q(x)$, воспользуемся первым равенством (1.10). Оно показывает, что функция $\gamma_+(x, z)$, которая согласно теореме 1(B) продолжается при каждом $z \in \mathbb{C}$ до глобально мероморфной $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-значной функции от x (причем с тем же знаменателем, что и $q(x)$), является в то же время решением вспомогательной линейной системы $E_x = (az + q(x))E$ (в окрестности точки x_0, а значит, и всюду). Тем самым при каждом $z \in \mathbb{C}$ предъявлена глобально мероморфная фундаментальная система решений вспомогательной линейной системы и закончено доказательство утверждения (B). $\square$

3. Локальная голоморфная задача Коши для солитонных уравнений параболического типа

Напомним, что в п. I.2.1 *солитонными уравнениями параболического типа* были названы уравнения (или, собственно говоря, системы уравнений с

частными производными) вида

$$q_t = [a, F_{m+1}(q)], \tag{3.1}$$

где $q(x,t)$ есть неизвестная внедиагональная $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значная функция, $m \geqslant 2$ есть заданное целое число, а через $F_0, F_1, F_2, \ldots$ обозначается последовательность дифференциальных полиномов по x, отвечающая некоторой последовательности диагональных матриц $a, b, c_1, c_2, \ldots \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ согласно лемме I.1, причем матрицы a, b имеют простой спектр.

Следующая теорема дает критерий разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для уравнения (3.1): данные рассеяния начального условия должны принадлежать классу Жеврея $1/m$. Отсюда вытекает, что всякое голоморфное решение уравнения (3.1) аналитически продолжается до мероморфной функции в произведении $\mathbb{C}^1_x$ на некоторую область из $\mathbb{C}^1_t$. Дается также полное описание всех возможных оболочек мероморфности[4] локальных голоморфных решений уравнения (3.1): эти оболочки всегда равны всей плоскости $\mathbb{C}$ в направлении оси x и могут быть совершенно произвольными в направлении оси t. Наконец, оказывается, что если критерий разрешимости интересующей нас задачи Коши выполняется хотя бы с небольшим запасом (т.е. данные рассеяния начального условия принадлежат классу Жеврея, меньшему $1/m$), то решение этой задачи аналитически продолжается до глобально мероморфной функции на всем пространстве $\mathbb{C}^2$ переменных x, t, обладающей свойством тривиальной монодромии (как по x, так и по t) во всех своих полюсах.

Обозначим через $\mathcal{R}(x_0,t_0)$ множество ростков всех голоморфных $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значных отображений в точке $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$, а через $\mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$ — множество всех внедиагональных ростков из $\mathcal{R}(x_0,t_0)$. Локальная голоморфная задача Коши для уравнения (3.1) состоит в том, что задан внедиагональный голоморфный росток $q_0 \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ и требуется найти росток $q \in \mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$, удовлетворяющий уравнению (3.1) и начальному условию $q(x,t_0) = q_0(x)$.

[4]Напомним, что *римановой областью над* $\mathbb{C}^N$ называется комплексное многообразие X вместе с голоморфным локально обратимым отображением $\pi : X \to \mathbb{C}^N$ (см. [11], п. 22), а *оболочкой мероморфности* произвольного семейства ростков голоморфных функций в точке $\zeta_0 \in \mathbb{C}^N$ называется наибольшая голоморфно отделимая риманова область над $\mathbb{C}^N$, на которую все входящие в семейство ростки аналитически продолжаются до мероморфных функций (см. [11], п. 41). Эта область над $\mathbb{C}^N$ допускает более конструктивное описание как совокупность результатов всех возможных аналитических продолжений вдоль цепочек полидисков, подобно определению полной аналитической функции по Вейерштрассу ([11], стр. 276). Под оболочкой мероморфности $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значного ростка (или семейства таких ростков) понимается оболочка мероморфности семейства всех матричных элементов этих ростков.

Теорема 3. (A) *Задача Коши* $q(x,t_0)=q_0(x)$ *для уравнения* (3.1) *имеет локальное голоморфное решение* $q(x,t)$ *в окрестности точки* $(x_0,t_0)\in\mathbb{C}^2$ *тогда и только тогда, когда* $Lq_0\in \mathrm{Gev}_{1/m}$. *Если такое решение* $q(x,t)$ *существует, то только одно.*

(B) *Всякое голоморфное решение* $q(x,t)$ *уравнения* (3.1) *в произвольном бидиске* $D:=\{(x,t)\in\mathbb{C}^2\,|\,|x-x_0|<\delta_1,\,|t-t_0|<\delta_2\}$ *аналитически продолжается до функции, мероморфной в полосе* $S:=\{(x,t)\in\mathbb{C}^2\,|\,|t-t_0|<\delta_2\}$ *и обладающей свойством тривиальной монодромии по* x (*в смысле теоремы* 2(B)) *при каждом фиксированном* t. *При этом существует голоморфное решение* $q_0(x,t)$ *уравнения* (3.1) *в бидиске* D, *не допускающее аналитического продолжения ни через одну граничную точку полосы* S.

(C) *Оболочка мероморфности любого локального голоморфного решения* $q\in\mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$ *уравнения* (3.1) *имеет вид* $\mathbb{C}^1_x\times X$, *где* X — *некоторая риманова область над* $\mathbb{C}^1_t$. *Обратно, для любой римановой области* $\pi: X\to\mathbb{C}^1_t$ *над* $\mathbb{C}^1_t$ *и любой точки* $(x_0,t_0)\in\mathbb{C}\times\pi(X)$ *существует локальное решение* $q\in\mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$ *уравнения* (3.1) *с оболочкой мероморфности* $\mathbb{C}^1_x\times X$.

(D) *Если в обозначениях утверждения* (A) *росток* $q_0(x):=q(x,t_0)$ *удовлетворяет* $Lq_0\in\mathrm{Gev}_{(1/m)-0}$, *то решение* $q(x,t)$ *рассматриваемой задачи Коши аналитически продолжается до внедиагональной* $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$*-значной функции, мероморфной на всем* $\mathbb{C}^2$ *и обладающей следующим свойством тривиальной монодромии по* x *и* t *во всех своих полюсах. Для каждого* $z\in\mathbb{C}$ *вспомогательная линейная система*

$$(3.2)\quad E_x=(az+q(x,t))E,\quad E_t=(bz^m+F_1(q)(x,t)z^{m-1}+\ldots+F_m(q)(x,t))E$$

(*заданная равенствами* (I.1.2) *с учетом* (I.2.7)) *имеет глобально мероморфную фундаментальную систему решений на* $\mathbb{C}^2_{xt}$.

Доказательство. (A) Единственность локального голоморфного решения $q(x,t)$ задачи Коши $q(x,t_0)=q_0(x)$ для уравнения (3.1) вытекает из того, что уравнения, полученные из (3.1) l-кратным дифференцированием обеих частей по x, однозначно выражают все частные производные $\partial_t^k\partial_x^l q(x_0,t_0)$ через производные функции $q_0(x)$ в точке $x=x_0$.

Докажем необходимость условия $Lq_0\in\mathrm{Gev}_{1/m}$ для существования локального голоморфного решения задачи Коши. Сначала рассмотрим произвольный росток $q\in\mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$. По следствию из леммы 10, при каждом фиксированном t, близком к t_0, существует единственный формальный степенной ряд

$\mu(x,t,z) = I + \mu_1(x,t)z^{-1} + \mu_2(x,t)z^{-2} + \dots$ с коэффициентами из $\mathcal{R}(x_0,t_0)$ такой, что $\mu_x = (az+q)\mu - \mu az$ и ряд $\mu(x_0,t,z) - I$ внедиагонален при всех t. (Отметим, что голоморфность всех $\mu_k(x,t)$ по t ясна из доказательства леммы 10 и что формальный ряд $\mu(x_0,t_0,z) - I$ по определению совпадает с данными рассеяния $Lq_0(z)$ ростка $q_0(x) := q(x,t_0) \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$.) Положим

$$V(x,t,z) := bz^m + F_1(q)(x,t)z^{m-1} + \dots + F_m(q)(x,t). \tag{3.3}$$

Это полином степени m от z с коэффициентами из $\mathcal{R}(x_0,t_0)$.

Мы утверждаем, что если росток $q \in \mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$ удовлетворяет уравнению (3.1), то формальный ряд Лорана $\widetilde{V} := -\mu^{-1}\mu_t + \mu^{-1}V\mu$ имеет вид

$$\widetilde{V}(x,t,z) = bz^m + \sum_{k=-\infty}^{m-1} \varphi_k(t)z^k \tag{3.4}$$

для некоторых *диагональных* ростков $\varphi_k \in \mathcal{R}(t_0)$. Действительно, вводя в рассмотрение полиномы $U(x,t,z) := az + q(x,t)$ и $\widetilde{U}(x,t,z) := az$ степени 1 от z с коэффициентами из $\mathcal{R}(x_0,t_0)$, мы можем переформулировать определение ряда $\mu(x,t,z)$ на геометрическом языке так: $\mu(x,t,z)$ есть (формальное по параметру z) калибровочное преобразование связности $\widetilde{U}(x,t,z)\,dx + \widetilde{V}(x,t,z)\,dt$ в связность $U(x,t,z)\,dx + V(x,t,z)\,dt$ в том же смысле, что и в начале § 2. С другой стороны, согласно сказанному перед (I.2.7), выполнение уравнения (3.1) для ростка $q \in \mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$ эквивалентно тому, что связность $U\,dx + V\,dt$ плоская:

$$U_t - V_x + [U,V] = 0 \quad \text{в окрестности точки} \quad (x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2.$$

Так как кривизна связности меняется ковариантным образом при калибровочных преобразованиях (в том числе и формальных), то получаем отсюда равенство $\widetilde{U}_t - \widetilde{V}_x + [\widetilde{U},\widetilde{V}] = 0$, т.е. $\widetilde{V}_x = [az,\widetilde{V}]$. Подставляя разложение $\widetilde{V}(x,t,z) = \sum_{k=-\infty}^{m} \varphi_k(x,t)z^k$ в равенство $\widetilde{V}_x = [az,\widetilde{V}]$, приходим к системе

$$(\partial_x\varphi_k)_d = 0, \quad (\partial_x\varphi_k)_{od} = [a,(\varphi_{k-1})_{od}] \quad \text{для всех целых} \quad k \leqslant m,$$

откуда убывающей индукцией по k, начиная с уже известного коэффициента $\varphi_m(x,t) \equiv b$, убеждаемся, что все матрицы $\varphi_k(x,t)$ диагональны и не зависят от x, чем и доказано утверждение (3.4).

По самому определению ряда $\widetilde{V}$, внедиагональный ряд $N(t,z) := \mu(x_0,t,z) - I$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $N_t = V(I+N) - (I+N)\widetilde{V}$.

Отделяя в этом равенстве диагональные части, имеем $0 = V_d + (V_{od}N)_d - \widetilde{V}$. Подставляя теперь $\widetilde{V} = V_d + (V_{od}N)_d$ во внедиагональные части, получаем уравнение вида (2.4), которому удовлетворяет $N(t,z)$:

$$N_t = VN - NV_d + V_{od} - (I+N)(V_{od}N)_d.$$

Чтобы проверить, что это уравнение действительно имеет вид (2.4) (с переменной t вместо x и после записи всех матричных элементов N в один вектор $y \in \mathbb{C}^\nu$, $\nu = n(n-1)$), заметим следующее. Во-первых, как разность между $VN - NV_d$ и $[bz^m, N]$, так и выражение V_{od} являются полиномами степени не выше $m-1$ от z, коэффициенты которых зависят голоморфно от t и полиномиально от N. Во-вторых, линейный оператор $N \mapsto [b,N]$ обратим[5] на пространстве всех внедиагональных матриц. Поэтому выполнены условия цитированной после (2.4) теоремы Сибуя, которая и дает требуемое заключение: формальный ряд $Lq_0(z) = N(t_0,z)$ принадлежит классу $\mathrm{Gev}_{1/m}$.

Докажем достаточность условия $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/m}$ для существования локального голоморфного решения задачи Коши. Возьмем произвольный росток $q_0 \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ с $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/m}$ и рассмотрим задачу Римана (1.3) с параметром $\xi = (x,t) \in \mathbb{C}^2$ и полиномом $P(\xi,z) = az(x-x_0) + (bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m)(t-t_0)$, полагая при этом $f(z) = I + Lq_0(z)$. По теореме 1(A) решение $\gamma_\pm(x,t,z)$ этой задачи существует в некоторой окрестности точки $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$ и голоморфно зависит от x,t. Положим $q(x,t) := [g_0(x,t), a]$, где $g_0(x,t)$ есть коэффициент при z^{-1} в разложении $\gamma_-(x,t,z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x,t) z^{-(k+1)}$. Мы утверждаем, что внедиагональная голоморфная $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значная функция $q(x,t)$ удовлетворяет в окрестности точки (x_0,t_0) дифференциальному уравнению (3.1) и начальному условию $q(x,t_0) = q_0(x)$.

Действительно, выполнение указанного начального условия немедленно вытекает из определений и равенства $BLq_0 = q_0$, справедливого по теореме 2(A). Далее, по лемме 9 имеем в окрестности точки (x_0,t_0) равенство $E_x = UE$, где $E(x,t,z) := \gamma_+(x,t,z)$ и $U(x,t,z) := az + q(x,t)$. Буквально повторяя пункт 3 доказательства теоремы I.1 (что проходит и в нашем новом контексте, если рассматривать все уравнения как равенства голоморфных функций от x,t со значениями в надлежащих банаховых пространствах и учесть, что все операции умножения суть непрерывные билинейные формы на этих пространствах согласно лемме 1), получаем также равенство $E_t = VE$, где $V(x,t,z)$ задается формулой (3.3) с дифференциальными полиномами $F_j : \mathcal{R}(x_0) \to \mathcal{R}(x_0)$,

[5] Именно здесь (и только здесь) используется простота спектра матрицы b.

отвечающими матрицам $a, b, c_1, \dots$, входящим в определение уравнения (3.1). Из полученных уравнений $E_x = UE$ и $E_t = VE$ (образующих в совокупности вспомогательную линейную систему (3.2)) и обратимости E следует равенство $U_t - V_x + [U, V] = 0$, эквивалентное уравнению (3.1).

(B) Для любого $t_1 \in \mathbb{C}$ с $|t_1 - t_0| < \delta_2$ положим $q_1(x) := q(x, t_1)$. Тогда $Lq_1 \in \mathrm{Gev}_{1/m}$ согласно уже доказанному утверждению (A). Поскольку $1/m \leqslant 1/2 < 1$, теорема 2(B) дает мероморфное продолжение функции $x \mapsto q(x, t_1)$ на все $\mathbb{C}^1$ со свойством тривиальной монодромии во всех полюсах. Так как это верно для всех $t_1 \in \mathbb{C}$ с $|t_1 - t_0| < \delta_2$, то полученное продолжение $q(x, t)$ мероморфно в полосе $S = \{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t - t_0| < \delta_2\}$ как функция двух переменных.

Предъявим голоморфное решение $q_0(x, t)$ уравнения (3.1) в бидиске D, не продолжаемое ни через одну граничную точку полосы S. Для этого вернемся к явному описанию дифференциальных полиномов $F_j(q)$ в доказательстве леммы I.1. Из него видно, что правая часть уравнения (3.1) является полиномом от q, $\partial_x q$, … , $\partial_x^m q$, причем старшая производная $\partial_x^m q$ входит в этот полином только в первой степени и с постоянным ненулевым коэффициентом. Поэтому теорема Коши–Ковалевской (см., например, [46], гл. I, § 7) гарантирует существование локального голоморфного решения $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ уравнения (3.1) с начальными условиями

$$\partial_x^k q(x_0, t) = \psi_k(t), \qquad 0 \leqslant k \leqslant m - 1,$$

для *любых* голоморфных внедиагональных ростков $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{m-1} \in \mathcal{R}(t_0)^{\mathrm{od}}$. Выбрав функцию $\psi_0(t)$ голоморфной в круге $\{|t - t_0| < \delta_2\}$, но не допускающей мероморфного продолжения ни через одну граничную точку этого круга (а остальные функции $\psi_k(t)$, скажем, тождественно нулевыми), получим требуемый пример. В самом деле, если бы полученное решение $q_0(x, t)$ (мероморфное на S по утверждению (A)) допускало бы мероморфное продолжение в окрестность какой-либо граничной точки (x_1, t_1) области S (таким образом, $|t_1 - t_0| = \delta_2$), то по утверждению (A) решение $q_0(x, t)$ мероморфно продолжалось бы и в окрестность точки (x_0, t_1). Тогда мы получили бы мероморфное продолжение в окрестность точки t_1 и для функции $\psi_0(t) = q_0(x_0, t)$, вопреки нашему выбору ψ_0.

(C) Рассмотрим любое решение $q \in \mathcal{R}(x_0, t_0)^{\mathrm{od}}$ уравнения (3.1) и определим ростки $\varphi_k(t) := \partial_x^k q(x_0, t) \in \mathcal{R}(t_0)^{\mathrm{od}}$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$. Пусть $\pi : X \to \mathbb{C}^1_t$ есть оболочка мероморфности семейства ростков $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}\}$, и пусть $\widetilde{\varphi}_k \in \mathcal{M}(X)$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, суть продолжения ростков φ_k до глобально мероморфных внедиагональных $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значных функций на X.

По конструктивному описанию оболочек мероморфности ([11], стр. 276–277), для каждой точки $\sigma \in X$ найдется последовательность открытых кругов $U_j = \{t \in \mathbb{C} \,|\, |t - t_j| < r_j\}$ (причем центр круга U_0 совпадает с нашей исходной точкой t_0, а пересечение $U_j \cap U_{j+1}$ любых соседних кругов непусто) и областей $V_j \subset X$, $j = 0, 1, \ldots, N$, таких, что $\sigma \in V_N$, $\pi(\sigma) = t_N$, сужение $\pi_j := \pi\,|_{V_j}$ проекции π на область V_j является гомеоморфизмом V_j на U_j при каждом $j = 0, 1, \ldots, N$ и исходные ростки φ_k совпадают с мероморфными $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значными функциями $\widetilde{\varphi}_k \circ \pi_0^{-1}$ на круге U_0 при всех $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Таким образом, мероморфные $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значные функции $\psi_{jk} := \widetilde{\varphi}_k \circ \pi_j^{-1} \in \mathcal{M}(U_j)$ обладают естественными свойствами: $\psi_{0k} = \varphi_k$ на U_0 и $\psi_{jk} = \psi_{j+1,k}$ на $U_j \cap U_{j+1}$ при всех $j = 0, 1, \ldots, N-1$ и $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Пользуясь уже установленным утверждением (B) доказываемой теоремы и теоремой Коши–Ковалевской (как выше), мы видим, что при каждом $j = 0, 1, \ldots, N$ существует единственное внедиагональное $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значное решение $q_j \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^1_x \times U_j)$ уравнения (3.1) с начальными условиями $\partial_x^k q_j(x_0, t) = \psi_{jk}(t)$ для всех $t \in U_j$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Из единственности такого решения вытекает, что $q_j = q_{j+1}$ на пересечениях $\mathbb{C}^1_x \times (U_j \cap U_{j+1})$ при всех $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Полагая $\widetilde{q}(x, \tau) := q_N(x, \tau)$ для всех $x \in \mathbb{C}$, $\tau \in V_N$, получим внедиагональную $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значную мероморфную функцию $\widetilde{q}$ в окрестности $\mathcal{U}_\sigma := V_N$ точки $\sigma \in X$. Если полученные окрестности $\mathcal{U}_{\sigma'}$, $\mathcal{U}_{\sigma''}$ двух точек $\sigma', \sigma'' \in X$ имеют непустое (открытое и связное) пересечение, то цепочка кругов U_j после надлежащего измельчения может быть выбрана общей для σ' и σ'', а тогда из утверждения теоремы Коши–Ковалевской о единственности решения вытекает, что $\widetilde{q}_{\sigma'} = \widetilde{q}_{\sigma''}$ на $\mathcal{U}_{\sigma'} \cap \mathcal{U}_{\sigma''}$. Поэтому имеем глобально мероморфную внедиагональную $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значную функцию $\widetilde{q} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^1_x \times X)$. Согласно установленным выше равенствам $q_j = q_{j+1}$ на $\mathbb{C}^1_x \times (U_j \cap U_{j+1})$ и $q_0 = q$ на $\mathbb{C}^1_x \times U_0$, эта глобально мероморфная функция является продолжением исходного ростка $q \in \mathcal{R}(x_0, t_0)^{\mathrm{od}}$ на риманову область $\mathbb{C}^1_x \times X$ над пространством $\mathbb{C}^2_{xt}$ (с проекцией $(x, \sigma) \mapsto (x, \pi(\sigma))$).

Продолжение ростка q на бóльшую (чем $\mathbb{C}^1_x \times X$) область над $\mathbb{C}^2_{xt}$ невозможно, т.к. по утверждению (B) доказываемой теоремы такая бóльшая область необходимо должна иметь вид $\mathbb{C}^1_x \times Y$ для некоторой области Y над $\mathbb{C}^1_t$, большей чем X. Но тогда вместе с продолжением функции $q(x, t)$ на $\mathbb{C}^1_x \times Y$ все ростки $\varphi_k(t) = \partial_x^k q(x_0, t) \in \mathcal{R}(t_0)^{\mathrm{od}}$ продолжились бы (прямо по определяющим их формулам) мероморфно на Y, что противоречит нашему определению X как оболочки мероморфности указанного семейства ростков. Таким образом, *оболочка мероморфности любого локального решения* $q \in \mathcal{R}(x_0, t_0)^{\mathrm{od}}$ *уравне-*

ния (3.1) *имеет вид* $\mathbb{C}^1_x \times X$, *где* X *есть риманова область над* $\mathbb{C}^1_t$, *равная оболочке мероморфности семейства внедиагональных* $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$*-значных ростков* $\varphi_k(t) = \partial_x^k q(x_0,t) \in \mathcal{R}(t_0)^{\mathrm{od}}$, $k = 0,1,\ldots,m-1$.

С другой стороны, любая риманова область X над $\mathbb{C}^1$ есть многообразие Штейна (см., например, [47], следствие 26.8 и замечание после него) и, следовательно, является оболочкой мероморфности некоторого семейства, состоящего из m внедиагональных $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значных голоморфных ростков в произвольной точке $t_0 \in \pi(X)$ (см. [11], стр. 279–281). Взяв эти ростки в качестве данных задачи Коши при $x = x_0$ и пользуясь теоремой Коши–Ковалевской как выше, получаем локальное голоморфное решение $q \in \mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$ уравнения (3.1), оболочка мероморфности которого равна $\mathbb{C}^1_x \times X$.

(D) Как мы видели в конце доказательства утверждения (A), любое локальное голоморфное решение $q \in \mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$ уравнения (3.1) выражается в окрестности точки $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$ формулой

$$q(x,t) = [g_0(x,t),a], \quad \text{где} \quad \gamma_-(x,t,z) = I + g_0(x,t)z^{-1} + g_1(x,t)z^{-2} + \ldots,$$

через компоненту $\gamma_-(x,t,\cdot) \in I + \mathrm{Gev}_{1/m}$ решения задачи Римана (1.3) с параметром $\xi = (x,t) \in \mathbb{C}^2$ и полиномом $P(\xi,z) = az(x-x_0) + (bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m)(t-t_0)$ для формального ряда $f = I + Lq_0 \in I + \mathrm{Gev}_{1/m}$, определяемого начальными данными $q_0(x) := q(x,t_0)$ рассматриваемой задачи Коши.

Допустим, что $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{(1/m)-0}$. Тогда по теореме 1(B) формальный ряд $\gamma_-(x,t,z) - I$ задает мероморфное отображение из $\Omega = \mathbb{C}^2$ в банахово пространство $G_{1/m}(A)$ для любого $A > 0$. Следовательно, коэффициент $g_0(x,t)$ этого ряда (а вместе с ним и внедиагональный росток $q(x,t) = [g_0(x,t),a]$) продолжается до глобально мероморфной $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значной функции на $\mathbb{C}^2$. С другой стороны, из теоремы 1(B) вытекает, что компонента $\gamma_+(x,t,z)$ решения рассматриваемой задачи Римана задает при каждом фиксированном $z \in \mathbb{C}$ глобально мероморфное отображение из $\mathbb{C}^2_{xt}$ в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, причем дивизор полюсов этого отображения, как и дивизор полюсов продолженной $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значной функции $q \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^2)$, заведомо содержится в множестве нулей целой функции $\tau_f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$, упомянутой в теореме 1(B). Но мы видели в конце доказательства утверждения (A), что при каждом $z \in \mathbb{C}$ росток $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-значного отображения $(x,t) \mapsto \gamma_+(x,t,z)$ в точке $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$ удовлетворяет вспомогательной линейной системе (3.2). По теореме единственности, это остается верным и всюду на $\mathbb{C}^2$, кроме множества нулей целой функции τ_f, т.е. система (3.2) имеет глобально мероморфную фундаментальную систему решений $\gamma_+(x,t,z)$ при

каждом $z \in \mathbb{C}$. Этим установлено свойство тривиальной монодромии и закончено доказательство утверждения (D), а вместе с ним и всей теоремы 3. $\square$

Замечание 2. Сказанное в теореме 3 об аналитическом продолжении ростков голоморфных решений $q(x,t)$ уравнения (3.1) можно подытожить так. Любой такой росток продолжается по x на всю плоскость до глобально мероморфной функции, а по t, вообще говоря, не продолжается никуда (или, если угодно, продолжается на любое заранее предписанное множество с любыми заранее предписанными особенностями на границе этого множества). Однако ростки решений *общего положения* (понимая под этим ростки, удовлетворяющие условиям утверждения (D) теоремы 3) продолжаются до глобально мероморфных функций на всем $\mathbb{C}^2$, т.е. как по x, так и по t.

Замечание 3. Хотя мы совсем не утверждаем, что множество ростков решений общего положения (в смысле замечания 2) открыто или плотно в какой-либо топологии на множестве всех ростков решений, интуитивно кажется приемлемым говорить, что ростки общего положения составляют *большинство* среди всех допустимых начальных условий для уравнения (3.1). Ведь допустимые начальные условия $q_0 \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ характеризуются тем, что $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/m}$, а ростки решений общего положения — тем, что $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_\alpha$ для какого-нибудь $\alpha < 1/m$. Разница получается такая же, как между строгим и нестрогим неравенствами. Кроме того, к решениям общего положения относятся (причем с большим запасом, поскольку для них имеем $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_0$) все решения, изучаемые в главе I и, в частности, все конечнозонные решения и многие быстроубывающие.

Замечание 4. Из теоремы 3(A) видно, что с ростом номера $m = 2, 3, \ldots$ условие разрешимости задачи Коши для уравнения (3.1) становится все более и более ограничительным — факт совершенно не очевидный с других точек зрения. Более того, из пунктов (A), (D) теоремы 3 вытекает, что если задача Коши $q(x,t_0) = q_0(x)$ для уравнения (3.1) с заданным номером $m_0 \geqslant 2$ разрешима хотя бы локально, то она имеет глобально мероморфное решение на всем $\mathbb{C}^2$ для всех уравнений вида (3.1) с той же матрицей a (и с любыми диагональными матрицами $b, c_1, c_2, \ldots$, лишь бы a и b имели простой спектр) и с меньшими значениями m (т.е. $2 \leqslant m < m_0$). В связи с этим отметим следующее.

Давно известно, что каждое конечнозонное решение $q_0(x,t)$ любого из уравнений (3.1) порождает, если брать его в качестве начального условия $q(x,t_0) =$

$q_0(x,t_0)$, глобально мероморфное решение на $\mathbb{C}^2$ для всех уравнений (3.1) с той же матрицей a (это вытекает, например, из формул, выражающих конечнозонные решения через тэта-функции, см. [38], стр. 234–235, а также, согласно теореме 3(D), справедливо для всех $q_0 \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ с $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_0$). Однако вряд ли в литературе были когда-либо указаны примеры не конечнозонных решений с тем же свойством. Чтобы построить такой пример, выберем последовательность внедиагональных матриц $\varphi_k \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$, $k = 0,1,2,\ldots$, так, чтобы формальный ряд $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{-k-1}$ принадлежал пересечению $\cap_{\alpha>0} \mathrm{Gev}_\alpha$, но не принадлежал Gev_0 (для этого достаточно взять $|\varphi_k| = \ln(k!)$). Внедиагональный росток $q_0 := B\varphi \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ удовлетворяет $Lq_0(z) = \varphi(z)$ по теореме 2(A) и мероморфно продолжается на $\mathbb{C}^1_x$ по теореме 2(B). При этом теорема 3(D) гарантирует, что задача Коши $q(x,t) = q_0(x)$ для уравнения (3.1) с данной матрицей a имеет глобально мероморфное решение на $\mathbb{C}^2$ при любом $m \geqslant 2$ (и при любом выборе диагональных матриц b, $c_1, c_2, \ldots$, из которых b имеет простой спектр). Но ни одно из этих решений не является конечнозонным, т.к. $Lq_0 \notin \mathrm{Gev}_0$.

4. Унитарное условие вещественности

В этом параграфе содержание § I.3, включая теорему I.2 о разрешимости задачи Римана с унитарно-симметричными данными, переносится в контекст настоящей главы и тем самым обобщается до серии утверждений, касающихся (в отличие от результатов главы I) уже *всех* локальных голоморфных решений соответствующих солитонных уравнений. Начнем с аналога леммы I.4, описывающего неединственность построения "ненормированных данных рассеяния" $\varphi \in \mathrm{Gev}_1$ по отвечающему им внедиагональному голоморфному потенциалу $B\varphi \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$.

Лемма 12. *Ряды $\varphi, \psi \in \mathrm{Gev}_1$ удовлетворяют $B\varphi = B\psi$ тогда и только тогда, когда формальный степенной ряд $(I+\varphi)^{-1}(I+\psi) \in I + \mathrm{Gev}_1$ диагонален.*

Доказательство. Допустим, что ряды $f(z) := I + \varphi(z)$ и $g(z) := I + \psi(z)$, принадлежащие по условию классу $I + \mathrm{Gev}_1$, удовлетворяют равенству $g(z) = f(z)r(z)$ для некоторого *диагонального* ряда $r \in I + \mathrm{Gev}_1$. Обозначим через $\gamma^f_\pm(x,z)$ и $\gamma^g_\pm(x,z)$ решения задач Римана (1.8), соответствующих функциям f и g, и воспользуемся свойством единственности решения задачи Римана (1.8) (или, более общо, (1.3))[6]. Получаем в силу диагональности r, что $\gamma^g_- = \gamma^f_- r$ и

[6]Действительно, если $\delta_\pm$ — другое решение какой-либо из указанных задач Римана, то

$\gamma_+^g = \gamma_+^f$. Тогда первое равенство (1.10) показывает, что ростки $q_f := B\varphi$ и $q_g := B\psi$ совпадают.

Обратно, допустим, что ростки q_f и q_g совпадают: $q_f = q_g = q$. Тогда из первого равенства (1.10) вместе с начальным условием $\gamma_+(x_0, z) = I$ (см. лемму 9) получаем по теореме единственности решений линейных дифференциальных уравнений, что $\gamma_+^f(x, z) = \gamma_+^g(x, z)$ для всех x в окрестности x_0 и всех $z \in \mathbb{C}$. Обозначая $E_0(x, z) := \exp\{a(x - x_0)z\}$, перепишем это равенство в виде $\gamma_-^f E_0 f^{-1} = \gamma_-^g E_0 g^{-1}$, т.е. $E_0 f^{-1} g E_0^{-1} = (\gamma_-^f)^{-1}\gamma_-^g$. Рассмотрим формальный степенной ряд $r := f^{-1}g \in I + \mathrm{Gev}_1$. Из последнего равенства вытекает, что все внедиагональные матричные элементы $r_{kl}(z)\exp\{(a_{kk} - a_{ll})(x - x_0)z\}$, $k \neq l$, его левой части, рассматриваемые как формальные ряды Лорана, содержат только отрицательные степени z. Если $r_{kl}(z) \not\equiv 0$, то можно записать $r_{kl}(z) = z^{-M}(c_0 + c_1 z^{-1} + \dots)$, $c_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, для некоторого целого $M \geqslant 1$. Отсюда заключаем, что формальный ряд Лорана $z^{-M}\exp\{(a_{kk} - a_{ll})(x - x_0)z\}$ содержит только отрицательные степени z. Однако это заключение неверно, т.к. по условию простоты спектра матрицы a имеем $a_{kk} - a_{ll} \neq 0$ при $k \neq l$. Полученное противоречие показывает, что $r_{kl}(z) \equiv 0$ при всех $k \neq l$. $\square$

Условимся до конца параграфа считать, что *диагональная матрица* $a \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ *косоэрмитова, а начальная точка* x_0 *вещественна*: $x_0 \in \mathbb{R}$. Назовем росток $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ *симметричным*, если $q(\overline{x})^* = -q(x)$ для всех комплексных x в окрестности x_0 или, эквивалентно, если матрица $q(x)$ косоэрмитова для всех вещественных x в окрестности x_0. Следуя терминологии § I.3, будем также называть формальный степенной ряд $f \in I + \mathrm{Gev}_1$ *симметричным*, если равенство $f(\overline{z})^* f(z) \equiv I$ выполняется в смысле формальных степенных рядов. Тогда имеет место следующий расширенный аналог леммы I.9.

Лемма 13. (A) *Росток* $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ *симметричен тогда и только тогда, когда формальный степенной ряд* $(I + Lq(\overline{z}))^*(I + Lq(z)) \in I + \mathrm{Gev}_1$ *диагонален.*

(B) *При любом* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *ряд* $f \in I + \mathrm{Gev}_\alpha$ *удовлетворяет условию диагональности ряда* $f(\overline{z})^* f(z)$ *тогда и только тогда, когда* $f = hr$ *для некоторого симметричного ряда* $h \in I + \mathrm{Gev}_\alpha$ *и некоторого диагонального ряда* $r \in I + \mathrm{Gev}_\alpha$.

(C) *Росток* $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ *симметричен тогда и только тогда, когда он*

формальные степенные ряды $\gamma_-, \delta_- \in I + G_{1/m}(A)$ и целые функции $\gamma_+, \delta_+ \in E_m(B)$ с надлежащими $m \geqslant 1$ и $A > B > 0$ удовлетворяют равенству формальных рядов Лорана $\gamma_-^{-1}\gamma_+ = \delta_-^{-1}\delta_+$. Его можно переписать в виде $\gamma_-\delta_-^{-1} = \gamma_+\delta_+^{-1}$, где левая часть принадлежит $I + \mathrm{Gev}_{1/m}$, а правая принадлежит Ent_m, и потому обе части тождественно равны I.

имеет вид $q = B\varphi$ *для некоторого симметричного ряда* $f = I + \varphi \in I + \mathrm{Gev}_1$. *При любом* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *росток* $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$, *удовлетворяющий включению* $Lq \in \mathrm{Gev}_\alpha$, *симметричен тогда и только тогда, когда* $q = B\varphi$ *для некоторого симметричного ряда* $f = I + \varphi \in I + \mathrm{Gev}_\alpha$.

Доказательство. (A) Пусть росток $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ симметричен. Применим к дифференциальному уравнению $\mu_x = (az + q(x))\mu - \mu az$, входящему в определение (2.1) ряда $Lq(z) = \mu(x_0, z) - I$, операцию эрмитова сопряжения и заменим в полученном равенстве переменные x, z на $\overline{x}, \overline{z}$ соответственно. В силу косоэрмитовости матрицы a и симметричности $q(x)$ полученное равенство можно переписать в виде $\nu_x = az\nu - (az + q(x))\nu$, означающем, что ряд $\nu(x, z) := \mu(\overline{x}, \overline{z})^*$ является формальным калибровочным преобразованием (в смысле § 2) связности $U(x, z) = az + q(x)$ в нулевую связность $U_0(x, z) \equiv az$. Тогда по групповому свойству калибровочное преобразование $\nu(x, z)\mu(x, z)$ переводит U_0 в себя, т.е. (по лемме 11) является диагональным. При $x = x_0$ это дает требуемое заключение о диагональности ряда $\nu(x_0, z)\mu(x_0, z) = (I + Lq(\overline{z}))^*(I + Lq(z))$. Заметим, что этот ряд всегда принадлежит $I + \mathrm{Gev}_1$ по лемме 2, т.к. оба сомножителя лежат в $I + \mathrm{Gev}_1$ (см. теорему 2(A)).

Обратно, пусть росток $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ таков, что ряд $r(z) = (I + Lq(\overline{z}))^*(I + Lq(z))$ диагонален. Положим $f(z) := I + Lq(z)$, $g(z) := ((I + Lq(\overline{z}))^*)^{-1}$ и запишем $f = I + \varphi$, $g = I + \psi$ для некоторых $\varphi, \psi \in \mathrm{Gev}_1$. Тогда из диагональности $r(z)$ по лемме 12 вытекает, что $B\varphi = B\psi$. Но $B\varphi = q$ по теореме 2(A), а росток $B\psi$ находится с помощью формального повторения начала доказательства леммы I.9(A), которое на основе формул (I.3.3) и единственности решения задачи Римана (1.8) последовательно дает равенства $\gamma^g_\pm(x, z) = (\gamma^f_\pm(\overline{x}, \overline{z})^*)^{-1}$ и $B\psi(x) = -q^*(\overline{x})$. Поэтому равенство $B\varphi = B\psi$ сводится к условию симметричности $q(x) = -q(\overline{x})^*$ ростка $q(x)$.

(B) Достаточность условия $f = hr$ для диагональности ряда $f(\overline{z})^* f(z)$ очевидна из равенств $f(\overline{z})^* f(z) = r(\overline{z})^* h(\overline{z})^* h(z) r(z) = r(\overline{z})^* r(z)$ ввиду диагональности $r(z)$. Докажем необходимость этого условия. Пусть $f \in I + \mathrm{Gev}_\alpha$ и ряд $\delta(z) := f(\overline{z})^* f(z) \in I + \mathrm{Gev}_\alpha$ диагонален. Из самого определения $\delta(z)$ видно, что $\delta(\overline{z})^* = \delta(z)$. Поэтому все элементы диагональной матрицы $\delta(z)$ суть формальные степенные ряды от z^{-1} с вещественными коэффициентами и со свободным членом 1. По лемме 2 множество $I + G_\alpha(A)$ является банаховой алгеброй при каждом $A > 0$. Выберем $A > 0$ столь малым, что $\|\delta - I\|_{\alpha, A} < 1$ и, пользуясь голоморфным функциональным исчислением в

банаховых алгебрах, применим к каждому диагональному элементу матрицы $\delta(z) - I$ голоморфную функцию $F(w) = (1+w)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{1/2}^k w^k$, где $|w| < 1$ и $C_\beta^k := \beta(\beta-1)\dots(\beta-k+1)/k!$ (при подстановке $\delta(z)-I$ вместо w, ряд сойдется по норме пространства $I+G_\alpha(A)$). Получим диагональный формальный ряд $r \in I + \mathrm{Gev}_\alpha$ со свойствами $r(\overline{z})^* = r(z)$ и $r(z)^2 = \delta(z)$. Перепишем последнее равенство в виде $\delta(z) = r(\overline{z})^* r(z)$. Тогда формула $f(\overline{z})^* f(z) = \delta(z)$ принимает вид $h(\overline{z})^* h(z) = I$ для $h := fr^{-1} \in I + \mathrm{Gev}_\alpha$, что и требовалось.

(C) Эти утверждения непосредственно вытекают из утверждений (A), (B) и леммы 12. $\square$

Замечание 5. Условие $h(\overline{z})^* h(z) = I$ на элемент $h \in I + \mathrm{Gev}_1$ эквивалентно следующим условиям (понимаемым как равенства формальных степенных рядов от z^{-1}) на матричные элементы $h_{jk}(z)$, $j,k = 1,\dots,n$:

$$\sum_{l=1}^{n} \overline{h_{lj}(\overline{z})} h_{lk}(z) = \delta_{jk} \quad \text{при всех} \quad j,k = 1,\dots,n.$$

В частности, из них вытекает, что $|h_{1j}(z)|^2 + |h_{2j}(z)|^2 + \dots + |h_{nj}(z)|^2 = 1$ при всех $j = 1,\dots,n$ и всех $z = \overline{z} \in \mathbb{R}$. Поэтому может возникнуть впечатление, что формальные степенные ряды $h_{1j}(z),\dots,h_{nj}(z)$ обязаны принимать конечные значения (т.е. сходиться) при указанных значениях j и z. Но это иллюзия. Все выписанные тождества могут выполняться и для всюду расходящихся рядов. Например, положим $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k! z^k \in \mathrm{Gev}_1$. Тогда формальные ряды

$$h_{11}(z) := (1+\varphi(z)^2)^{-1/2}, \qquad h_{12}(z) := \varphi(z)(1+\varphi(z)^2)^{-1/2},$$

образованные подстановкой ряда в ряд, также имеют нулевой радиус сходимости (они принадлежат пространствам $I + \mathrm{Gev}_1$ и Gev_1 соответственно, но не принадлежат никаким классам Жеврея с меньшими показателями) и удовлетворяют тождеству $|h_{11}(z)|^2 + |h_{12}(z)|^2 = 1$ для всех $z = \overline{z} \in \mathbb{R}$. Этот пример не случаен. Он взят из следующего легко проверяемого (с помощью леммы 13(B)) критерия симметричности 2×2-матриц: ряд $h \in I + \mathrm{Gev}_1$ удовлетворяет тождеству $h(\overline{z})^* h(z) = I$ тогда и только тогда, когда

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi(z)\overline{\varphi(\overline{z})}}} \begin{pmatrix} 1 & \varphi(z) \\ -\overline{\varphi(\overline{z})} & 1 \end{pmatrix}$$

для некоторого (произвольного) скалярного ряда $\varphi \in \mathrm{Gev}_1$ с комплексными коэффициентами, где квадратный корень в знаменателе дроби определяется так же, как в доказательстве леммы 13(B).

Переходим к основному результату этого параграфа. Первая часть следующей теоремы обобщает теорему I.2 на случай расходящихся рядов. Для ее формулировки будем называть целую функцию $E : \mathbb{C} \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ *симметричной*, если $E(\overline{z})^* E(z) = I$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Ясно, что все значения такой функции — обратимые матрицы, т.е. автоматически имеем отображение $E : \mathbb{C} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Вторая часть теоремы описывает приложение полученного результата о разрешимости задачи Римана к аналитическому продолжению симметричных решений симметричных солитонных уравнений. Полученный результат выглядит скромнее, чем в § I.3 (теперь изучаемые решения определены лишь в полосе $S_\varepsilon \cap \mathbb{R}^2_{xt}$ а не на всей вещественной плоскости $\mathbb{R}^2_{xt}$), но это вызвано существом дела (см. замечание 7 ниже).

Теорема 4. (A) *Пусть $m \geqslant 1$ и $A_0 > 12B_0 > 0$. Если целая функция $E_0 \in E_m(B_0)$ и формальный ряд $f \in I + G_{1/m}(A_0)$ симметричны, то задача Римана $E_0 f^{-1} = \gamma_-^{-1}\gamma_+$ разрешима, т.е. для некоторых $A > B > 0$ найдется симметричная целая функция $\gamma_+ \in E_m(B)$ и симметричный формальный ряд $\gamma_- \in I + G_{1/m}(A)$ такие, что равенство $E_0 f^{-1} = \gamma_-^{-1}\gamma_+$ выполняется в смысле формальных рядов Лорана.*

(B) *Пусть $m \geqslant 2$ — целое число, $a, b, c_1, \dots, c_m \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ — диагональные косоэрмитовы матрицы, причем a и b имеют простой спектр, и $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$. Тогда всякое локальное голоморфное решение $q \in \mathcal{R}(x_0, t_0)^{\mathrm{od}}$ уравнения* (3.1)*, для которого росток $q(x, t_0) \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ симметричен, аналитически продолжается до мероморфной внедиагональной $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значной функции $q(x, t)$ на области $S_\varepsilon = \{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t - t_0| < \varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon > 0$, причем это продолжение голоморфно (не имеет полюсов) на $S_\varepsilon \cap \mathbb{R}^2_{xt}$.*

Доказательство. (A) Как мы видели в доказательстве теоремы 1(A), для разрешимости изучаемой задачи Римана достаточно, чтобы был обратим оператор $X := I + T^{-1}M^{-1}K$, стоящий в левой части равенства (1.6), где $T\varphi := \{\varphi E_0\}_-$, $M\varphi := \varphi f^{-1}$, $K\varphi := \{\{\varphi E_0\}_+ f^{-1}\}_-$. По лемме 6, X есть фредгольмов оператор индекса 0 на банаховом пространстве $G_{1/m}(A)$ для надлежащего $A > 0$ (где можно считать $2B_0 < A < A_0$, см. выбор B, A_1, A_2 сразу после доказательства леммы 7). Согласно альтернативе Фредгольма, этот оператор обратим тогда и только тогда, когда имеет нулевое ядро. Поэтому достаточно проверить, что если $\varphi \in G_{1/m}(A)$ и $X\varphi = 0$, то $\varphi = 0$.

Для этой проверки заметим, что из равенства $(I + T^{-1}M^{-1}K)\varphi = 0$ вытекает $(MT + K)\varphi = 0$. Но выражение $(MT + K)\varphi = \{\varphi E_0\}_- f^{-1} + \{\{\varphi E_0\}_+ f^{-1}\}_-$ совпадает с $\{\varphi E_0 f^{-1}\}_-$. Поэтому равенство $(MT + K)\varphi = 0$ означает, что

формальный ряд Лорана $E(z) := \varphi(z)E_0(z)f^{-1}(z) \in G_{1/m}(A-2B_0) \oplus E_m(B_0)$ содержит только неотрицательные степени z, т.е. является целой функцией из $E_m(B_0)$. Значит, целой функцией от z будет и сопряженный ряд $E(\overline{z})^* = f^{-1}(\overline{z})^* E_0(\overline{z})^* \varphi(\overline{z})^*$ и их произведение

$$E(z)E(\overline{z})^* = \varphi(z)E_0(z)\{f(\overline{z})^* f(z)\}^{-1} E_0(\overline{z})^* \varphi(\overline{z})^*,$$

которое в силу симметричности f и E_0 равно $\varphi(z)\varphi(\overline{z})^*$ и, тем самым, содержит только отрицательные степени z. Следовательно, $\varphi(z)\varphi(\overline{z})^* \equiv 0$. Подставляя $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{-k-1}$, $\varphi_k \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$, и приравнивая коэффициент при z^{-2} нулю, получаем $\varphi_0\varphi_0^* = 0$, откуда $\varphi_0 = 0$. Тем же рассуждением по индукции выводим, что все матрицы φ_k равны 0. Проверка инъективности оператора X этим закончена.

Чтобы установить симметричность решений $\gamma_\pm(z)$, перемножим равенства $E_0(z)f^{-1}(z) = \gamma_-^{-1}(z)\gamma_+(z)$ и $f^{-1}(\overline{z})^* E_0(\overline{z})^* = \gamma_+(\overline{z})^* \gamma_-^{-1}(\overline{z})^*$ и воспользуемся симметричностью f и E_0. Получим $I = \gamma_-^{-1}(z)\gamma_+(z)\gamma_+(\overline{z})^*\gamma_-^{-1}(\overline{z})^*$, т.е. $\gamma_-(z)\gamma_-(\overline{z})^* = \gamma_+(z)\gamma_+(\overline{z})^*$. Так как правая часть последнего равенства содержит только неотрицательные степени z, а левая — только неположительные, со свободным членом I, то обе части равны I, что и требовалось.

(B) Существование мероморфного продолжения решения $q(x,t)$ на полосу S_ε вытекает из теоремы 3(B). Чтобы доказать отсутствие полюсов во всех вещественных точках этой полосы (возможно, с меньшим $\varepsilon > 0$) обозначим $q_0(x) := q(x,t_0) \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ и заметим, что $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/m}$ по теореме 3(A). В силу симметричности ростка q_0 по лемме 13(C) можно записать $q_0 = B\varphi$ для некоторого симметричного ряда $f = I + \varphi \in I + G_{1/m}(A_0)$, $A_0 > 0$. Рассмотрим задачу Римана (1.3) с параметром $\xi = (x,t) \in \mathbb{C}^2$, полиномом $P(\xi,z) = az(x-x_0) + (bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m)(t-t_0)$ только что построенным симметричным рядом $f(z)$. Условия утверждения (A) выполнены для этой задачи Римана при всех $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ с достаточно малым $|t-t_0|$. Действительно, вещественность x,t гарантирует в силу косоэрмитовости матриц $a,b,c_1,\ldots,c_m$ симметричность целой функции $E_0(z) = \exp P(\xi,z)$, а малость $|t-t_0|$ по лемме 5 гарантирует принадлежность функции E_0 пространству $E_m(B_0)$ с некоторым положительным $B_0 < A_0/12$. Из разрешимости этой задачи Римана при всех указанных значениях параметров (x,t) вытекает (как уже отмечалось при доказательстве пунктов (A), (D) теоремы 3), что продолженное решение $q \in \mathcal{M}(S_\varepsilon)$ уравнения (3.1) голоморфно в этих точках, т.е. не имеет там полюсов. $\square$

Замечание 6. Возможно, теорема 4(A) верна и при $A_0 > B_0 > 0$, т.е. при минимальном предположении, гарантирующем по лемме 1 возможность перемножить ряды $E_0(z)$ и $f^{-1}(z)$. Для наших целей такое уточнение теоремы 4(A) пока не имеет большого значения, т.к. в интересующей нас задаче Римана (1.3) всегда можно уменьшить B_0, ограничиваясь меньшей окрестностью точки ξ_0 в пространстве параметров. С другой стороны, если условие $f \in I + G_{1/m}(A_0)$ теоремы 4(A) усилить до условия "общего положения" $f \in I + \mathrm{Gev}_\alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1/m$, то унитарно-симметричная задача Римана будет разрешима для всех $E_0 \in \mathrm{Ent}_m$, причем компонента $\gamma_-(z)$ ее решения также будет принадлежать $I + \mathrm{Gev}_\alpha$. Доказательство проходит точно так же как выше. Это же замечание относится и к решениям общего положения (в смысле замечания 2 выше) в ситуации теоремы 4(B): все такие решения допускают глобальное мероморфное продолжение на $\mathbb{C}^2_{xt}$ (по теореме 3(D)), не имеющее полюсов на $\mathbb{R}^2_{xt}$ (доказывается как выше). При $m = 1$ это рассуждение приводит к следующему результату: *если симметричный росток* $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ *таков, что* $Lq \in \mathrm{Gev}_\alpha$ *для некоторого* $\alpha < 1$, *то росток* $q(x)$ *аналитически продолжается до глобально мероморфной* $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$*-значной функции на* $\mathbb{C}^1_x$, *которая голоморфна* (*т.е. не имеет полюсов*) *на* $\mathbb{R}^1_x$. Часть последнего утверждения, касающаяся голоморфности на $\mathbb{R}^1_x$ при $n = 2$ (т.е. в случае 2×2-матриц) была недавно получена А. В. Комловым ([48], следствие 12, стр. 63) из других соображений (впрочем, вполне лежащих в русле идей настоящей работы и основанных на более детальном изучении свойства тривиальной монодромии из теоремы 2(B) с помощью класического метода Фробениуса для подсчета монодромии).

Замечание 7. В общем случае нельзя утверждать голоморфность продолженного решения $q(x, t)$ ни на каком множестве, большем чем указанное в теореме 4(B). Это получается небольшой модификацией рассуждения с помощью теоремы Коши–Ковалевской, приведенного в доказательстве теоремы 3(B). Не излагая всех деталей требуемой модификации в общем случае, отметим, что один из ее вариантов приведен ниже (в § 3 гл. III) для частного случая фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера (I.2.10).

ГЛАВА III. МЕРОМОРФНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ СОЛИТОННЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Линейные уравнения и связанные с ними

1.1. Свойство продолжения. Пусть $\mathcal{O}(x_0, t_0)$ есть множество всех ростков голоморфных функций в точке $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$. Основным предметом изучения в настоящей главе является вопрос об аналитическом продолжении решений $u \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ некоторых уравнений с частными производными вида

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right), \tag{1.1}$$

где $m > k \geqslant 1$ — целые числа (этим обеспечивается параболический характер рассматриваемого уравнения), а $F(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$ — полином с комплексными коэффициентами, причем ξ_m входит в F только в первой степени с ненулевым коэффициентом. Обычно мы будем записывать уравнение (1.1) в виде $\partial_t^k u = F(u, \partial_x u, \dots, \partial_x^m u)$ или (при $m \leqslant 2$) в виде $u_t = F(u, u_x, u_{xx})$, обозначая частные производные нижними индексами. Скажем, что уравнение вида (1.1) обладает свойством *голоморфного* (*мероморфного*) *продолжения*, если для любой точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ и любого решения $u_0 \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ этого уравнения существует голоморфная (мероморфная) функция $u(x, t)$ на полосе $\{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t - t_0| < \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, совпадающее с $u_0(x, t)$ в окрестности точки (x_0, t_0). Это определение мотивировано теоремой II.3. Покажем, что постулированное в нем свойство автоматически влечет выполнение всех утверждений пунктов (B) и (C) теоремы II.3 (кроме свойства тривиальной монодромии, которое для общих уравнений вида (1.1) не определено из-за отсутствия понятия вспомогательной линейной системы).

Лемма 1. *Пусть уравнение* (1.1) *с целыми* $m > k \geqslant 1$ *и полиномом* F *указанного выше вида обладает свойством голоморфного* (*мероморфного*) *продолжения. Тогда верны следующие утверждения.*

(A) *Всякое голоморфное решение $u(x,t)$ уравнения* (1.1) *в произвольном бидиске* $D := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x-x_0| < \delta_1,\ |t-t_0| < \delta_2\}$ *аналитически продолжается до функции, голоморфной (мероморфной) в полосе* $S := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t-t_0| < \delta_2\}$. *При этом существует голоморфное решение $u_0(x,t)$ уравнения* (1.1) *в бидиске D, не допускающее аналитического продолжения (даже мероморфного) ни через одну граничную точку полосы S.*

(B) *Оболочка голоморфности (мероморфности) любого локального голоморфного решения $u \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$ уравнения* (1.1) *имеет вид $\mathbb{C}^1_x \times X$ для некоторой римановой области X над $\mathbb{C}^1_t$. Обратно, для любой римановой области $\pi : X \to \mathbb{C}^1_t$ над $\mathbb{C}^1_t$ и любой точки $(x_0,t_0) \in \mathbb{C} \times \pi(X)$ существует локальное решение $u \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$ уравнения* (1.1) *с оболочкой голоморфности (мероморфности) $\mathbb{C}^1_x \times X$.*

Доказательство. (A) По условию, для любого $t \in \mathbb{C}$ с $|t-t_0| < \delta_2$ росток $x \mapsto u_0(x,t)$ допускает голоморфное (мероморфное) продолжение на все $\mathbb{C}^1$. Ясно, что полученное продолжение $u(x,t)$ будет голоморфно (мероморфно) в полосе $S = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t-t_0| < \delta_2\}$ как функция двух переменных.

Предъявим голоморфное решение $u_0(x,t)$ уравнения (1.1) в бидиске D, не продолжаемое (даже мероморфно) ни через одну граничную точку полосы S. Для этого заметим, что в силу неравенств $m > k \geqslant 1$ и условия о зависимости F от ξ_m, для уравнения (1.1) выполнены предположения теоремы Коши–Ковалевской (см., например, [46], гл. I, § 7) "с переменной x в качестве времени". Согласно этой теореме, для любого набора ростков $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1} \in \mathcal{O}(t_0)$ существует локальное голоморфное решение $u_0 \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$ уравнения (1.1) с начальными условиями

$$\partial_x^k u(x_0,t) = \varphi_k(t), \qquad 0 \leqslant k \leqslant m-1.$$

Выбрав функцию $\varphi_0(t)$ голоморфной в круге $\{|t-t_0| < \delta_2\}$, но не допускающей мероморфного продолжения ни через одну граничную точку этого круга (а остальные функции $\varphi_k(t)$, скажем, тождественно нулевыми), получим требуемый пример. (Рассуждение в точности то же, что и в доказательстве теоремы II.3(B).)

(B) Повторяя доказательство теоремы II.3(C), убеждаемся, что оболочка голоморфности (мероморфности) любого локального голоморфного решения $u \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$ уравнения (1.1) равна $\mathbb{C}^1_x \times X$, где X есть риманова область над $\mathbb{C}^1_t$, по определению равная оболочке голоморфности (мероморфности) семейства ростков $\varphi_k(t) := \partial_x^k u(x_0,t) \in \mathcal{O}(t_0)$, $k = 0,1,\dots,m-1$. Обратно, лю-

бую риманову область $\pi : X \to \mathbb{C}^1_t$ можно представить как оболочку голоморфности (мероморфности) некоторого семейства $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}\}$, состоящего из m ростков в точке t_0. Взяв эти ростки в качестве данных задачи Коши, как выше, получим по теореме Коши–Ковалевской решение $u \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ уравнения (1.1) с требуемой оболочкой голоморфности (мероморфности) $\mathbb{C}^1_x \times X$. $\square$

Ясно, что если уравнение (1.1) обладает свойством голоморфного продолжения (далее сокращенно СГП), то оно обладает и свойством мероморфного продолжения (СМП). Обратное неверно. Например, уравнение Бюргерса $u_t = u_{xx} + uu_x$ обладает СМП (и, следовательно, имеет по лемме 1 огромное семейство решений, глобально мероморфных по x), но из всех его решений только $u(x,t) = (x+B)/(C-t)$, $B, C \in \mathbb{C}$, допускает аналитическое продолжение до целой функции от x хотя бы при одном значении t. Это вытекает из доказательства пункта (B) следующей теоремы (впрочем, еще более контрастные примеры уравнений вида (1.1), обладающих СМП, но не обладающих СГП, будут даны в замечании 1 ниже). Рассмотрим 4 семейства уравнений вида (1.1):

$$u_t = P(\partial_x)u, \tag{1.2}$$

$$u_t = au_{xx} + Q(u)u_x, \tag{1.3}$$

$$u_t = au_{xx} + R(u_x), \tag{1.4}$$

$$u_t = au_{xx} + S(u)u_x^2, \tag{1.5}$$

где $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, P, Q, R, S — полиномы.

Теорема 1. (A) *Уравнение* (1.2) *обладает* СГП *для любого полинома* P *степени* $m \geqslant 2$.

(B) *Уравнение* (1.3) *обладает* СМП (*соотв.* СГП) *тогда и только тогда, когда* $\deg Q \leqslant 1$ (*соотв.* $\deg Q = 0$).

(C) *Уравнение* (1.4) *обладает* СГП *при* $\deg R \leqslant 1$. *Иначе* (*т.е. в случае* $\deg R \geqslant 2$) *оно не обладает даже* СМП.

(D) *Уравнение* (1.5) *не обладает* СМП *ни для какого полинома* $S \not\equiv 0$ (*и, более того, ни для какой целой функции* $S \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $S \not\equiv 0$).

Доказательство теоремы 1 опирается на две леммы классического характера. Первая из них для случая уравнения теплопроводности ($m = 2$) восходит к работам С. В. Ковалевской (1875) и Ж. Леру (1895), а для $m \geqslant 3$ была впервые доказана, по-видимому, Г. С. Салеховым [49] в 1950 г. (см. также обзор [50] и

дальнейшие исторические замечания в п. 1.2 ниже). Вторая лемма, согласно Э. Л. Айнсу [51], § 13.8, была известна Ш. Брио и К. Буке еще в 1855 г. (приводимое доказательство следует § 430 курса анализа Э. Гурса [52]).

Лемма 2. *Пусть $P(z)$ — полином степени $m \geqslant 2$, а (x_0, t_0) — произвольная точка из $\mathbb{C}^2$. Тогда локальная голоморфная задача Коши $u(x, t_0) = u_0(x)$ для уравнения* (1.2) *разрешима (т.е. существует росток $u \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ такой, что $u_t = P(\partial_x)u$ в окрестности точки (x_0, t_0) и $u(x, t_0) = u_0(x)$ в окрестности точки x_0) в том и только том случае, когда росток $u_0 \in \mathcal{O}(x_0)$ допускает аналитическое продолжение до целой функции $\widetilde{u}_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^1_x)$ порядка не выше $m/(m-1)$ и конечного типа при порядке $m/(m-1)$.*

Доказательство. Согласно примеру (A), находящемуся в конце пункта I.2.1, локальная голоморфная задача Коши $u(x, t_0) = u_0(x)$ для уравнения (1.2) (или, что то же, (I.2.9)) эквивалентна такой же задаче с начальным условием

$$q(x, t_0) = q_0(x) := \begin{pmatrix} 0 & u_0(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для уравнения (I.2.6) (или, что то же, (II.3.1)) в классе внедиагональных верхнетреугольных 2×2-матриц, заданного надлежащими диагональными матрицами $a, b, c_1, \ldots, c_m$ (выражение этих матриц через коэффициенты полинома $P(z)$ приведено сразу после (I.2.9)). По теореме II.3(A), указанная задача разрешима тогда и только тогда, когда $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/m}$. Но преобразование Лапласа $Lq_0(z)$ верхнетреугольного 2×2-потенциала $q_0 \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ задается явной формулой (I.2.23):

$$q_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & c_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (x - x_0)^k \quad \Longrightarrow \quad Lq_0(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & c_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{k!}{z^{k+1}},$$

где предполагается, что разность $a_{11} - a_{22}$ диагональных элементов матрицы a равна 1. Таким образом, включение $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/m}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| A^k (k!)^{1-1/m} < \infty$ для некоторого $A > 0$. (Уже из этого условия видно, что коэффициенты c_k должны при $k \to \infty$ стремиться к нулю со скоростью как минимум некоторой отрицательной степени от $k!$ и, тем самым, ряд $u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ должен задавать целую функцию.) По формуле Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда, последнее условие можно переписать в виде $\overline{\lim}_{k\to\infty} (|c_k| k!^{1-1/m})^{1/k} < \infty$. Пользуясь формулой Стирлинга и стандартными формулами, выражающими порядок и тип целой функции через коэффициенты ее тейлоровского разложения (см.,

например, [40], гл. I, § 1, п. 6), мы видим, что это условие в точности эквивалентно тому, что сумма ряда $u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k$ есть целая функция порядка не выше $m/(m-1)$ и конечного типа при порядке $m/(m-1)$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $k \geqslant 1$ — целое число и $P(y)$ — полином степени $\geqslant 2k+1$. Тогда для любой точки $a \in \mathbb{C}$ и любой точки $x_0 \in \mathbb{C}$, достаточно близкой к a, можно указать росток решения $y = \varphi(x) \in \mathcal{O}(x_0)$ дифференциального уравнения $(y')^k = P(y)$, продолжающийся до аналитической функции в проколотой окрестности $\{0 < |x - a| < \varepsilon\}$ точки a с точкой ветвления при $x = a$.*

Доказательство. Для любых точек $x_0, y_0 \in \mathbb{C}$ с $P(y_0) \neq 0$ существует единственное решение $y = \varphi(x) \in \mathcal{O}(x_0)$ уравнения $(y')^k = P(y)$ с $\varphi(x_0) = y_0$ (надо применить теорему существования и единственности к уравнению $y' = (P(y))^{1/k}$). Это решение локально обратимо (т.к. $\varphi'(x_0) = (P(y_0))^{1/k} \neq 0$), причем росток $x = \psi(y) \in \mathcal{O}(y_0)$ обратной функции допускает (по той же теореме существования и единственности) аналитическое продолжение вдоль любого пути в области $\{y \in \mathbb{C} \,|\, P(y) \neq 0\}$. Чтобы изучить поведение полученной аналитической функции в проколотой окрестности точки $y = \infty$, сделаем замену $w = 1/y$. Тогда уравнение $(y')^k = P(y)$ принимает вид $(w')^k = (-1)^k w^{2k} P(1/w)$, т.е. (в силу условия $\deg P = 2k + d$ для некоторого целого $d \geqslant 1$) $(w')^k = w^{-d} Q(w)$ для некоторого полинома $Q(w)$ с $Q(0) \neq 0$ или, эквивалентно, $w^{d/k} h(w) w' = 1$ для некоторой голоморфной функции $h \in \mathcal{O}(0)$ с $h(0) \neq 0$. При замене $w = z^k$ уравнение принимает вид $z^{d+k-1} h_1(z) z' = 1$ для некоторого ростка $h_1 \in \mathcal{O}(0)$ с $h_1(0) \neq 0$. Интегрируя, получаем решение $z = z(x)$ как аналитическую функцию в проколотой окрестности точки $x = a$, причем $x - a$ есть голоморфная функция от z, имеющая нуль порядка $d + k$ при $z = 0$. Следовательно, $z(x)$ есть обратимая голоморфная функция от $(x - a)^{1/(k+d)}$, равная нулю при $x = a$. Тогда ряд Пюизо по степеням $x - a$ для соответствующего решения $y(x) = z(x)^{-k}$ исходного уравнения $(y')^k = P(y)$ является рядом Лорана по степеням $(x - a)^{1/(k+d)}$, начинающимся с $(x - a)^{-k/(k+d)}$. Поскольку $0 < k/(k + d) < 1$, это решение имеет точку ветвления при $x = a$. $\square$

Доказательство теоремы 1. (A) Непосредственно вытекает из леммы 2.

(B) При $\deg Q \geqslant 2$ уравнение (1.3) имеет зависящее только от x голоморфное решение $u(x, t) = \varphi(x)$ с точкой ветвления. Чтобы убедиться в этом, перепишем возникающее обыкновенное дифференциальное уравнение

$0 = a\varphi'' + Q(\varphi)\varphi'$ в виде $0 = (\varphi' + Q_1(\varphi))'$ для некоторого полинома Q_1 степени $\deg Q_1 \geqslant 3$ и применим лемму 3 к уравнению $y' = -Q_1(y)$.

Случай $\deg Q = 0$ уже был рассмотрен в пункте (A). В случае $\deg Q = 1$ уравнение (1.3) принимает вид

$$u_t = au_{xx} + (bu + c)u_x, \qquad a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad c \in \mathbb{C} \tag{1.6}$$

и называется *уравнением Бюргерса*. Хорошо известно, что оно сводится к уравнению теплопроводности $v_t = av_{xx}$ с помощью *замены* (или *преобразования*) *Коула–Хопфа* (см., например, [53]) $u = A + Bv_x/v$ с коэффициентами $A = -c/b$, $B = 2a/b$ или, эквивалентно,

$$v(x,t) = k^{-1}(t)V(x,t), \quad \text{где} \quad V(x,t) := \exp \int_{x_0}^{x} \frac{bu(\xi,t) + c}{2a}\, d\xi, \tag{1.7}$$

для надлежащего ростка $k \in \mathcal{O}(t_0)$ с $k(t_0) \neq 0$. Действительно, при подстановке $u = A + Bv_x/v$ левая часть уравнения (1.6) принимает вид $(Bv_x/v)_t = (Bv_t/v)_x$, а правая задается цепочкой равенств (в первом из которых используется выбор $A = -c/b$, а в последнем — выбор $B = 2a/b$)

$$aB\left(\frac{v_x}{v}\right)_{xx} + \left(bA + bB\frac{v_x}{v} + c\right) B\left(\frac{v_x}{v}\right)_x = \left\{aB\left(\frac{v_x}{v}\right)_x + \frac{1}{2}bB^2\left(\frac{v_x}{v}\right)^2\right\}_x =$$
$$= \left\{aB\left(\frac{v_{xx}}{v} - \frac{v_x^2}{v^2}\right) + \frac{1}{2}bB^2\frac{v_x^2}{v^2}\right\}_x = \left\{aB\frac{v_{xx}}{v}\right\}_x.$$

Таким образом, уравнение (1.6) принимает вид $\{(v_t - av_{xx})/v\}_x = 0$. В частности, для функции $V(x,t)$, определенной в (1.7), найдется росток $C \in \mathcal{O}(t_0)$ такой, что $V_t - aV_{xx} = C(t)V$. Подставляя сюда $V(x,t) = k(t)v(x,t)$ из (1.7) и выбирая росток $k \in \mathcal{O}(t_0)$ так, что $C(t)k(t) - k'(t) = 0$, получаем для функции $v \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ уравнение $v_t = av_{xx}$, что и утверждалось.

Применяя уже доказанное утверждение (A) к последнему уравнению, получаем часть “только тогда” следующего критерия (часть “тогда” получается повторением приведенных выше выкладок в обратном порядке). *Локальная голоморфная задача Коши $u(x,t_0) = u_0(x)$ для уравнения Бюргерса* (1.6) *разрешима тогда и только тогда, когда росток $u_0 \in \mathcal{O}(x_0)$ допускает аналитическое продолжение до глобальной мероморфной функции $\widetilde{u}_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ вида*

$$\widetilde{u}_0(x) = -\frac{c}{b} + \frac{2a}{b}\frac{v'(x)}{v(x)} \tag{1.8}$$

для некоторой целой функции $v \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *порядка не выше* 2 *и конечного типа при порядке* 2 *с* $v(x_0) \neq 0$.

Из этого критерия вытекает не только утверждение (B) доказываемой теоремы, но и сделанное перед (1.2) замечание: *росток* $u(x,t_0) \in \mathcal{O}(x_0)$ *локального голоморфного решения* $u \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$ *уравнения* (1.6) *продолжается до целой функции тогда и только тогда, когда*

$$u(x,t) = \frac{1}{b}\left(\frac{Ax+B}{1-A(t-t_0)} - c\right) \tag{1.9}$$

для некоторых $A, B \in \mathbb{C}$. Действительно, такое продолжение имеет место тогда и только тогда, когда целая функция $v(x)$ в (1.8) не обращается в нуль нигде на комплексной плоскости. По известной теореме Адамара (см., например, [40], гл. I, § 3, п. 8) целая функция порядка не выше k без нулей есть $e^{P(z)}$ для некоторого полинома $P(z)$ степени не выше k. В нашем случае это означает, что $v(x,t_0) = \exp\{A_0x^2 + B_0x + C_0\}$ для некоторых $A_0, B_0, C_0 \in \mathbb{C}$. Единственное локальное голоморфное решение $v \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$ задачи Коши с этим начальным условием для уравнения $v_t = av_{xx}$ легко находится в виде $v(x,t) = \exp\{A(t)x^2 + B(t)x + C(t)\}$, а именно,

$$v(x,t) = \{1-4aA_0(t-t_0)\}^{-\frac{1}{2a}} \exp\left\{\frac{A_0x^2 + B_0x + B_0^2(t-t_0)}{1-4aA_0(t-t_0)} + C_0\right\}.$$

Отсюда видно, что логарифмическая производная функции v по x является полиномом первой степени от x при каждом t:

$$\frac{v_x}{v} = 2A(t)x + B(t) = \frac{2A_0x + B_0}{1-4aA_0(t-t_0)},$$

что после подстановки в (1.8) и переобозначения констант дает (1.9).

(C) Если росток $u \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$ удовлетворяет уравнению (1.4), то его производная $w := u_x$ удовлетворяет уравнению $w_t = w_{xx} + R'(w)w_x$ вида (1.3). Согласно пункту (B), последнее уравнение не обладает СМП при $\deg R \geqslant 3$. Поскольку производная мероморфной функции сама мероморфна, исходное уравнение (1.4) в этом случае также не обладает СМП. При $\deg R = 2$ уравнение на w есть уравнение Бюргерса (1.6) и все его решения согласно (1.8) имеют вид $w = kv_x/v + l$ для некоторых констант $k, l \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$, и некоторого ростка $v(x,t)$, являющегося целой функцией от x. Первообразная $u(x,t) = k\log v(x,t) + lx + C(t)$ такого решения имеет точки ветвления во всех нулях функции v. Поскольку такие нули существуют для всех решений w,

кроме указанных в формуле (1.9) (и заведомо не исчерпывающих все множество решений), мы заключаем, что и в случае $\deg R = 2$ уравнение (1.4) не обладает СМП. Случай $\deg R \leqslant 1$ приводит к линейным уравнениям, уже рассмотренным в пункте (A).

(D) Подстановка $u = F \circ v$ сводит уравнение (1.5) к виду $F'(v) \cdot (v_t - a v_{xx}) = 0$ при условии, что голоморфный росток $F \in \mathcal{O}(z_0)$ в точке $z_0 := v(x_0, t_0)$ удовлетворяет уравнению

$$aF'' + S(F)F'^2 = 0.$$

После деления на F' (которое возможно, т.к. мы считаем, что $F'(z_0) \neq 0$), интегрирования и потенцирования последнее уравнение на функцию F принимает вид $\exp\{S_1(F)/a\}F' = 1$, где S_1 есть любая первообразная от S. Таким образом, $w = F(z)$ есть аналитическая функция, обратная к целой функции $z = \Psi(w) = z_0 + \int_{w_0}^{w} \exp\{S_1(\eta)/a\}\, d\eta$. Из теоремы Пикара для функции $\Psi \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и основной теоремы алгебры вытекает, что обратная функция F может быть глобально мероморфной (или хотя бы просто однозначной) на $\mathbb{C}$ только если функция Ψ линейна, т.е. $S_1 \equiv \text{const}$. В противном случае $F(z)$ имеет хотя бы одну особую точку $z_1 \in \mathbb{C}$, не являющуюся полюсом и, выбирая решение $v(x,t)$ уравнения $v_t - a v_{xx} = 0$ так, чтобы функция $x \mapsto v(x, t_0)$ биективно отображала окрестность некоторой точки $x_0 \in \mathbb{C}$ на окрестность точки z_1 (что всегда возможно в силу критерия пункта (A)), мы получим решение $u = F \circ v$ уравнения (1.5), также имеющее при $x = x_0$ особую точку, не являющуюся полюсом. Осталось заметить, что из условия $S_1 \equiv \text{const}$ вытекает $S \equiv 0$. $\square$

Замечание 1. Установленную в доказательстве пункта (B) связь решений уравнения Бюргерса и уравнения теплопроводности можно обобщить на все линейные уравнения вида (1.2). А именно (см., например, [54], § 3.20), для всех ростков $v \in \mathcal{O}(x_0)$ с $v(x_0) \neq 0$ и всех $m = 1, 2, 3, \ldots$ справедливо тождество

$$\frac{v^{(m)}}{v} = \left(\partial_x + \frac{v'}{v}\right)^{m-1} \frac{v'}{v}, \tag{1.10}$$

легко доказываемое индукцией по m: при $m = 1$ тождество очевидно, а переход от m к $m+1$ осуществляется формулами

$$\left(\partial_x + \frac{v'}{v}\right)^{m} \frac{v'}{v} = \left(\partial_x + \frac{v'}{v}\right) \frac{v^{(m)}}{v} = \frac{v^{(m+1)}v - v^{(m)}v'}{v^2} + \frac{v'v^{(m)}}{v^2} = \frac{v^{(m+1)}}{v}.$$

Тождество (1.10) показывает, что (точно так же как в доказательстве пункта (B) выше) уравнение

$$u_t = \partial_x(\partial_x + u)^{m-1}u, \qquad m = 2, 3, \dots \tag{1.11}$$

подстановкой $u = v_x/v$ приводится к виду $\partial_x\{(v_t - v^{(m)})/v\} = 0$, а при надлежащем выборе произвольного множителя $k \in \mathcal{O}(t_0)$ перед v — к виду $v_t - v^{(m)} = 0$. Отсюда и из леммы 2 получаем, что локальная голоморфная задача Коши $u(x, t_0) = u_0(x)$ для уравнения (1.11) разрешима тогда и только тогда, когда $u_0 \in \mathcal{O}(x_0)$ есть логарифмическая производная v'/v некоторой целой функции $v \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ порядка не выше $m/(m-1)$ и конечного типа при порядке $m/(m-1)$, удовлетворяющей условию $v(x_0) \neq 0$. В частности, рассуждение с теоремой Адамара (как выше) показывает, что *хотя все локальные голоморфные решения уравнения* (1.11) *при* $m \geqslant 3$ *аналитически продолжаются до глобально мероморфных функций от* x *при каждом* t*, но если такое решение продолжается до целой функции от* x *хотя бы при одном значении* t*, то оно тождественно равно константе.* Например, это справедливо для уравнения (1.11) с $m = 3$, имеющего вид

$$u_t = u_{xxx} + 3(uu_{xx} + u^2u_x + u_x^2).$$

Замечание 2. Если в условиях леммы 2 начальные данные $u_0(x)$ задачи Коши задаются целой функцией порядка строго меньшего, чем $m/(m-1)$, то решение $u(x, t)$ будет целой функцией на всем пространстве $\mathbb{C}^2$ переменных x, t. Это свойство *решений общего положения* (ср. замечания II.2, II.3) можно вывести из оценок радиуса сходимости степенных рядов для $u(x, t)$ при фиксированном x или из теоремы II.3(D) с учетом специальных условий вещественности в случае верхнетреугольных 2×2-потенциалов.

1.2. Задача Коши и голоморфное продолжение решений линейных уравнений. В теореме 1 мы установили СГП для линейных уравнений (1.2) и СМП для сводящихся к ним нелинейных уравнений вида (1.1) (например, уравнения Бюргерса (1.6)). Оказалось, что эти свойства решений тесно связаны с условиями разрешимости локальной голоморфной *характеристической* задачи Коши для изучаемых уравнений (см. лемму 2 и формулу (1.8) соответственно). Здесь кажется уместным привести краткий обзор классических и современных результатов по указанным темам, чтобы представить наши результаты в некоторой исторической перспективе.

Естественной отправной точкой является теорема Коши–Ковалевской (первый общий результат теории дифференциальных уравнений с частными производными), уже встречавшаяся выше при доказательстве леммы 1 и теоремы II.3. В интересующей нас сейчас общности ее можно сформулировать так. *Пусть функция P голоморфна по (x,t) в окрестности точки $(x_0,t_0)\in\mathbb{C}^2$ и полиномиальна по остальным своим аргументам. Тогда задача Коши*

$$\partial_t^m u = P(x,t,\{\partial_x^k\partial_t^l u\}_{k+l\leqslant m,(k,l)\neq(0,m)});\quad \partial_t^j u(x,t_0)=\varphi_j(x),\quad 0\leqslant j\leqslant m-1,$$

имеет единственное локальное голоморфное решение $u(x,t)$ в окрестности точки (x_0,t_0) для любых голоморфных ростков $\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_{m-1}\in\mathcal{O}(x_0)$.

Это утверждение содержится (вместе с доказательством через сведение к квазилинейным системам первого порядка, а для тех — методом мажорант) в работе Коши [55], завершающей серию из четырех длинных заметок в *Comptes Rendus* 1842 г. (список всех четырех работ и подробный обзор их содержания можно найти, например, в [56], § 1). В 1873 г. Вейерштрасс предложил С. В. Ковалевской в качестве темы для диссертации [57] доказать сформулированное выше утверждение (вместе с его обобщением на случай систем дифференциальных уравнений) без ограничения $k+l\leqslant m$, $(k,l)\neq(0,m)$. Ковалевская нашла контрпример, а затем сформулировала и доказала правильный результат[1]. Ее контрпример ([57], стр. 22) касается локальной голоморфной

[1]В 1873 году Вейерштрасс, очевидно, не знал о серии работ Коши 1842 г. (и не он один: в 1875 г. Дарбу переоткрыл и опубликовал часть результатов первых двух работ этой серии). Кроме того, в том же 1842 г. Вейерштрасс независимо установил теорему существования и единственности голоморфных решений обыкновенных дифференциальных уравнений (опубликованную Коши в 1835 г.). Таким образом, Ковалевской предстояло обобщить на случай нескольких комплексных переменных то, что ее учитель сделал для случая одного переменного 30 лет назад. О том, как она справилась с этой задачей, сказано в письме К. Вейерштрасса к П. Дюбуа-Реймону, которое мы цитируем по статье О. А. Олейник [58], стр. 118: “В диссертации, о которой идет речь, я (не считая того, что поправил многочисленные грамматические ошибки) не принимал другого участия, кроме того, что поставил задачу перед автором. И в этом отношении я тоже должен заметить, что я, собственно, не ожидал другого результата по сравнению с известным из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Я был, чтобы оставаться при простейшем случае, того мнения, что степенной ряд от многих переменных, удовлетворяющий формально уравнению в частных производных, должен также быть всегда сходящимся внутри некоторой области и должен, следовательно, представлять тогда функцию, действительно удовлетворяющую дифференциальному уравнению. Что это не так, как Вы видите из рассмотренного в диссертации примера уравнения $\partial\varphi/\partial t=\partial^2\varphi/\partial x^2$, было открыто, к моему большому изумлению, моей ученицей совершенно самостоятельно, и притом сначала для гораздо более сложных дифференциальных уравнений, чем приведенное, так что она даже сомневалась в возможности получения общего результата; кажущиеся такими простыми средства, которые она нашла для преодоления возникшего таким образом затруднения, я высоко оценил как доказательство ее правильного математического чутья”.

задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x,0) = u_0(x) \tag{1.12}$$

в точке $(0,0) \in \mathbb{C}^2$. Для любого начального условия $u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in \mathcal{O}(0)$ (или даже для любого формального степенного ряда такого вида) эта задача имеет единственное решение в виде *формального* степенного ряда

$$u(x,t) = \sum_{l,k=0}^{\infty} b_{lk} x^l t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_0^{(2k)}(x)}{k!} t^k, \quad \text{откуда} \quad u(0,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!} c_{2k} t^k.$$

Но тогда даже для $u_0(x) = 1/(1-x)$ (т.е. $c_k = 1$ при всех k) радиус сходимости ряда $u(0,t)$ равен нулю и, следовательно, задача Коши (1.12) не имеет локального голоморфного решения. Далее в работе [57], стр. 22–24, в качестве необходимого и достаточного условия разрешимости задачи (1.12) выведены оценки $|c_{2k}|, |c_{2k+1}| \leqslant AB^k k!/(2k)!$ на коэффициенты начального условия (из которых вытекает, что росток $u_0(x)$ аналитически продолжается до целой функции), а также показано на примере $c_k = (k!)^{-1/3}$, что не любая целая функция подходит. По-видимому, только из-за неразработанности в то время терминологии теории целых функций критерий из леммы 2 для случая уравнения теплопроводности не был сформулирован уже в [57]. Его первой явной формулировкой считается работа Ж. Леру [59] 1895 года (на которую, в частности, ссылается Э. Гурса в своем курсе анализа [52], том III, часть 1, стр. 271). С нашей точки зрения, важнее всего то, что из результатов [57] немедленно вытекает СГП для уравнения теплопроводности.

Прежде чем расстаться с XIX веком, упомянем еще о двух веточках комплексного анализа, выросших из работы Ковалевской как из корня, но впоследствии заглохших. Во-первых, И. Фредгольм (1890) применил результат Ковалевской (причем именно в форме СГП для уравнения теплопроводности) для доказательства того, что функция $f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{n^2}$, $0 < a < 1$, будучи бесконечно дифференцируемой на замкнутом единичном круге $\{|z| \leqslant 1\}$, тем не менее не допускает аналитического продолжения ни в одну точку границы этого круга. Этот результат стал широко известен в изложении Миттаг–Леффлера [60]. Доказательство основано на том, что замена $a = e^x$, $z = e^t$ превращает $f_a(z)$ в голоморфное решение $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(nx + n^2 t)$ уравнения $u_t = u_{xx}$ в полупространстве $\{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Im} t < 0\}$. В 1994 г. Д. Хавинсон и Г. Шапиро [61] обнаружили ошибку в рассуждении Фредгольма и показали, как ее исправить. Во-вторых, К. Вейерштрасс по горячим следам (см. [62],

письмо 35 от 6 мая 1874 г.) доказал следующую теорему, объясняющую мнимый парадокс о том, что задача Коши (1.12) всегда разрешима глобально при $t > 0$ по известной формуле Пуассона и в то же время не всегда разрешима даже локально по результату Ковалевской. Пусть функция $u_0(x)$ интегрируема по Риману на вещественной оси $\mathbb{R}^1_x$ и $\max\{0, \log|f(x)|\}/x^2 \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Тогда функция

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4t}\right) d\xi \tag{1.13}$$

голоморфна в полупространстве $\{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Re} t > 0\}$ и удовлетворяет там уравнению $u_t = u_{xx}$ (и, вообще говоря, не продолжается голоморфно ни через одну граничную точку этого полупространства). Этот результат упоминается, например, в [63], § 5.4, а огромная литература по теории эволюционных полугрупп постоянно использует ту его часть, которая касается случая вещественных $t > 0$. Однако вопрос о справедливости его аналога для уравнений (1.2) с $\deg P \geqslant 3$, насколько мне известно, открыт даже для уравнения $u_t + u_{xxx} = 0$ и гладких начальных данных $u_0(x)$ с компактным носителем[2]. С нашей точки зрения, формула Пуассона (1.13) есть решение задачи Коши (1.12) в рамках быстроубывающего варианта метода обратной задачи рассеяния для верхнетреугольных условий вещественности (см. § I.4 и п. I.2.3), а результат Вейерштрасса есть аналог теоремы II.3(B) для этого случая.

В начале XX века после работ Э. Хольмгрена [65] (1908) и М. Жеврея [66] (1918) стало ясно, что аналитические свойства решений уравнения теплопроводности хорошо описываются в шкале пространств Жеврея G^β (о дальнейших приложениях этих пространств в теории линейных уравнений с частными производными см., например, учебник Г. Е. Шилова [67], §§ 16–21, и монографию Л. Родино [68]). Для каждого $\beta \in \mathbb{R}$ скажем, что функция $f(x)$ принадлежит G^β на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, если найдутся $A, B \geqslant 0$ такие, что $|f^{(n)}(x)| \leqslant AB^n(n!)^\beta$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $x \in [a,b]$. Эта возрастающая шкала пространств своеобразно совмещает разделенные нами в § II.1 классы Ent_m и Gev_α. А именно, при любом $\beta < 1$ пространство $G^\beta = \mathrm{Ent}_{1/(1-\beta)}$ состоит в точности из сужений на $[a,b]$ целых функций порядка не выше $1/(1-\beta)$

[2]Из работы Дж. Маклауда и П. Олвера [64], стр. 492–493, вытекает, что в этом случае решение $u(x,t)$ будет голоморфно по t в области $\{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \mid t \notin (-\infty, 0]\}$. Однако голоморфность соответствующих интегралов по t в этой работе не обоснована. Заметим, что уравнение Эйри $u_t + u_{xxx} = 0$ возникает в [64] как закон эволюции интегрального ядра уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко из теории рассеяния в том случае, когда потенциал эволюционирует согласно уравнению Кортевега–де Фриза.

и конечного типа при порядке $1/(1-\beta)$. Пространство $G^1 = \mathcal{O}([a,b])$ состоит из функций, голоморфных в некоторой окрестности отрезка $[a,b]$ в $\mathbb{C}$. Если же $\beta > 1$, то пространство G^β состоит из бесконечно дифференцируемых функций на $[a,b]$, ряд Тейлора которых в каждой точке $x_0 \in [a,b]$ принадлежит $\mathrm{Gev}_{\beta-1}$ (конечно, с заменой z^{-1} на $x - x_0$). Стандартный пример неаналитической функции из G^β, $\beta > 1$, в окрестности точки $x = 0$ есть $\exp\{-|x|^{-1/(\beta-1)}\}$. Результаты Леру, Хольмгрена и Жеврея гласят в этих терминах, что:

1) всякое решение $u(x,t)$ уравнения $u_t = u_{xx}$, непрерывно дифференцируемое по t и дважды непрерывно дифференцируемое по x в прямоугольнике $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x - x_0| < \varepsilon_1, |t - t_0| < \varepsilon_2\}$ с центром $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ является голоморфным по x и бесконечно дифференцируемым по t;

2) задача Коши $u_t = u_{xx}$, $u(x_0,t) = \varphi_0(t)$, $u_x(x_0,t) = \varphi_1(t)$, имеет локальное голоморфное по x решение $u(x,t)$ в окрестности точки (x_0,t_0) тогда и только тогда, когда начальные данные φ_0, φ_1 принадлежат G^β для некоторого $\beta \leqslant 2$;

3) задача Коши $u_t = u_{xx}$, $u(x,t_0) = \psi_0(x)$, имеет локальное голоморфное по t решение $u(x,t)$ в окрестности точки (x_0,t_0) тогда и только тогда, когда начальная функция $\psi_0(x)$ принадлежит G^β для некоторого $\beta \leqslant 1/2$;

4) если же данные Коши φ_0, φ_1 (соотв. ψ_0) принадлежат G^β для некоторого $\beta < 2$ (соотв. $\beta < 1/2$) то решение $u(x,t)$ задачи Коши будет целой функцией от x при каждом фиксированном t (соотв. от t при каждом фиксированном x).

Утверждение 3 показывает, что из голоморфности по t классического решения $u(x,t)$ уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ (т.е. решения, удовлетворяющего условиям утверждения 1) вытекает его голоморфность по x и по совокупности переменных (x,t), причем в целой полосе $\{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t - t_0| < \varepsilon_3\}$. А утверждения 2 и 4 показывают, что из голоморфности классического решения по x ничего подобного не вытекает, даже если наше решение будет целой функцией от x при каждом фиксированном t. Максимум, что можно сказать в этом случае, это принадлежность функции $u(x,t)$ пространству G^2 по t.

Как показал Г. С. Салехов [49] (1950), утверждения 1–4 остаются справедливыми для всех *линейных* уравнений вида (1.1), только теперь критическим показателем служит $\beta = m/k$ (соотв. $\beta = k/m$) для задачи Коши с x (соотв. t) в качестве времени. Тем самым, в виде частного случая $k = 1$, было получено исторически первое доказательство леммы 2 для всех $m \geqslant 2$, а значит, и *первое доказательство* СГП *для всех уравнений вида* (1.2). Конечно, все эти результаты были затем сильно обобщены разными авторами. Не вдаваясь в детали, укажем лишь на последнюю в этом круге идей работу Ш. Мусси [56]

(1999), которая покрывает и нелинейные уравнения вида (1.1), но из результатов которой (как и многих других работ упомянутого направления) уже не выводятся никакие следствия про СГП или СМП.

Вторая половина XX века принесла два способа доказать СГП для линейных уравнений в бóльшей общности, хотя и без установления точного критерия разрешимости задачи Коши. Первый способ опирается на идеи анализа Фурье обобщенных функций, наиболее ярко выраженные в результатах И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова (1958) о единственности решения задачи Коши и Б. Мальгранжа, Л. Эренпрейса, В. П. Паламодова (1955–1967) об экспоненциальном представлении решений уравнений и систем с постоянными коэффициентами. На этом пути К. Чисельман [69] (1969) установил следующий результат. Для всякого открытого выпуклого множества $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ всякое голоморфное решение $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ уравнения $P(\partial_1, \dots, \partial_n)u = 0$, где $\partial_j := \partial/\partial z_j$, а $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \xi^\alpha$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, есть произвольный полином от n комплексных переменных, допускает аналитическое продолжение в некоторое максимальное открытое выпуклое множество $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{C}^n$, зависящее только от множества нулей главной части $P_m(\xi) := \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \xi^\alpha$ полинома P. Тем самым, даже ограничиваясь случаем двух переменных, мы сразу получаем СГП для всех уравнений следующего семейства, содержащего с большим запасом все уравнения (1.2) и все линейные уравнения вида (1.1):

$$\partial_x^m u + \sum_{k+l<m} c_{kl} \partial_x^k \partial_t^l u = 0, \qquad m \geqslant 2, \quad c_{kl} \in \mathbb{C}, \tag{1.14}$$

поскольку множество нулей главной части каждого из этих уравнений такое же, как у уравнения $\partial_x^m u = 0$, очевидно обладающего СГП. Это исторически *второе доказательство* СГП *для всех уравнений вида* (1.2) (а также для многих других). Заметим, что критерий разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для уравнений вида (1.14) был получен лишь в 1997 г. (на четверть века позже) в работе Ю. Ф. Коробейника [70], содержащей также обильную дальнейшую информацию о линейных уравнениях с постоянными коэффициентами в случае двух переменных. В работе С. Ригá [71] (2007) с помощью интегральных представлений Фантаппье–Хенкина показано, что условие выпуклости Ω в теореме Чисельмана можно ослабить до односвязности и что $\widetilde{\Omega}$ содержит все точки $z \in \mathbb{C}^n$, для которых всякая характеристическая гиперплоскость изучаемого уравнения, проходящая через z, имеет непустое пересечение с Ω. Именно этим геометрическим свойством мы пользовались в другом контексте при доказательстве теоремы II.3(C).

Другой современный подход берет начало в серии работ Ж. Лере (1957–1964) об униформизации решений локальной голоморфной задачи Коши для линейных уравнений в случае, когда носитель данных Коши есть аналитическая гиперповерхность, нехарактеристическая всюду, кроме одной точки (тогда решение будет, вообще говоря, ветвиться вокруг этой выделенной характеристики). Первая лемма первой работы [72] этой серии представляет собой точную оценку радиуса сходимости рядов из теоремы Коши–Ковалевской. Из этой оценки непосредственно (как указал П. Шапира [73], § 2) вытекает следующее утверждение М. Цернера [74] (1971), которое мы приведем в формулировке Л. Хёрмандера ([75], теорема 9.4.7). Пусть открытое множество $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ имеет в окрестности точки $z_0 \in \partial\Omega$ гладкую границу, нехарактеристическую относительно оператора $P(z,\partial) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(z)\partial^\alpha$, коэффициенты которого $a_\alpha(z)$ голоморфны в некотором открытом множестве $\Omega_1 \supset \Omega \cup \{z_0\}$. (Нехарактеристичность по определению означает, что $P_m(z_0, \partial\varphi/\partial z) \neq 0$, где $\Omega = \{\varphi(z) < 0\}$ вблизи точки z_0, а $P_m(z,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z)\xi^\alpha$ есть главный символ оператора P.) Если функция $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ такова, что функция $f := Pu$ допускает аналитическое продолжение в Ω_1 (для наших целей достаточно считать, что $f \equiv 0$), то $u(z)$ допускает аналитическое продолжение в окрестность точки z_0. Из этого утверждения легко вывести СГП для всех уравнений следующего семейства, еще более общего, чем (1.14):

$$\begin{gathered} \partial_x^m u + \sum_{k+l<m} a_{kl}(x,t)\partial_x^k\partial_t^l u = 0, \qquad m \geqslant 2, \\ a_{kl} \in \mathcal{O}(\{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t-t_0| < \delta\}). \end{gathered} \tag{1.15}$$

Действительно, для произвольного решения $u \in \mathcal{O}(D)$ уравнения (1.15) в бидиске $D = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x-x_0| < \delta_1, |t-t_0| < \delta\}$ рассмотрим эллипсоиды $\Omega_r := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x-x_0|^2/r^2 + |t-t_0|^2/s(r)^2 < 1\}$, где $r > 0$, а $s(r)$ есть любое непрерывное монотонно возрастающее отображение луча $0 \leqslant r < +\infty$ на полуинтервал $0 \leqslant s < \delta$. Граница каждой области Ω_r нехарактеристична относительно каждого уравнения (1.15) всюду, кроме ее пересечения с осью t. Применяя лемму Цернера во всех граничных точках области Ω_r, не лежащих на оси t, получаем замкнутость множества всех тех $r > 0$, для которых $u(x,t)$ допускает аналитическое продолжение в $\overline{\Omega}_r$. Поскольку это множество также открыто (по определению) и непусто, оно совпадает со всем лучом $r > 0$. В частности, этим дано *третье доказательство* СГП *для всех уравнений* (1.12) (и даже для более общего класса уравнений (1.15)). Бóльшая общность класса уравнений (1.15) по сравнению не только с уравнениями (1.12), но и с урав-

нениями (1.14) проявляется уже в том, что критерий разрешимости локальной голоморфной характеристической задачи Коши для общих уравнений вида (1.15) в настоящее время неизвестен[3]. Обзор результатов Ж. Лере и его многочисленных последователей см. в статье Г. М. Хенкина [77] (1998), стр. 7–12 и 23–27, а также в монографии Д. Хавинсона [78] (1996). Еще один подход к изучению нехарактеристической голоморфной задачи Коши для линейных уравнений и систем отражен в книге Ю. А. Дубинского [79] (1996).

Таким образом, приведенное нами выше доказательство леммы 2 (и, тем самым, доказательство СГП для уравнений вида (1.12)) можно считать четвертым. Как и предыдущие 3 доказательства, оно возникло не само по себе, а как простейший частный случай более общей конструкции. В нашем случае эта более общая конструкция касается *СМП для нелинейных уравнений вида* (1.1), причем не для всех (мы видели в теореме 1, что многие уравнения вида (1.1) не обладают СМП), а только для *солитонных и сводящихся к ним*. Впрочем, весьма вероятно, что именно эти уравнения и представляют наибольший интерес для физических и других приложений.

1.3. Мероморфные решения нелинейных уравнений. На данный момент ни для одного нелинейного уравнения вида (1.1) не установлено СГП (напротив, во многих случаях установлено отсутствие СГП). Явных формулировок СМП нам также не попадалось в литературе, хотя из замечания 1 ясно, что СМП для уравнений вида (1.11) легко выводится из хорошо известных теорем. Укажем на некоторые результаты, близкие к СМП.

После того как Т. Като и независимо С. Н. Кружков и А. В. Фаминский обнаружили в 1983 г., что для любого начального условия $u_0 \in H^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}, e^{bx}\,dx)$ (где H^2 — соболевское пространство, $b > 0$) решение $u(x,t)$ задачи Коши

$$\begin{gathered} u_t - uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{1.16}$$

[3]Ожидать простого критерия тут не приходится. Например, задача Коши для уравнений $u_t = u_{xx} + (1 + x + x^2 + x^3)u + 1$ и $u_t = u_{xxx} + (1 + x + x^2)u + 1$ с начальным условием $u(x,0) = 0$ не имеет локальных голоморфных решений в окрестности начала координат. Эти примеры были анонсированы М. Рикье еще в 1897 г., а впервые печатно обоснованы, по-видимому, Г. С. Салеховым и В. Р. Фридлендером [50]. Отметим еще, что линейные уравнения вида (1.15) теряют СГП, если разрешить коэффициенту при $\partial_x^m u$ быть целой функцией от x, имеющей нули. Это видно уже на простейших примерах типа $xu_x = 1$ или $xu_{xx} = 1$, а также вытекает из доказанного Я. Перссоном [76] (1970) утверждения о том, что задача Коши $u_t = x^3 u_{xx} + x^3 t$, $u(x,0) = u_0(x)$, не имеет локального голоморфного решения в начале координат *ни для какого* ростка $u_0 \in \mathcal{O}(0)$.

при малых $t > 0$ становится бесконечно дифференцируемым по x, многие авторы выводили гладкость или аналитичность по x решения задачи Коши для так называемых "дисперсивных нелинейных эволюционных уравнений" при тех или иных условиях убывания начальных условий (см., например, учебник [80]). В контексте уравнения Кортевега–де Фриза (1.16), сильнейший на сегодняшний день результат сформулирован А. Рыбкиным [81] и гласит, что если $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ удовлетворяет для некоторых $C, x_0 > 0$ условиям $|u_0(x)| \exp\{x^{1/3}\} \leqslant C$ при $x > x_0$ и $\int_x^{x+1} \max\{u_0(\xi), 0\}\, d\xi \leqslant C$ при $x < x_0$, то решение $u(x,t)$ задачи Коши (1.16), построенное с помощью (обобщенного варианта быстроубывающего случая) метода обратной задачи рассеяния[4], будет при каждом $t > 0$ глобально мероморфной функцией на $\mathbb{C}^1_x$ без вещественных полюсов. Мы не останавливаемся более подробно на этом и подобных ему результатах об аналитическом сглаживающем эффекте, поскольку почти все они[5] утверждают голоморфность функции $u(x,t)$ только по x, а отсюда, как мы видели на примере уравнения теплопроводности в п. 1.2, еще очень далеко до голоморфности по t и по совокупности переменных. Кроме того, уже теорема 1 показывает, что ни одно из этих двух свойств (дисперсивность и СМП) не влечет с необходимостью другого.

Современные обобщения перечисленных в п. 1.2 результатов на нелинейные уравнения в основном сосредоточены в следующих 3 направлениях.

1) Нелинейные обобщения леммы Цернера и ее следствий. Это удается сделать лишь в весьма ослабленном виде, что и не удивительно, т.к. из справедливости леммы Цернера в полном объеме вытекало бы СГП. Обзор результатов данного направления см. в статье Х. Тахары [84].

2) Теорема Коши–Ковалевской с предписанными особенностями, т.е. построение локальных мероморфных решений с заданной кривой полюсов (и несколькими заданными лорановскими коэффициентами вдоль этой кривой). Типичный результат таков. Пусть $\varphi, a_4, a_6 \in \mathcal{O}(t_0)$ — произвольные ростки в точке $t_0 \in \mathbb{C}$, причем $\varphi'(t_0) \neq 0$. Положим $x_0 := -\varphi(t_0)$. Тогда в окрестности

[4] Оговорка не лишняя, т.к. для столь широкого (в смысле поведения на $-\infty$) класса начальных данных неизвестно, будет ли решение задачи Коши (1.16) единственным. Более того, примеры неединственности решений уравнения Кортевега–де Фриза из работы А. Коэн и Т. Каппелера [82], полученные обратным преобразованием рассеяния из нуль-решений уравнения Эйри $u_t + u_{xxx} = 0$, заставляют заподозрить, что и решения задачи (1.16), построенные различными обобщениями метода обратной задачи рассеяния, не всегда единственны.

[5] За исключением некоторых результатов работ Дж. Маклауда и П. Олвера [64] для уравнения Кортевега–де Фриза (где, однако, есть пробелы в доказательствах), а также Н. Хайаши и К. Като [83] для нелинейного уравнения Шредингера.

точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ уравнение Кортевега–де Фриза $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ имеет единственное мероморфное решение вида

$$u(x,t) = \frac{1}{(x+\varphi(t))^2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t)(x+\varphi(t))^j, \qquad 0 < |x+\varphi(t)| < \varepsilon\,.$$

Коэффициенты этого решения однозначно находятся по формулам

$$a_0(t) = 2,\ a_1(t) = a_3(t) = 0,\ a_2(t) = \frac{\varphi'(t)}{6},\ a_5(t) = \frac{\varphi''(t)}{36},\ a_7(t) = -\frac{a_4'(t)}{24}, \dots$$

В частности, *любая* голоморфная кривая в $\mathbb{C}^2_{xt}$, однозначно проектирующаяся на ось t, может *локально* служить множеством полюсов некоторого мероморфного решения уравнения Кортевега–де Фриза. См. обзор М. Крускала с соавторами [85] и монографии [86], [87].

3) Прямые оценки коэффициентов степенных рядов по t, представляющих решения. На этом пути получены многочисленные (но разрозненные) примеры таких начальных данных для солитонных (и несолитонных) уравнений вида (1.1), что соответствующая задача Коши не имеет даже локальных голоморфных по t решений. См., например, [88] для случая уравнения Кортевега–де Фриза (обладающего СМП) и [89] для случая уравнения $\partial_t u = \partial_x^m u + u^k \partial^l u$, $m \geqslant 3$ (почти никогда не обладающего СМП).

2. Уравнение Кортевега–де Фриза и связанные с ним

2.1. Свойство продолжения. Рассмотрим уравнения вида

$$u_t = au_{xxx} + Q(u)u_x, \tag{2.1}$$

$$u_t = au_{xxx} + R(u_x), \tag{2.2}$$

где $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, Q, R — полиномы. Частными случаями являются уравнение Кортевега–де Фриза ($Q(u) = bu$ для некоторого $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) и его модифицированная ($Q(u) = bu^2$) и потенциальная ($R(\xi) = b\xi^2$) версии. Следующая теорема гласит, что эти и (с точностью до очевидных преобразований) только эти уравнения вида (2.1), (2.2) обладают СМП. Что же касается СГП, то в классе уравнений (2.1), (2.2) им обладают линейные уравнения и только они.

Теорема 2. (А) *Уравнение* (2.1) *обладает* СМП (*соотв.* СГП) *тогда и только тогда, когда* $\deg Q \leqslant 2$ (*соотв.* $\deg Q = 0$).

(B) *Уравнение* (2.2) *обладает* СМП (*соотв.* СГП) *тогда и только тогда, когда* $\deg R \leqslant 2$ (*соотв.* $\deg R \leqslant 1$).

Доказательство. (A) При $\deg Q \geqslant 3$ будем искать не зависящие от t решения уравнения (2.1). Интегрируя уравнение $au''' + Q(u)u' = 0$, получим $u'' = Q_1(u)$ для некоторого полинома Q_1 степени $\geqslant 4$. Умножая на $2u'$ и еще раз интегрируя, получим $u'^2 = Q_2(u)$ для некоторого полинома Q_2 степени $\geqslant 5$. Последнее уравнение по лемме 3 имеет решения с точками ветвления. Следовательно, уравнение (2.1) не обладает СМП при $\deg Q \geqslant 3$.

Если $\deg Q = 2$, то уравнение (2.1) принимает вид

$$u_t = au_{xxx} + (Au^2 + Bu + C)u_x, \qquad a, A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Заменой u на $u + B/(2A)$ добьемся того, что $B = 0$. После этого масштабированием $(x, t) \mapsto (\alpha x, \beta t)$ сделаем $a = 1$, $A = 6$. Получим уравнение (I.2.13). Будучи редукцией системы (I.2.6), оно обладает СМП по теореме II.3(B). Следовательно, исходное уравнение (2.1) также обладает СМП. С другой стороны, оно не обладает СГП, поскольку уравнение $u_t = u_{xxx} - (6u^2 + C)u_x$ при $C = 0$ имеет решение $u = -x^{-1}$, а при $C \neq 0$ — решение $u = k\,\mathrm{tg}(kx)$, где $2k^2 = C$.

Если $\deg Q = 1$, то уравнение (2.1) принимает вид $u_t = au_{xxx} + (Au + B)u_x$, где $a, A \neq 0$. Заменой u на $u + B/A$ и масштабированием добьемся того, что $a = 1$, $A = -6$, $B = 0$. Получим уравнение (I.2.12). Будучи редукцией системы (I.2.6), оно обладает СМП по теореме II.3(B). Следовательно, исходное уравнение (2.1) также обладает СМП. С другой стороны, оно не обладает СГП, поскольку уравнение $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$ имеет решение $u = 2x^{-2}$.

Если $\deg Q = 0$, то уравнение (2.1) обладает СГП по теореме 1(A).

(B) Производная $v := u_x$ любого решения уравнения (2.2) удовлетворяет уравнению $v_t = av_{xxx} + R'(v)v_x$ вида (2.1). Поскольку производная любой мероморфной функции сама мероморфна, из утверждения (A) следует, что при $\deg R \geqslant 4$ уравнение (2.2) не обладает СМП. При $\deg R = 3$ уравнение на v имеет, как мы видели в доказательстве пункта (A), решения с полюсами первого порядка по x и, следовательно, уравнение (2.2) имеет решения u с логарифмическими точками ветвления, т.е. не обладает СМП.

При $\deg R = 2$ все решения уравнения на v глобально мероморфны по x (согласно пункту (A)) и могут иметь полюсы по x только второго порядка с вычетом нуль[6]. Поэтому все решения уравнения (2.2) мероморфны по x и

[6]Это будет доказано в лемме 7(B) ниже. Альтернативное доказательство, использующее результаты Дюйстермаата и Грюнбаума [90], указано в замечании 3.

имеют не более чем полюсы первого порядка (которые и в самом деле могут присутствовать согласно примерам из пункта (A)). Таким образом, уравнение (2.2) с полиномом $R(\xi)$ степени 2 обладает СМП, но не обладает СГП.

Если $\deg R \leqslant 1$, то уравнение (2.2) имеет вид $u_t = au_{xxx} + Au_x + B$, где $a, A \neq 0$. Полагая $v(x,t) := u(x,t) + Bx/A$, получаем уравнение $v_t = av_{xxx} + Av_x$, которое обладает СГП по теореме 1(A). $\square$

Замечание 3. Потенциальное уравнение Кортевега–де Фриза $u_t = au_{xxx} + bu_x^2$, $a, b \in \backslash\{0\}$, выделяется в условиях теоремы 2 тем, что обладает СМП, хотя и *не является* редукцией никакого солитонного уравнения параболического типа (подобно уравнению Бюргерса (1.6) в условиях теоремы 1). Чтобы установить СМП для этого уравнения, нам кроме теоремы II.3(B) потребовалась некоторая информация (хотя и довольно грубая) о структуре полюсов решений уравнения Кортевега–де Фриза. Пользуясь установленным выше свойством тривиальной монодромии (теорема II.2(B)) и описанием Дюйстермаата–Грюнбаума [90] (1986), предложение 3.3, всех локальных мероморфных потенциалов оператора Шредингера с тривиальной монодромией, легко получить следующий более точный результат. *Пусть решение $u(x,t)$ уравнения Кортевега–де Фриза $u_t = au_{xxx} + buu_x$, $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, мероморфно в полосе $\{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t - t_0| < \delta\}$ и функция $u(x,t_0)$ имеет при $x = x_0$ полюс. Тогда лорановское разложение этой функции вблизи этого полюса имеет вид*

$$u(x,t_0) = -\frac{6a}{b}\frac{k(k+1)}{(x-x_0)^2} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j (x-x_0)^j, \qquad 0 < |x - x_0| < \varepsilon,$$

для некоторого целого $k \geqslant 1$, причем $c_{2j-1} = 0$ для всех $j = 1, \ldots, k$. Указанные ограничения на лорановские коэффициенты необходимы и достаточны для тривиальности монодромии решения вспомогательной линейной системы по x в проколотой окрестности точки x_0. Теорема типа Коши–Ковалевской с предписанными особенностями из п 1.3 показывает, что (по крайней мере в случае $k = 1$) дальнейших общих ограничений на лорановские коэффициенты, по-видимому, нет. Впрочем, все эти более точные утверждения для наших целей не нужны. Нам достаточно знать, что любое локальное голоморфное по x, t (и, тем самым, глобально мероморфное по x) решение уравнения Кортевега–де Фриза имеет по x не более чем полюсы второго порядка с нулевым вычетом.

2.2. Расходимость ряда Концевича–Виттена. В 1991 г., изучая математические модели квантовой гравитации, Э. Виттен [91] ввел в рассмотрение

следующий формальный степенной ряд от бесконечного числа комплексных переменных $t_0, t_1, t_2, \dots$:

$$F(t_0,t_1,t_2,\dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(m_1,\dots,m_n)} \gamma(m_1,\dots,m_n) t_{m_1}\dots t_{m_n} = \\ = \sum_{(k_0,k_1,\dots,k_s)} c(k_0,k_1,\dots,k_s) \frac{t_0^{k_0} t_1^{k_1}\dots t_s^{k_s}}{k_0!k_1!\dots k_s!}\,. \tag{2.3}$$

Здесь вторая сумма берется по всем наборам $(m_1,\dots,m_n)$ из n неотрицательных целых чисел, а коэффициент $\gamma(m_1,\dots,m_n)$ по определению равен 0, если число $g := \frac{1}{3}(m_1+\dots+m_n-n+3)$ не является целым и неотрицательным. В противном случае, $\gamma(m_1,\dots,m_n)$ есть значение когомологического класса $c_1(L_1)^{m_1}\dots c_1(L_n)^{m_n}$ на фундаментальном цикле $[\mathcal{M}_{g,n}]$ пространства модулей гладких замкнутых комплексных кривых рода g с n отмеченными точками, где L_i есть линейное расслоение над $\mathcal{M}_{g,n}$, слой которого в точке $(C, x_1, \dots, x_n)$ равен кокасательному пространству $T^*_{x_i}C$ (подробнее см., например, [92], § 4.6). Третья сумма берется по всем наборам $(k_0,k_1,\dots,k_s)$ целых неотрицательных чисел, не все из которых равны нулю, а входящий в нее коэффициент $c(k_0,k_1,\dots,k_s)$ по определению равен $\gamma(m_1,\dots,m_n)$ для набора $(m_1,\dots,m_n)$, $n = k_0+k_1+\dots+k_s$, состоящего из k_0 чисел 0, k_1 чисел 1, …, k_s чисел s.

Известно, что ряд (2.3) удовлетворяет так называемому *уравнению струны*, применяемому в [92], § 4.6, для подсчета всех коэффициентов $\gamma(m_1,\dots,m_n)$, отвечающих случаю $g=0$:

$$\frac{\partial F}{\partial t_0} = \sum_{i=0}^{\infty} t_{i+1}\frac{\partial F}{\partial t_i} + \frac{t_0^2}{2}\,. \tag{2.4}$$

Гипотеза Виттена, доказанная[7] в 1992 г. М. Л. Концевичем [93], гласит, что формальный степенной ряд $U := \partial^2 F/\partial t_0^2$ является решением иерархии уравнения Кортевега–де Фриза

$$\frac{\partial U}{\partial t_1} = U\frac{\partial U}{\partial t_0} + \frac{1}{12}\frac{\partial^3 U}{\partial t_0^3}\,. \tag{2.5}$$

[7] “Мы должны отметить, что полное изложение этого доказательства, содержащее все детали, до сих пор не опубликовано. Наш текст также не решает эту задачу”, — пишут А. К. Звонкин и С. К. Ландо [92] (2010), стр. 234.

В наших терминах это означает, что для каждого $i = 0, 1, 2, \dots$ существует константа $\alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такая, что формальный степенной ряд $u_i(x,t)$, полученный из $U(t_0, t_1, \dots)$ подстановкой $t_0 = \alpha_0 x$, $t_i = \alpha_i t$, $t_j = 0$ при всех $j \neq 0, i$, определяет внедиагональную 2×2-матрицу

$$q_i(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & u_i(x,t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

удовлетворяющую уравнению (I.2.6) с номером $m = 2i + 1$, заданному диагональными матрицами $a = b = \operatorname{diag}(1/2, -1/2)$, $c_1 = c_2 = \ldots = 0$. Дальнейшую информацию о приложениях, обобщениях и различных доказательствах теоремы Концевича (гипотезы Виттена) можно найти в [92], стр. 268–279 и 436–452. Нас будет интересовать вопрос о сходимости степенных рядов $F(t_0, t_1, \dots)$ и $U := \partial^2 F / \partial t_0^2$ по некоторым переменным $t_0, t_1, \dots$ при фиксированных значениях остальных.

Для t_0 и t_1 этот вопрос легко решается на основе уравнений (2.4) и (2.5). В самом деле, дифференцируя (2.4) по t_0 и полагая $t_i = 0$ при $i \geqslant 1$, имеем

$$U(t_0, 0, 0, \dots) = t_0. \tag{2.7}$$

Локальная голоморфная задача Коши (2.5), (2.7) имеет единственное решение

$$U(t_0, t_1, 0, 0, \dots) = \frac{t_0}{1 - t_1}\,. \tag{2.8}$$

Таким образом, степенной ряд $U(t_0, t_1, 0, \dots)$ от переменных t_0, t_1 сходится в каждом бидиске вида $\{(t_0, t_1) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t_0| < R, |t_1| < 1\}$, $R > 0$. Однако пункт (B) следующий теоремы показывает, что по всем старшим временам t_i, $i \geqslant 2$, ряд $U(t_0, t_1, \dots, t_i, 0, 0, \dots)$ будет всюду расходящимся.

Теорема 3. (A) *Пусть все ненулевые элементы внедиагональной 2×2-матрицы $q(x)$ имеют вид $q_{12}(x) = b_1(x - x_0)^k$, $q_{21}(x) = b_2(x - x_0)^l$ для некоторых $b_1, b_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и целых $k, l \geqslant 0$. Пусть $\alpha < (k + l)/(k + l + 2)$. Тогда $Lq \notin \operatorname{Gev}_\alpha$.*

(B) *Для каждого целого $i \geqslant 2$ формальный степенной ряд*

$$u_i(x,t) := U(\alpha_0 x, 0, \dots, 0, \alpha_i t, 0, \dots), \qquad \alpha_i t \text{ на } i\text{-ом месте},$$

от переменных x, t не сходится ни в каком бидиске с центром в начале координат.

Доказательство. (A) Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$ и разность $a_{11} - a_{22}$ диагональных элементов матрицы a равна 1 (иначе

коэффициенты при $z^{-(s+1)}$ изучаемых ниже рядов умножатся на $(a_{11}-a_{22})^s$, что не повлияет на принадлежность этих рядов тем или иным классам Жевре́я). По определению (II.2.1) имеем $Lq(z)=\mu(0,z)-I$, где $\mu(x,z)=I+\sum_{s=0}^{\infty}m_s(x)z^{-(s+1)}$ есть единственное решение дифференциального уравнения $\mu_x=(az+q(x))\mu-\mu az$ в классе формальных степенных рядов указанного вида с $m_s\in\mathcal{R}(0)$ для всех $s\geqslant 0$ такое, что ряд $\mu(0,z)-I$ внедиагонален. Обозначим через $u_s(x)=\sum_{t=0}^{\infty}\mu_t^s x^t$ элемент $(m_s)_{12}(x)$ матрицы $m_s(x)$. Из дифференциального уравнения, определяющего $\mu(x,z)$, получаем после приравнивания коэффициентов при соответствующих степенях z^{-1} и исключения диагональных элементов, что $\mu_t^0=-b_1\delta_{tk}$ и (доопределяя $\mu_t^s=0$ при $t<0$)

$$\mu_t^s=(t+1)\mu_{t+1}^{s-1}+b_1b_2(k-t)^{-1}\mu_{t-k-l-1}^{s-1},\qquad s,t\geqslant 0. \tag{2.9}$$

Отсюда видно, что μ_t^s отлично от 0 только если $s+t=k+j(k+l+2)$ для какого-либо $j\in\{0,1,\dots,s\}$. В частности, $u_s(x)$ есть полином степени $k-s+s(k+l+2)$ со старшим коэффициентом $(-b_1)^{s+1}b_2^s(s!)^{-1}(k+l+1)^{-s}$. Индукцией по $j\geqslant 0$ (а при каждом фиксированном j — индукцией по s от j до $k+j(k+l+2)$) убеждаемся, что если оба слагаемых в правой части равенства (2.9) отличны от 0, то их аргументы одинаковы. Тем самым $|\mu_t^s|\geqslant(t+1)|\mu_{t+1}^{s-1}|$ для всех $s\geqslant 1$, $t\geqslant 0$. Теперь та же индукция дает оценку

$$|\mu_0^{k+j(k+l+2)}|\geqslant(k+j(k+l+1))!|b_1|^{j+1}|b_2|^j(j!)^{-1}(k+l+1)^{-j}$$

для всех целых $j\geqslant 0$ (остальные μ_0^s равны 0). Поскольку $\mu_0^s=u_s(0)$, из этой оценки и формулы Стирлинга вытекает, что ряд $\sum_{s=0}^{\infty}(s!)^{-\alpha}u_s(0)x^s$ имеет нулевой радиус сходимости при любом $\alpha<(k+l)/(k+l+2)$, что и утверждалось.

(B) Как сказано выше, матричнозначный формальный степенной ряд (2.6) является решением уравнения (I.2.6) для $m=2i+1$. Начальное условие $q(x):=q_i(x,0)$ этого решения согласно (2.7) удовлетворяет условиям пункта (A) с $x_0=0$, $k=1$, $l=0$, $b_1=\alpha_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $b_2=1$. Из пункта (A) получаем, что $Lq\notin\mathrm{Gev}_\alpha$ ни при каком $\alpha<1/3$. В частности, $Lq\notin\mathrm{Gev}_{1/(2i+1)}$ и по теореме II.3(A) получаем, что локальная голоморфная задача Коши с начальным условием $q(x,0)=q_i(x,0)$ для уравнения (I.2.6) с $m=2i+1$ неразрешима. Следовательно, ее формальное решение $q_i(x,t)$ (и, тем самым, комплекснозначный степенной ряд $u_i(x,t)$) не сходится ни в каком бидиске с центром в начале координат. $\square$

Замечание 4. Утверждение (A) этой теоремы было установлено автором для ключевого частного случая $k=1$, $l=0$ (из которого и вытекает утверждение (B)), а затем распространено А. В. Домриной на все целые $k,l\geqslant 0$. Позднее

А. В. Комлов [94] показал, что в условиях утверждения (A) (и даже в более общем случае, когда $q_{12}(x)$ и $q_{21}(x)$ суть любые полиномы от x степеней k и l соответственно) всегда верно включение $Lq \in \mathrm{Gev}_\alpha$ при $\alpha = (k+l)/(k+l+2)$.

3. Нелинейное уравнение Шредингера

Следующая теорема содержит СМП для всех 3 версий нелинейного уравнения Шредингера, упомянутых в конце п. I.2.1, а также свойство продолжения вещественно-аналитических решений, определенных на подмножествах вещественной плоскости $\mathbb{R}^2_{xt}$, верное только для фокусирующей версии (I.2.10).

Теорема 4. (A) *Для всех $A, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $C \in \mathbb{R}$, уравнение*

$$iu_t = Au_{xx} + Bu|u|^2 + Cu \tag{3.1}$$

обладает СМП *во всех точках $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$, где под $|u|^2$ по определению понимается $u(x,t)\overline{u(\overline{x},\overline{t})}$.*

(B) *Задача Коши с начальным условием $u(x,0) = cx^k$ для уравнения* (3.1) *не имеет локального голоморфного решения ни в какой окрестности начала координат ни при каком выборе константы $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и целого числа $k \geqslant 2$.*

(C) *Всякое вещественно-аналитическое решение $u : \Pi \to \mathbb{C}$ фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера*

$$iu_t + au_{xx} + bu|u|^2 = 0, \qquad a, b > 0, \tag{3.2}$$

на прямоугольнике $\Pi = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x - x_0| < \varepsilon_1,\ |t - t_0| < \varepsilon_2\}$ с центром $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ продолжается до вещественно-аналитического решения $\widetilde{u} : S \to \mathbb{C}$ в полосе $S = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |t - t_0| < \varepsilon_2\}$ и, вообще говоря, не может быть аналитически продолжено ни через одну граничную точку этой полосы.

Доказательство. (A) Масштабированием с вещественными коэффициентами по осям x, t всякое уравнение вида (3.1) сводится к одному из 3 вариантов, указанных в примере (B) в конце п. I.2.1. (Если вещественные числа A, B одного знака, то используется редукция $v(x,t) = -\overline{u(\overline{x},\overline{t})}$, а диагональная матрица c_2 выбирается косоэрмитовой. Иначе используется редукция $v(x,t) = \overline{u(\overline{x},\overline{t})}$, а матрица c_2 выбирается эрмитовой.) Теперь требуемое утверждение вытекает из теоремы II.3(B).

(B) Согласно теореме 3(A), данные рассеяния $Lq_0(z)$ начального условия соответствующей задачи Коши для внедиагональной 2×2-матрицы $q(x,t)$, подразумеваемой в доказательстве пункта (A), не принадлежат Gev_α ни при

каком $\alpha < k/(k+1)$. В частности, $Lq_0 \notin \mathrm{Gev}_{1/2}$, поскольку $k \geqslant 2$. Следовательно, интересующая нас задача Коши неразрешима по теореме II.3(A).

(C) Всякая вещественно-аналитическая функция на множестве $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ однозначно продолжается до голоморфной функции на некотором открытом множестве $D \subset \mathbb{C}^2$, пересечение которого с $\mathbb{R}^2$ равно Π. Поэтому утверждение о возможности продолжить решение u в полосу S прямо следует из теоремы II.4(B). Пример решения, не продолжимого никуда дальше, можно построить с помощью теоремы Коши–Ковалевской ([46], гл. I, § 7), которая формально не применима к уравнению (3.2), но применима к эквивалентной ему системе

$$\alpha_t = -a\beta_{xx} - b(\alpha^2+\beta^2)\beta, \qquad \beta_t = a\alpha_{xx} + b(\alpha^2+\beta^2)\alpha$$

на вещественную и мнимую части функции $u(x,t) = \alpha(x,t) + i\beta(x,t)$. $\square$

Замечание 5. В пункте (A) легко построить контрпример к СМП в любой точке $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$, т.к. для любого ростка $u \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$ с $u(x_0,t_0) \neq 0$ формула (3.1) однозначно определяет $u(x,t)$ как голоморфный росток в точке $(\overline{x}_0, \overline{t}_0)$. Чтобы исключить такие тривиальные контрпримеры, следует рассматривать лишь решения $u \in \mathcal{O}(D)$ уравнения (3.1) на связных открытых множествах $D \subset \mathbb{C}^2$, инвариантных относительно инволюции $(x,t) \mapsto (\overline{x}, \overline{t})$. В этом случае существование продолжения функции $u(x,t)$ до глобально мероморфной функции от x при каждом допустимом t вытекает из того же рассуждения, что в пункте (A), дополненного соображениями аналитического продолжения из доказательства теоремы II.3(C).

Задача Коши, поставленная в пункте (B), разрешима при $k = 0$ (решение, зависящее только от t, легко строится явно) и при $k = 1$ (здесь локальное голоморфное решение уже не строится явно, но его существование вытекает из теоремы II.3(A) и замечания 4).

Наконец, результат пункта (C) о продолжимости всех вещественно-аналитических решений в полосу не имеет места для уравнений (3.1) с $C = 0$ и $AB < 0$: это вытекает из наличия вещественных полюсов у односолитонных решений дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера. Остается открытым вопрос, верен ли этот результат в случае, когда $AB < 0$, но $C \neq 0$. Конечно, начать изучение этого вопроса следует с рассмотрения решений, зависящих только от x.

4. Уравнения типа Кортевега–де Фриза

4.1. Формулировки результатов. Фиксируем целые числа $n, r \geqslant 2$ и на-

помним, что через $\mathcal{O}(x_0,t_0)$ обозначется множество ростков всех голоморфных функций в точке $(x_0,t_0)\in\mathbb{C}^2$. Следуя [14], [21], будем называть *уравнениями типа Кортевега–де Фриза* эволюционные уравнения вида

$$L_t=[P,L], \tag{4.1}$$

где неизвестные функции — это коэффициенты $u_0,u_1,\dots,u_{n-2}\in\mathcal{O}(x_0,t_0)$ линейного дифференциального оператора $L=\partial_x^n+\sum_{j=0}^{n-2}u_j(x,t)\partial_x^j$ порядка n, под L_t понимается оператор, полученный из L заменой всех его коэффициентов на их частные производные по t (и, очевидно, имеющий порядок не выше $n-2$), а оператор $P=\partial_x^r+\sum_{k=0}^{r-2}w_k(x,t)\partial_x^k$ выбирается так, чтобы порядок оператора $[P,L]:=PL-LP$ тоже не превосходил $n-2$. Это условие выражает коэффициенты $w_0,w_1,\dots,w_{r-2}\in\mathcal{O}(x_0,t_0)$ оператора P как некоторые полиномы от ростков $u_0,u_1,\dots,u_{n-2}$ и их производных по x, причем такое выражение единственно с точностью до $r-1$ произвольных констант, которые могут зависеть от t (см. предложение 2.3 в [14] или формулу (4.4) ниже). Например, из легко проверяемого тождества

$$[\partial_x^3+a\partial_x+b,\partial_x^2+c]=(3c'-2a')\partial_x^2+(3c''-a''-2b')\partial_x+(c'''+ac'-b''),$$

где $a,b,c\in\mathcal{O}(x_0,t_0)$, а штрихом обозначаются производные по x, непосредственно вытекает, что при $n=2$ и $r=3$ условие $\operatorname{ord}[P,L]\leqslant n-2$ эквивалентно системе равенств $w_1=\frac{3}{2}u+\gamma_1(t)$, $w_0=\frac{3}{4}u'+\gamma_0(t)$ для произвольных ростков $\gamma_0,\gamma_1\in\mathcal{O}(t_0)$ и тогда эволюционная задача (4.1) сводится к уравнению Кортевега–де Фриза на функцию $u=u_0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4}\frac{\partial^3u}{\partial x^3}+\left(\frac{3}{2}u+\gamma_1(t)\right)\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4.2}$$

а при $n=3$ и $r=2$ то же самое условие эквивалентно равенству $w_0=\frac{2}{3}u_1+\gamma_0(t)$ для произвольного ростка $\gamma_0\in\mathcal{O}(t_0)$ и тогда эволюционная задача (4.1) сводится (при любом выборе $\gamma_0(t)$) к системе Буссинеска

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}=\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2}-\frac{2}{3}\frac{\partial^3u_1}{\partial x^3}-\frac{2}{3}u_1\frac{\partial u_1}{\partial x},\qquad \frac{\partial u_1}{\partial t}=2\frac{\partial u_0}{\partial x}-\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}. \tag{4.3}$$

В общем случае все операторы вида $P=\partial_x^r+\sum_{k=0}^{r-2}w_k(x,t)\partial_x^k$, удовлетворяющие условию $\operatorname{ord}[P,L]\leqslant n-2$, задаются формулой

$$P=L_+^{r/n}+\sum_{k=0}^{r-2}\gamma_k(t)L_+^{k/n}, \tag{4.4}$$

где $\gamma_0, \dots, \gamma_{r-2} \in \mathcal{O}(t_0)$ — произвольные ростки, а $L_+^{k/n}$ при каждом целом $k \geqslant 2$ есть единственный оператор вида $\partial_x^k + \sum_{l=0}^{k-2} W_l(u_0, \dots, u_{n-2})\partial_x^l$, коммутатор которого с L имеет порядок не выше $n-2$ и коэффициенты которого W_l суть однородные полиномы веса $k-l$ от функций $u_0, u_1, \dots, u_{n-2}$ и их производных по x, если каждому моному $u_j^{(p)}$ приписать вес $n-j+p$. (Кроме того, по определению считается, что $L_+^{0/n}$ есть тождественный оператор, а $L_+^{1/n} = \partial_x$.) В литературе принято ограничиваться случаем, когда все ростки $\gamma_k(t)$ постоянны (как, например, в [14], формула (2.3)) или даже просто равны нулю (как, например, в [21], предложение (4.3)), хотя большинство результатов остаются справедливыми для любых $\gamma_k(t)$. Мы также будем следовать этой традиции, т.е. будем считать, что $\gamma_k(t) \equiv \gamma_k = \text{const}$ в равенстве (4.4). В этом случае эволюционная задача (4.1) представляет собой систему $n-1$ уравнений с частными производными вида

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = F_j(u_0, u_1, \dots, u_{n-2}), \qquad j = 0, 1, \dots, n-2, \tag{4.5}$$

где $F_0, F_1, \dots, F_{n-2}$ — некоторые полиномы от функций $u_0, u_1, \dots, u_{n-2}$ и их производных по x. Заметим, что формула (4.4) для оператора P будет далее использована только один раз (в доказательстве леммы 6), а явная запись системы (4.5), эквивалентной уравнению (4.1), и вовсе не потребуется, за исключением выписанных выше частных случаев (4.2) и (4.3).

Наша цель — изучить вопрос об аналитическом продолжении локально заданных голоморфных решений уравнения (4.1) или, эквивалентно, системы (4.5). При этом под решением понимается набор $u_0(x,t), u_1(x,t), \dots, u_{n-2}(x,t)$ всех коэффициентов оператора L. Основной результат таков.

Теорема 5. *Пусть $n, r \geqslant 2$ — взаимно простые целые числа. Пусть набор ростков $u_0, u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ удовлетворяет в окрестности данной точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ системе* (4.5)*, эквивалентной уравнению* (4.1) *для некоторого оператора P вида* (4.4) *с постоянными коэффициентами $\gamma_k(t) \equiv \gamma_k = \text{const}$, $k = 0, 1, \dots, r-2$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(A) *Все ростки $u_0(x,t_0), u_1(x,t_0), \dots, u_{n-2}(x,t_0) \in \mathcal{O}(x_0)$ допускают аналитическое продолжение до функций $\widetilde{u}_0(x), \widetilde{u}_1(x), \dots, \widetilde{u}_{n-2}(x)$, мероморфных на всей плоскости $\mathbb{C}_x^1$ комплексного переменного x.*

(B) *Оператор $\widetilde{L} := \partial_x^n + \sum_{j=0}^{n-2} \widetilde{u}_j(x)\partial_x^j$ обладает следующим свойством тривиальной монодромии во всех полюсах своих коэффициентов: при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$ обыкновенное дифференциальное уравнение $\widetilde{L}\varphi = \lambda\varphi$ имеет фун-*

даментальную систему решений, мероморфных на всей плоскости $\mathbb{C}^1_x$ *переменного* x. *Иными словами, любое решение* $\varphi \in \mathcal{O}(x_0)$ *уравнения* $\widetilde{L}\varphi = \lambda\varphi$ *аналитически продолжается до мероморфной функции на* $\mathbb{C}^1_x$.

(C) *Все полюсы каждой из функций* $\widetilde{u}_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, n-2$, *имеют порядок не выше* $n - j$.

(D) *Любое решение* $u_0, u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathcal{O}(D)$ *системы* (4.5) *в произвольном бидиске* $D := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x - x_0| < \delta_1,\ |t - t_0| < \delta_2\}$ *аналитически продолжается до набора мероморфных функций в полосе* $S := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t - t_0| < \delta_2\}$ *и, вообще говоря, не может быть аналитически продолжено дальше ни через одну граничную точку области* S.

(E) *Тем не менее, все решения* $u_0, u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ *общего положения* (*точное определение см. в п.*4.3) *допускают аналитическое продолжение до набора мероморфных функций на всем пространстве* $\mathbb{C}^2$ *переменных* x, t.

Следствие. *Уравнение Буссинеска*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + bu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.6}$$

обладает СМП *для всех* $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

В частности, оболочка мероморфности локального голоморфного решения уравнения Буссинеска всегда заполняет всю плоскость $\mathbb{C}^1$ в направлении x и может быть совершенно произвольной в направлении t. Аналогичные утверждения справедливы и для всех ростков $u_0, u_1, \dots, u_{n-2}$ в условиях теоремы 5, но мы не будем их сейчас точно формулировать и доказывать.

Доказательство теоремы 5 будет дано в п. 4.3 (после некоторой подготовки, занимающей п. 4.2), а доказательство следствия — в п. 4.4. Сделаем два замечания, касающиеся терминологии, литературы и известных результатов.

Замечание 6. Уравнения вида (4.1) для общих n, r впервые появились, по-видимому, в работах И. М. Кричевера [95] и И. М. Гельфанда и Л. А. Дикого [96] в 1976 г. Название “уравнения типа Кортевега–де Фриза” (мотивированное частным случаем (4.2)) закрепилось за ними после уже упоминавшихся работ В. Г. Дринфельда и В. В. Соколова [14] и Г. Сигала и Дж. Вильсона [21], относящихся к первой половине 80-ых. Семейство уравнений вида (4.1) с фиксированным n и всевозможными операторами P вида (4.4) (с постоянными $\gamma_k(t)$, а часто даже с $\gamma_k(t) \equiv 0$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$) называют еще “n-ой обобщенной иерархией КдФ” или “n-ой иерархией Гельфанда–Дикого”

(см., например, определение 1.4.4 и замечание 1.8.15 в книге Л. А. Дикого [15], где можно найти и дальнейшие ссылки на литературу). Используется также термин “скалярные уравнения Лакса” (см. § 2 работы [14] или § 1 главы 2 обзора [38]). Из обширной литературы, так или иначе затрагивающей уравнения вида (4.1), упомянем лишь монографии [15], [97] и обзорные статьи [98], [99]. Насколько мне известно, вопрос об аналитическом продолжении произвольных голоморфных решений уравнений типа Кортевега–де Фриза в литературе не рассматривался. Известные результаты для более узких классов голоморфных решений обсуждаются в следующем замечании.

Замечание 7. Оператор $L_0 = \partial_x^n + \sum_{j=0}^{n-2} q_j(x)\partial_x^j$ с коэффициентами $q_j \in \mathcal{O}(x_0)$ принято называть *конечнозонным*, если существует оператор $P_0 = \partial_x^m + \sum_{k=0}^{m-2} p_k(x)\partial_x^k$ с коэффициентами $p_k \in \mathcal{O}(x_0)$ такой, что m взаимно просто с n и $[P_0, L_0] \equiv 0$ в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{C}$. Известно (см. оригинальную работу [100] или обзор [38]), что в этом случае все ростки q_j и p_k продолжаются до мероморфных функций на $\mathbb{C}^1_x$ и что задача Коши для любого уравнения вида (4.1), удовлетворяющего условиям теоремы 5, с начальным условием “$L = L_0$ при $t = t_0$” имеет единственное решение L в окрестности точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$, причем это решение мероморфно на всем $\mathbb{C}^2$ и равенство $[P_0, L] \equiv 0$ сохраняется для всех $(x, t) \in \mathbb{C}^2$. Такие решения также называются *конечнозонными* (или *алгебро-геометрическими*). Они образуют один из наиболее изученных классов решений уравнений типа Кортевега–де Фриза и им посвящена необозримая литература, начинающаяся с работы С. П. Новикова [3]. Свойства, упомянутые в пунктах (A), (C), (E) теоремы 5, были аккуратно доказаны Сигалом и Вильсоном (см. [21], предложения (5.1), (5.17), теорему (6.10) и замечание (6.13)) для всех конечнозонных решений и даже для более общего класса так называемых *решений со сходящейся функцией Бейкера–Ахиезера* (в нашей терминологии, это те и только те локальные голоморфные решения, которые строятся с помощью теоремы I.1 или, эквивалентно, данные рассеяния которых принадлежат Gev_0; они также встречались нам в § I.5 под названием решений со сходящейся резольвентой). Свойство тривиальной монодромии (B) для конечнозонных решений *общих* уравнений типа Кортевега–де Фриза было впервые явно сформулировано, по-видимому, Р. Вейкардом [101], который также установил, что для операторов с рациональными коэффициентами, голоморфными на ∞, или глобально мероморфными периодическими коэффициентами, имеющими конечные пределы при $x \to \infty$ на обоих концах полосы периодов, это свойство *эквивалентно ко-*

нечнозонности. Отметим в связи с этим, что класс локальных голоморфных решений, о котором идет речь в теореме 5, далеко не исчерпывается ни конечнозонными решениями, ни даже решениями со сходящейся функцией Бейкера–Ахиезера. Это видно уже из пункта (D) теоремы 5. Более того, модифицируя пример из замечания II.4, можно показать, что и класс голоморфных решений общего положения, о котором идет речь в пункте (E) теоремы 5, хотя и содержит указанные специальные классы решений, но также не исчерпывается ими.

4.2. Подготовка к доказательству теоремы. Все утверждения теоремы 5 получаются применением результатов гл. II к солитонным уравнениям параболического типа, полученным из (4.1) посредством *редукции Дринфельда–Соколова* [14]. Эта редукция, основанная на замене линейного дифференциального уравнения n-го порядка системой n линейных уравнений 1-го порядка, применялась в [14] для построения и изучения аналогов уравнений типа Кортевега–де Фриза, отвечающих произвольным простым алгебрам Ли. В настоящем пункте приводятся нужные нам детали процесса редукции, часть из которых отсутствует в [14] и другой цитированной выше литературе. Отметим, что условие взаимной простоты r и n из теоремы 5 не используется в п. 4.2; его роль выяснится в п. 4.3(A) (см. замечание 9).

Лемма 4. *Пусть* $n, r \geqslant 2$ *и операторы* $L = \partial_x^n + \sum_{j=0}^{n-2} u_j(x,t)\partial_x^j$, $P = \partial_x^r + \sum_{k=0}^{r-2} w_k(x,t)\partial_x^k$ *с коэффициентами* $u_j, w_k \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$ *удовлетворяют уравнению* (4.1) *в окрестности точки* $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$. *Тогда при каждом* $\lambda \in \mathbb{C}$ *система*

$$L\psi = \lambda\psi, \qquad \psi_t = P\psi \tag{4.7}$$

имеет n *линейно независимых решений* $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$, *для которых* $n \times n$*-матрица* $\Psi(x,t,\lambda) := \|\partial_x^i \psi_j\|_{i,j=1}^n$ *невырождена. Более того, для любой невырожденной матрицы* $\Psi_0(\lambda) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ *существует единственный набор из* n *решений* $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$ *системы* (4.7) *с начальным условием* $\Psi(x_0,t_0,\lambda) = \Psi_0(\lambda)$.

Доказательство. Пусть ростки $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$ образуют при каждом t, близком к t_0, фундаментальную систему решений обыкновенного дифференциального уравнения $L\psi = \lambda\psi$. Тогда общее решение $\psi \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$ этого уравнения имеет вид $\psi(x,t) = \sum_{j=1}^n c_j(t)e_j(x,t)$ для произвольных ростков $c_j \in \mathcal{O}(t_0)$. Подставляя это выражение в уравнение $\psi_t = P\psi$ и обозначая

(только в этом доказательстве) производную по t штрихом, получаем условие

$$\sum_{j=1}^{n} c_j' e_j + c_j(e_j' - Pe_j) = 0 \tag{4.8}$$

на коэффициенты $c_1, \dots, c_n$. Но дифференцирование по t уравнения $Le_j = \lambda e_j$ дает, что $L'e_j + Le_j' = \lambda e_j'$, откуда, заменяя L' на $[P, L-\lambda]$ согласно уравнению (4.1), получаем равенство $(L-\lambda)(e_j' - Pe_j) = 0$. Разлагая решение $\varphi = e_j' - Pe_j \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ уравнения $L\varphi = \lambda\varphi$ по базису $e_1, \dots, e_n$, запишем $e_j' - Pe_j = \sum_{k=1}^{n} d_{jk} e_k$ для некоторых ростков $d_{jk} \in \mathcal{O}(t_0)$, зависящих только от t. Тогда условие (4.8) принимает вид

$$C'(t) = D(t)C(t), \tag{4.9}$$

где $C(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))^T$ есть столбец неизвестных коэффициентов, а $D(t)$ есть известная $n \times n$-матрица с элементами $D_{jk}(t) := -d_{kj}(t)$, $1 \leqslant j, k \leqslant n$. Для любого начального условия $C_0 \in \mathbb{C}^n$ система (4.9) имеет единственное голоморфное в окрестности точки t_0 решение $C(t)$ с $C(t_0) = C_0$, что эквивалентно требуемому заключению. $\square$

Из вспомогательной линейной системы (4.7) можно вывести следующую линейную систему на матрицу $\Psi(x, t, \lambda) = \|\partial_x^i \psi_j\|_{i,j=1}^n$:

$$\Psi_x = (\Lambda(\lambda) + U(x,t))\Psi, \qquad \Psi_t = R(x,t,\lambda)\Psi, \tag{4.10}$$

где все матричные элементы $n \times n$-матриц $\Lambda(\lambda)$ и $U(x,t)$ равны 0, кроме $\Lambda_{i,i+1}(\lambda) = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $\Lambda_{n1}(\lambda) = \lambda$ и $U_{nj}(x,t) = -u_{j-1}(x,t)$ при $1 \leqslant j \leqslant n-1$, а все матричные элементы $n \times n$-матрицы $R(x,t,\lambda)$ суть полиномы от λ с коэффициентами из $\mathcal{O}(x_0, t_0)$. При этом степени указанных полиномов не превосходят $A+1$ и коэффициент при λ^{A+1} в $R(x,t,\lambda)$ равен матрице $\Lambda(1)^B$, где целые числа $A \geqslant 0$ и $B \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ однозначно определены равенством $r = An + B$ (здесь учтено, что $\Lambda(\lambda)^n = \lambda I$ есть скалярное кратное тождественной $n \times n$-матрицы). Действительно, уравнение $L\psi = \lambda\psi$ на функцию $\psi \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ эквивалентно уравнению $\chi_x = (\Lambda(\lambda) + U(x,t))\chi$ на столбец $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)^T := (\psi, \psi', \dots, \psi^{(n-1)})^T$, а уравнение $\chi_t = R(x,t,\lambda)\chi$ получается в этих обозначениях из равенства $(\chi_j)_t = \psi_t^{(j-1)} = (P\psi)^{(j-1)} = \partial_x^{j-1}(\partial_x^r + \sum_{k=0}^{r-2} w_k \partial_x^k)\psi$ заменой $\partial_x^s\psi$ на χ_{s-1} при $1 \leqslant s \leqslant n$ и выражением всех $\partial_x^s\psi$ при $s \geqslant n+1$ через $\chi_1, \dots, \chi_n$ с помощью эквивалентной уравнению $L\psi = \lambda\psi$ формулы $\partial_x^n\psi = -\sum_{j=0}^{n-2} u_j \partial_x^j \psi + \lambda\psi$, а также формул, полученных из

нее дифференцированием по x надлежащее число раз. В качестве иллюстрации отметим, что для уравнения Кортевега–де Фриза (4.2) второе уравнение системы (4.10) записывается в виде

$$\Psi_t = \begin{pmatrix} w_0 - u' & \lambda - u + w_1 \\ (\lambda-u)^2 + (w_1 - u'')(\lambda - u) + w_0' + 2u'^2 & -2u'(\lambda-u) + w_1' + w_0 \end{pmatrix} \Psi,$$

а для системы Буссинеска (4.3) — в виде

$$\Psi_t = \begin{pmatrix} w_0 & 0 & 1 \\ \lambda - u_0 + w_0' & w_0 - u_1 & 0 \\ w_0'' - u_0' & \lambda - u_0 - u_1' + 2w_0' & w_0 - u_1 \end{pmatrix} \Psi. \tag{4.10$'$}$$

Согласно Айнсу [51], §5.21, следующее классическое утверждение о разложении дифференциального оператора n-го порядка в произведение n операторов 1-го порядка принадлежит Фробениусу и Флоке. Различные версии этого утверждения часто возникают в современных работах по теории интегрируемых систем (см., например, ссылки на литературу после формул (5.55)–(5.58) работы [99], или лемму в доказательстве теоремы 5 работы [102]). Приведенное ниже доказательство является модификацией решения задачи 62 отдела VII книги Полиа и Сеге [103]. Через $W(h_1, \dots, h_j)$ здесь и далее обозначается вронскиан функций $h_1, \dots, h_j$, т.е. $W(h_1, \dots, h_j) := \det \|\partial_x^k h_l\|_{k,l=1}^j$.

Лемма 5. *Пусть $L = \partial_x^n + \sum_{j=0}^{n-1} q_j(x)\partial_x^j$ для некоторых $q_0, \dots, q_{n-1} \in \mathcal{O}(x_0)$ и пусть $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{O}(x_0)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $Lh = 0$, причем все ростки $W_j(x) := W(h_1, \dots, h_j)(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, отличны от 0 в точке x_0. Положим $f_j(x) := W_j(x)/W_{j-1}(x)$ и $v_j(x) := f_j'(x)/f_j(x)$ при $1 \leqslant j \leqslant n$, считая $W_0(x) \equiv 1$. Тогда $L = (\partial_x - v_n(x)) \dots (\partial_x - v_1(x))$.*

Доказательство. Заметим, что для любого набора ростков $y_1, \dots, y_j \in \mathcal{O}(x_0)$ с $W(y_1, \dots, y_j)(x_0) \neq 0$ существует единственный оператор вида $K = \partial_x^j + \sum_{i=0}^{j-1} a_i(x)\partial_x^i$, $a_j \in \mathcal{O}(x_0)$, удовлетворяющий условию $Ky_1 = \dots = Ky_j = 0$. Этот оператор задается формулой $Ky = W(y_1, \dots, y_j, y)/W(y_1, \dots, y_j)$. (Действительно, существование вытекает из приведенной формулы, а единственность — из того, что разность двух таких операторов имеет порядок не выше $j-1$ и обращается в нуль на j линейно независимых функциях.) Положим $L_j := (\partial_x - v_j(x)) \dots (\partial_x - v_1(x))$ для $j = 1, \dots, n$. Тогда оператор L_1 по определению v_1 обращается в нуль на функции h_1 и следовательно, по замечанию, равен $W(h_1, \cdot)/W(h_1)$, а тогда по определению f_2 имеем $L_1 h_2 = f_2$. Индукцией по $j = 1, \dots, n$ точно так же получаем, что оператор L_j обращается в нуль

на ростках $h_1, \dots, h_j$ и следовательно равен $W(h_1, \dots, h_j, \cdot)/W(h_1, \dots, h_j)$, а тогда (если $j < n$) имеем $L_j h_{j+1} = f_{j+1}$. При $j = n$ свойство обращения L_n в нуль на $h_1, \dots, h_n$ вместе с единственностью выше дает, что $L_n = L$. $\square$

В обозначениях леммы 4 выберем матрицу $\Psi_0(0) = \Psi(x_0, t_0, 0)$ так, чтобы все ее главные миноры были отличны от 0. Тогда при любом фиксированном значении t, близком к t_0, применима лемма 5 с $q_j(x) = u_j(x,t)$ и $h_j(x) = \psi_j(x,t,0)$. Получаем набор ростков $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ такой, что

$$\partial_x^n + \sum_{j=0}^{n-2} u_j(x,t)\partial_x^j = L = (\partial_x - v_n(x,t)) \dots (\partial_x - v_1(x,t)) \tag{4.11}$$

в окрестности точки (x_0, t_0). Сравнивая коэффициенты при ∂_x^{n-1}, убеждаемся, что в данном случае $v_1 + \dots + v_n \equiv 0$.

Мы видели при выводе первого уравнения в (4.10), что каждое решение $\psi \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ уравнения $L\psi = \lambda\psi$ порождает по формулам $\chi_1 = \psi$, $\chi_2 = \psi'$, $\dots$, $\chi_n = \psi^{(n-1)}$ столбец $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)^T$, удовлетворяющий $\chi_x = (\Lambda(\lambda) + U(x,t))\chi$, и обратно. Аналогично этому, столбец $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T$, заданный формулами

$$\begin{aligned} &\eta_1 = \psi, \quad \eta_2 = (\partial_x - v_1)\psi, \quad \eta_3 = (\partial_x - v_2)(\partial_x - v_1)\psi, \\ &\dots, \qquad \eta_n = (\partial_x - v_{n-1}) \dots (\partial_x - v_1)\psi, \end{aligned} \tag{4.12}$$

удовлетворяет системе $\eta_x = (\Lambda(\lambda) + D(x,t))\eta$, где $D(x,t) := \operatorname{diag}(v_1(x,t), \dots, v_n(x,t))$ есть диагональная матрица с элементами $v_1, \dots, v_n$. Раскрытие скобок в формулах (4.12) линейно выражает ростки $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ через $\chi_1, \dots, \chi_n$ с коэффициентами, зависящими от $v_1, \dots, v_n$:

$$\eta_1 = \chi_1, \quad \eta_2 = \chi_2 - v_1\chi_1, \quad \eta_3 = \chi_3 - (v_1 + v_2)\chi_2 + (v_1 v_2 - v_1')\chi_1, \quad \dots$$

Получаем нижнетреугольную обратимую (с единицами на диагонали) $n \times n$-матрицу $M(x,t)$, все элементы которой суть полиномы от ростков $v_1, \dots, v_n$ и их производных по x, такую, что $n \times n$-матрица $Y(x,t,\lambda) := M(x,t)\Psi(x,t,\lambda)$ удовлетворяет уравнению $Y_x = (\Lambda(\lambda) + D(x,t))Y$. Дифференцируя формулу $Y = M\Psi$ по t и пользуясь вторым уравнением системы (4.10), заключаем, что

$$Y_x = (\Lambda(\lambda) + D(x,t))Y, \qquad Y_t = S(x,t,\lambda)Y, \tag{4.13}$$

где $S := M_t M^{-1} + MRM^{-1}$ есть полином от λ той же степени, что и $R(x,t,\lambda)$.

В качестве последнего этапа процесса редукции перейдем в базис, в котором матрица $\Lambda(\lambda)$ диагональна. При этом удобно ввести новый спектральный параметр $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ по формуле $\lambda = z^n$. Собственные значения матрицы $\Lambda(z^n)$ суть $z\alpha_1, \dots, z\alpha_n$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — все корни n-ой степени из единицы, перечисленные в произвольном порядке, а соответствующие собственные векторы имеют вид $e_j = (1, z\alpha_j, \dots, (z\alpha_j)^{n-1})^T$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Поэтому для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ выполнено равенство $K(z)^{-1}\Lambda(z^n)K(z) = az$, где $a := \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ есть диагональная матрица с элементами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, а столбцами матрицы $K(z)$ служат указанные выше собственные векторы, т.е. имеем $K_{ij}(z) := (z\alpha_j)^{i-1}$ при $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Заметим, что $K(z) = \Delta(z)K(1)$, где $\Delta(z) := \operatorname{diag}(1, z, \dots, z^{n-1})$ — диагональная матрица. Поэтому матрица

$$q(x,t) := K(z)^{-1}D(x,t)K(z) = K(1)^{-1}D(x,t)K(1)$$

не зависит от z. Пользуясь тем, что сумма $\alpha_1^l + \ldots + \alpha_n^l$ равна n при $l = 0$ и 0 при остальных целых l из интервала $-n < l < n$, легко найти матричные элементы $(K(1)^{-1})_{ij} = n^{-1}\alpha_i^{1-j}$ и $q_{ij}(x,t) = n^{-1}\sum_{k=1}^n v_k(x,t)(\alpha_i^{-1}\alpha_j)^{k-1}$ при $1 \leqslant i, j \leqslant n$. В частности, благодаря свойству $v_1 + \ldots + v_n \equiv 0$ имеем $q_{ii}(x,t) \equiv 0$ при всех $i = 1, \dots, n$, т.е. матрица $q(x,t)$ оказывается *внедиагональной*.

Система (4.13) переписывается в терминах новой неизвестной $n \times n$-матрицы $E(x,t,z) := K(z)^{-1}Y(x,t,z^n) = K(z)^{-1}M(x,t)\Psi(x,t,z^n)$ в следующем виде:

$$E_x = (az + q(x,t))E, \qquad E_t = V(x,t,z)E, \tag{4.14}$$

где про $n \times n$-матрицу $V(x,t,z) := K(z)^{-1}S(x,t,z^n)K(z)$ как функцию от z пока можно сказать только то, что она имеет вид

$$V(x,t,z) = \sum_{k=-n}^{r+n} p_k(x,t)z^k$$

для некоторых матриц $p_k(x,t)$. Например, отрицательные степени z могли бы появиться в этом выражении благодаря тому, что $\{\Delta(z)^{-1}S(x,t,z^n)\Delta(z)\}_{ij} = z^{j-i}S_{ij}(x,t,z^n)$ для всех $i, j = 1, \dots, n$.

Следующая ключевая лемма Дринфельда и Соколова гласит, что на самом деле $V(x,t,z)$ есть полином степени r от z со старшим коэффициентом a^r, а остальные коэффициенты этого полинома выражаются указанным в лемме каноническим образом через диагональную матрицу a, внедиагональный

росток $q \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ и коэффициенты $\gamma_k(t) \equiv \gamma_k \in \mathbb{C}$ из представления (4.4) оператора P. Для формулировки леммы нам будет удобно доопределить последовательность $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{r-2}$ коэффициентов из равенства (4.4), полагая $\gamma_{r-1} := 0$ и $\gamma_j := 0$ для всех целых $j < 0$.

Лемма 6. *При всех целых $k < 0$ или $k > r$ имеем $p_k(x,t) \equiv 0$, а при всех $k = 0, 1, \dots, r$ справедливы равенства $p_k(x,t) = F_{r-k}(q)(x,t)$, где $F_0, F_1, F_2, \dots$ есть единственная последовательность дифференциальных полиномов такая, что $F_0(\varkappa) \equiv a^r$, $F_j(0) \equiv \gamma_{r-j} a^{r-j}$ для всех $j = 1, 2, \dots$ и формальный степенной ряд $\Phi(\varkappa, z) := \sum_{j=0}^{\infty} F_j(\varkappa) z^{-j}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\partial_x \Phi(\varkappa, z) = [az + \varkappa, \Phi(\varkappa, z)]$ тождественно по $\varkappa \in \mathcal{R}_{\mathrm{od}}(x_0)$ и по z. В частности, $p_r(x,t) \equiv a^r$.*

Доказательство. Существование и единственность набора дифференциальных полиномов с указанными свойствами доказаны в лемме I.1. Они могут быть также получены из предложения 1.2 и описания пространства Ω_L перед формулой (1.3) в [14]. Сами же утверждения леммы эквивалентны формуле для $\overline{\mathcal{A}}$, находящейся в описании модифицированных уравнений Лакса между леммой 3.23 и предложением 3.24 работы [14], стр. 117, с учетом обозначений п. 4.1 и формулы (2.3) из [14] (последняя по существу совпадает с нашей формулой (4.4)). $\square$

Замечание 8. Проиллюстрируем содержательность заключения леммы 6 на примере системы Буссинеска (4.3). Непосредственное вычисление на основе формулы (4.10′) дает, что в этом случае матрица S из второго уравнений системы (4.13) имеет вид

$$S(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} w_0 + v_1^2 + v_1' & v_1 + v_2 & 1 \\ \lambda - A & w_0 - u_1 - v_1(v_1 + v_2) & -v_1 \\ C & \lambda - B & w_0 - u_1 - v_1' \end{pmatrix},$$

где не зависящие от λ выражения A, B, C заданы формулами

$$\begin{aligned} A =& v_{1t} + u_0 - w_0' + v_1(u_1 + v_1' + v_1^2), \\ B =& (v_1 + v_2)_t - (v_1 + v_2)(v_1 v_2 - v_1') + u_0 + u_1' - 2w_0', \\ C =& (v_1 v_2 - v_1')_t - v_1(v_1 + v_2)_t + w_0'' - u_0' + (v_1' + v_1^2) v_1 v_2. \end{aligned}$$

Часть заключения леммы 6 (а именно, равенства $p_{-2}(x,t) \equiv 0$ и $p_{-1}(x,t) \equiv 0$) в данном случае состоит в том, что справедливы тождества $A = B = C = 0$ для всех функций вида

$$v_1 := \frac{\psi_1'}{\psi_1}, \qquad v_2 := \frac{(\psi_1 \psi_2' - \psi_1' \psi_2)'}{\psi_1 \psi_2' - \psi_1' \psi_2} - \frac{\psi_1'}{\psi_1},$$

где $\psi_1(x,t)$ и $\psi_2(x,t)$ — любые решения системы уравнений $\psi''' + u_1\psi' + u_0\psi = 0$, $\psi_t = \psi'' + w_0\psi$ с условием, что знаменатели обеих дробей, входящих в формулы для v_1 и v_2, отличны от 0 в точке (x_0, t_0). Вероятно, читатель согласится, что прямая проверка указанных тождеств была бы по меньшей мере громоздка.

4.3. Доказательство теоремы 5. (A) Согласно лемме 6, вспомогательная линейная система (4.14) имеет вид

$$E_x = UE, \qquad E_t = VE, \tag{4.15}$$

где $U = az + q$ и $V = \sum_{k=0}^{r} F_{r-k}(q)z^k$ суть полиномы от z с матричнозначными коэффициентами, зависящими от x, t. Если хотя бы при одном значении $z \in \mathbb{C}$ эта система имеет голоморфное решение $E : \Omega \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ на некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}^2_{xt}$, то внедиагональная матричнозначная функция $q : \Omega \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, определяющая коэффициенты системы, удовлетворяет условию совместности $U_t - V_x + [U, V] = 0$ (получаемому приравниванием друг другу вторых производных $E_{xt} = (UE)_t$ и $E_{tx} = (VE)_x$ и сокращением на обратимую матрицу E), которое согласно п. I.2.1 не зависит от z и может быть записано в виде

$$q_t = [a, F_{r+1}(q)]. \tag{4.16}$$

Уравнение (4.16) является солитонными уравнениями параболического типа в смысле определения, данного в п. I.2.1 перед формулой (I.2.7). А именно, (4.16) есть не что иное как уравнение (I.2.6) (или, эквивалентно, (II.3.1)) с номером $m = r$, заданное диагональными $n \times n$-матрицами $a = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $b = a^r$, $c_j = \gamma_{r-j}a^{r-j}$, $j = 1, 2, \dots, r$.

По каждому решению $u_0, u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ системы (4.5), эквивалентной уравнению (4.1) для данных $\gamma_k(t) \equiv \gamma_k = \mathrm{const}$ в (4.4), мы строим (как указано в п. 4.2) диагональную матрицу $D(x,t)$ с элементами из $\mathcal{O}(x_0, t_0)$ и решение $E : \Omega \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ системы (4.15) (для внедиагональной матрицы $q(x,t) = K(1)^{-1}D(x,t)K(1)$) в некоторой малой окрестности $\Omega \subset \mathbb{C}^2_{xt}$ точки (x_0, t_0) при произвольном фиксированном значении $z = z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Для этого построения, согласно леммам 4 и 5, нам достаточно выбрать (произвольным образом) матрицу $\Psi_0(0) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, все главные миноры которой отличны от 0, и матрицу $\Psi_0(\lambda_0) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, где $\lambda_0 := z_0^n$. По теореме II.3(B), полученное голоморфное внедиагональное решение $q : \Omega \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ уравнения (4.16) аналитически продолжается при каждом фиксированном значении t, близком к t_0

(в том числе и для $t = t_0$) до глобально мероморфной функции от x. Но тогда такое же аналитическое продолжение имеет место и для всех элементов $v_1(x,t), \dots, v_n(x,t)$ диагональной матрицы $D(x,t) = K(1)q(x,t)K(1)^{-1}$, а значит (благодаря получающимся раскрытием скобок в (4.11) выражениям для $u_0, \dots, u_{n-2}$ в виде полиномов от функций $v_1, \dots, v_n$ и их производных) и для коэффициентов $u_0(x,t), \dots, u_{n-2}(x,t)$ оператора L.

Замечание 9. Для применимости теоремы II.3(B) требуется, чтобы матрица $b = a^r$ (старший коэффициент полинома $V(x,t,z)$ в системе (4.15)) имела простой спектр, т.е. чтобы все ее собственные значения были различны. Для нашей матрицы $a = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, диагональные элементы которой суть все корни n-ой степени из 1, это условие выполнено *тогда и только тогда, когда r и n взаимно просты*. Заметим, что при r делящемся на n доказываемая теорема 5 очевидно неверна (можно взять в качестве оператора P надлежащую степень оператора L). Вопрос о том, верна ли она (или часть ее утверждений) в случае, когда $r, n \geqslant 2$ не взаимно просты, но r не делится на n, остается открытым.

(B) По теореме II.3(B), первое уравнение $E_x = (az + q(x,t))E$ системы (4.15) имеет глобально мероморфную по x фундаментальную систему решений при каждом t, близком к t_0 (в том числе и при $t = t_0$) и при каждом $z \in \mathbb{C}$. Возвращаясь к оператору $\widetilde{L} = \partial_x^n + \sum_{j=0}^{n-2} \widetilde{u}_j(x)\partial_x^j$, заметим, что при каждом $\lambda = z^n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и при всех x в окрестности точки x_0 обыкновенное дифференциальное уравнение $\widetilde{L}\varphi = \lambda\varphi$ имеет фундаментальную систему решений $\Psi(x, t_0, \lambda) = M(x,t_0)^{-1}K(z)E(x,t_0,z)$ (см. определение $E(x,t,z)$ перед формулой (4.14)), которая в силу только что сказанного (а также благодаря тому отмеченному перед формулой (4.13) факту, что $n \times n$-матрица $M(x,t_0)$ нижнетреугольна с единицами на диагонали и все ее элементы суть полиномы от функций $v_1(x,t_0), \dots, v_n(x,t_0)$ и их производных по x) продолжается до глобально мероморфной обратимой матричнозначной функции от x. Тем самым свойство тривиальной монодромии для оператора $\widetilde{L}$ доказано для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

При $\lambda = 0$ предыдущее рассуждение не проходит (например, матрица $K(z)$ становится необратимой), но само свойство тривиальной монодромии остается в силе, т.к. получается из уже доказанного случая предельным переходом $\lambda \to 0$. Действительно, обозначим через B множество всех полюсов коэффициентов оператора $\widetilde{L}$. Оно дискретно и не более чем счетно. Рассмотрим любое решение $\varphi \in \mathcal{O}(x_0)$ уравнения $\widetilde{L}\varphi = 0$ в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{C} \setminus B$

и обозначим решение уравнения $\widetilde{L}\varphi = \lambda\varphi$ с теми же начальными данными в точке x_0 через $\varphi(x,\lambda)$. Тогда при $0 < |\lambda| < 1$ функции $\varphi(x,\lambda)$ глобально мероморфны (по доказанному), равномерно ограничены на компактных подмножествах области $\mathbb{C}\setminus B$ (по неравенству Гронуолла) и при $\lambda \to 0$ сходятся к $\varphi(x)$ равномерно в окрестности точки x_0 (по теореме о непрерывной зависимости решений от параметра). Отсюда по принципу компактности следует, что они сходятся равномерно на компактах в $\mathbb{C}\setminus B$ и, тем самым, задают аналитическое продолжение ростка $\varphi(x)$ до голоморфной функции на $\mathbb{C}\setminus B$. Осталось доказать, что возможные особенности функции $\varphi(x)$ в точках множества B могут быть только полюсами.

Для этого заметим, что все особые точки $x_s \in B$ обыкновенного дифференциального уравнения $\widetilde{L}\psi = \lambda\psi$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, в силу доказанного выше являются *регулярными* (т.е. все решения $\psi(x)$ имеют не более чем степенной рост при $|x - x_s| \to 0$, $|\arg(x - x_s)| \leqslant C = \mathrm{const}$). По классической теореме Фукса (см. § 15.3 книги Э. Л. Айнса [51] или прекрасное современное изложение в лекциях А. А. Болибруха [10], теорема 4.2), это свойство указанного уравнения эквивалентно тому, что его коэффициент при $\psi^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, имеет в точке $x = x_s$ не более чем полюс порядка $n - j$. Иными словами, $(x - x_s)^{n-j}\widetilde{u}_j(x) \in \mathcal{O}(x_s)$ при $j = 1, \dots, n-2$ и $(x - x_s)^n(\widetilde{u}_0(x) - \lambda) \in \mathcal{O}(x_s)$. Но если эти включения выполнены хотя бы при одном $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, то они выполнены и при $\lambda = 0$. Следовательно, все особые точки уравнения $\widetilde{L}\varphi = 0$ регулярны. Поскольку мы уже знаем, что все решения $\varphi(x)$ этого уравнения голоморфны на $\mathbb{C}\setminus B$, отсюда вытекает, что в точках $x_s \in B$ они могут иметь не более чем полюсы. Этим свойство тривиальной монодромии при $\lambda = 0$ доказано.

(C) Мы только что получили требуемую оценку на порядки полюсов коэффициентов оператора $\widetilde{L}$ из свойства тривиальной монодромии (хотя бы при одном $\lambda \in \mathbb{C}$) и теоремы Фукса. Но можно вывести эту оценку и напрямую (т.е. не ссылаясь явно на теорему Фукса) из формулы (4.11) и следующей леммы, пункт (B) которой использовался в доказательстве теоремы 2(B).

Лемма 7. (A) *Все функции $v_j(x, t_0)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, являются логарифмическими производными некоторых глобально мероморфных функций от x. В частности, все их полюсы — это полюсы первого порядка с целыми вычетами.*

(B) *Любое локальное голоморфное по x, t (и, тем самым, глобально мероморфное по x) решение $u(x,t)$ уравнения Кортевега–де Фриза* (4.2) *с $\gamma_1(t) \equiv 0$*

имеет по x не более чем полюсы второго порядка с нулевым вычетом.

Доказательство. (A) Из уже доказанного утверждения (B) теоремы 5 вытекает, что все элементы матрицы $\Psi(x, t_0, 0)$ продолжаются до глобально мероморфных функций от x. Следовательно, то же верно и для вронскианов $W_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, определенных в формулировке леммы 5, а значит и для функций $f_j(x) = W_j(x)/W_{j-1}(x)$, логарифмическими производными которых и являются $v_j(x, t_0)$.

(B) Уравнение (4.2) получается из (4.1) при $n = 2$, $r = 3$. В этом случае разложение (4.11) принимает вид $\partial_x^2 + u = (\partial_x - v_2)(\partial_x - v_1)$, где $v_1 + v_2 \equiv 0$. Отсюда $u = -\partial_x v_1 - v_1^2$. Согласно пункту (A) настоящей леммы, если функция $v_1(x, t_0)$ имеет полюс при $x = x_0$, то главная часть ее ряда Лорана в проколотой окрестности точки x_0 равна $k(x - x_0)^{-1}$ для некоторого целого $k \neq 0$. Тогда главная часть ряда Лорана функции $u(x, t_0)$ в проколотой окрестности точки x_0 равна $-(k + k^2)(x - x_0)^{-2}$ (что, кстати, согласуется и с формулой из замечания 3 при $a = 1/4$ и $b = 3/2$ в случае, если $k \geqslant 1$). $\square$

(D) Существование мероморфного продолжения из бидиска D в полосу S выводится из теоремы II.3(B) тем же рассуждением, что и в пункте (A) настоящего доказательства. Пример решения, не продолжимого никуда дальше, получается из соответствующего примера теоремы II.3(B) по формулам (4.11), а его непродолжимость ясна из выражений функций v_j через вронскианы в лемме 5 с учетом утверждения (B) доказываемой теоремы.

(E) Каждому оператору вида $L_0 = \partial_x^n + \sum_{j=0}^{n-2} u_j(x)\partial_x^j$ с коэффициентами $u_0, u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathcal{O}(x_0)$ конструкция, проведенная в п. 4.2, сопоставляет росток голоморфной внедиагональной $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значной функции $q_0(x)$ в точке x_0. При этом мы можем выбирать произвольную матрицу $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, все главные миноры которой отличны от нуля, в качестве начального условия в лемме 4 и произвольный способ упорядочения корней из единицы в матрице $a = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Обозначим результат этой конструкции через $q_0^{A,a}(x)$.

Тогда теорема II.3(A) и рассуждения пункта (A) настоящего доказательства дают следующий критерий разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для уравнения (4.1), где $r, n \geqslant 2$ — любые взаимно простые целые числа, а P — любой фиксированный оператор вида (4.4) с постоянными коэффициентами $\gamma_k(t) = \gamma_k \equiv \mathrm{const}$, $k = 0, 1, \dots, r - 2$. Задача Коши с начальным условием

$$L = L_0 \quad \text{при} \quad t = t_0$$

для уравнения (4.1) имеет локальное голоморфное решение вида $L = \partial_x^n + \sum_{j=0}^{n-2} u_j(x,t)\partial_x^j$ с коэффициентами $u_0, u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ тогда и только тогда, когда для некоторого (и в этом случае для любого) выбора параметров A, a выполнено условие $Lq_0^{A,a} \in \mathrm{Gev}_{1/r}$. Конечно, в этом условии буква L означает формальное преобразование Лапласа, определенное в гл. II, а отнюдь не решение уравнения (4.1).

Исходя из этого критерия, назовем начальное условие L_0 *оператором общего положения*, если существуют параметры A, a такие, что $Lq_0^{A,a} \in \mathrm{Gev}_\alpha$ для некоторого $\alpha < 1/r$. В этом случае теорема II.3(D) гарантирует, что все коэффициенты $u_0, u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ решения L указанной задачи Коши допускают аналитическое продолжение до глобально мероморфных функций на всем пространстве $\mathbb{C}^2$. Доказательство утверждения (E), а с ним и всей теоремы 5, закончено.

4.4. Доказательство следствия. Меняя масштаб по осям x и t, можно считать, что коэффициенты a, b в уравнении (4.6) принимают значения $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{4}{3}$. Любое решение $u \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ полученного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{3}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{4.17}$$

порождает решение $u_0, u_1 \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ (фактически даже однопараметрическое семейство решений) системы Буссинеска (4.3) по формулам

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad u_1 = u, \tag{4.18}$$

где $\varphi \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ — любое решение системы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{4}{3}u\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4.19}$$

необходимым и достаточным условием разрешимости которой является уравнение (4.17). Действительно, подставляя (4.18) в (4.3), немедленно видим, что первое уравнение (4.3) выполняется благодаря второму уравнению (4.19) и равенству $\varphi_{xx} = u_{tx}$, вытекающему из первого уравнения (4.19), а второе уравнение (4.3) прямо следует из первого уравнения (4.19).

Теперь СМП для уравнения (4.17) (и, тем самым, для уравнения Буссинеска (4.6)) непосредственно следует из пункта (D) теоремы 5.

ГЛАВА IV. НЕКОММУТАТИВНЫЙ КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ: ТЕОРИЯ УНИТОНОВ

1. Введение

Пожалуй, самый простой и важный пример уравнений нулевой кривизны (I.1.1) с *геометрически различными* множествами полюсов рациональных функций U и V возникает в случае, когда $U(x,t,z) = a(x,t)(1-z)^{-1}$, $V(x,t,z) = b(x,t)(1+z)^{-1}$. После необходимого выбора в качестве коэффициентов a и b логарифмических производных $a = \varphi_x\varphi^{-1}$ и $b = \varphi_t\varphi^{-1}$ некоторого $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-значного отображения $\varphi(x,t)$, а также после перехода по формулам $2x = t' + x'$, $2t = t' - x'$ к новым переменным x', t', в обозначениях которых мы далее опускаем штрихи, получается уравнение главных киральных полей (см. [1], стр. 227–244 или [2], стр. 180–210)

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} = \varphi_t\varphi^{-1}\varphi_t - \varphi_x\varphi^{-1}\varphi_x \tag{1.1}$$

на голоморфное отображение $\varphi : \Omega \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ из некоторого бидиска $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x - x_0| < \varepsilon_1, |t - t_0| < \varepsilon_2\}$ с центром $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ в группу всех обратимых комплексных $n \times n$-матриц, причем $\varphi(x,t) \in U(n)$ для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \cap \Omega$. Иными словами, речь идет об уравнении гармонических отображений $\mathbb{R}^2 \to U(n)$ в случае, когда пространство $\mathbb{R}^2$ снабжено лоренцевой метрикой, а унитарная группа $U(n)$ — стандартной инвариантной относительно сдвигов римановой метрикой. Это уравнение уже упоминалось в замечании I.2 в связи с модификацией метода одевания, предложенной И. М. Кричевером. Об изучении уравнения (1.1) с позиций теории интегрируемых систем, кроме упомянутых выше ссылок, говорится в монографиях [104], [105] и обзорных статьях [106], [107].

Вопросы, интересовавшие нас в главах I–III (такие, как разрешимость локальной голоморфной задача Коши или принудительное аналитическое продолжение решений) становятся для уравнения (1.1) тривиальными в силу гиперболического характера этого уравнения. А именно, локальная голоморфная задача Коши всегда разрешима по теореме Коши–Ковалевской, и поэтому

оболочки голоморфности и мероморфности решений в направлениях обеих координатных осей могут быть совершенно произвольными. Таким образом, в этом аспекте комплексного анализа линейные и нелинейные объекты (т.е. гармонические отображения в плоское и искривленное многообразия) ведут себя одинаково.

Однако обнаруженная Уленбек [32] фундаментальная роль, которую в описании решений *евклидова* (т.е. получающегося заменой x на ix) варианта уравнений (1.1) играет операция *добавления унитона* (специальный предельный случай операции добавления солитона (I.2.28)), открывает возможность *другого нелинейного обобщения*: здесь на нелинейный случай переносится хорошо известная связь между голоморфными и гармоническими функциями. В настоящей главе результаты Уленбек и других авторов (подробнее изложенные в п. 1.1 ниже) переносятся на *некоммутативную* или *квантовую* версию уравнения гармонических отображений из плоскости $\mathbb{R}^2$ (или сферы S^2) в унитарную группу $U(n)$. Это позволяет нам установить, что при надлежащем выборе единиц измерения энергия любого решения либо бесконечна, либо является целым числом, и явно описать все решения малой энергии (вплоть до энергии 5 при $n = 1$). Таким образом, в этом аспекте удается продвинуться в некоммутативной версии дальше, чем в обычной[1]. Кроме того, структура различных естественно возникающих частных классов решений и связи между этими классами становятся намного более ясными, чем это было бы возможно без теории унитонов.

1.1. Гармонические отображения из S^2 в $U(n)$. Напомним здесь нужные нам свойства этих "коммутативных двойников" изучаемых ниже объектов (подробное изложение с многочисленными ссылками на литературу содержится, например, в [105]–[107]). Рассмотрим функционал энергии (здесь и далее независимые переменные на $\mathbb{R}^2$ обозначаются через x, y вместо x, t)

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{C}} |\varphi^{-1}d\varphi|^2\, dxdy = 2\int_{\mathbb{C}} |\varphi^{-1}\overline{\partial}\varphi|^2\, dxdy \tag{1.2}$$

на множестве всех гладких отображений $\varphi : \mathbb{C} \to U(n)$. Здесь $\overline{\partial}\varphi = (\varphi_x + i\varphi_y)/2$ означает производную по $\overline{z}$, а норма матрицы A определяется как $|A|^2 = \mathrm{tr}(AA^*)$. *Гармонические отображения из S^2 в $U(n)$* — это критические точки

[1] Где неизвестно уже описание всех решений энергии 4 при $n = 3$. Впрочем, в некоммутативной $U(n)$-модели с $n \geqslant 2$ пока отсутствует даже математически корректная постановка вопроса об описании *всех* (интересующих физиков) решений данной энергии, см. п. 1.3.

функционала $E(\varphi)$ или, эквивалентно, решения конечной энергии уравнений Эйлера–Лагранжа[2]

$$\partial(\varphi^{-1}\overline{\partial}\varphi) + \overline{\partial}(\varphi^{-1}\partial\varphi) = 0,$$

где $\partial\psi = (\psi_x - i\psi_y)/2$ означает производную по z. Простейшие примеры таких решений задаются голоморфными и антиголоморфными отображениями из $S^2 = \mathbb{C}P^1$ в комплексный грассманиан $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$, вложенный в унитарную группу $U(n)$ в качестве вполне геодезического подмногообразия по формуле $V \mapsto \varphi = I - 2Q$, где $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ есть ортопроектор с образом V.

Голоморфные и антиголоморфные решения не исчерпывают множества всех *грассмановых решений* (т.е. решений со значениями в некотором $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$) за исключением случая, когда $n = 2$ и $k = 1$. Однако всякое грассманово решение получается из голоморфных и антиголоморфных посредством конечного числа геометрических модификаций: на каждом шагу мы вычитаем некоторое голоморфное подрасслоение из образа Q и добавляем некоторое голоморфное подрасслоение ядра Q. Это дает достаточно явное описание пространства модулей всех таких решений.

Конструкция К. Уленбек [32] дает аналогичную факторизацию для всех (не обязательно грассмановых) решений. А именно, для любого гармонического отображения $\varphi : S^2 \to U(n)$ найдется последовательность гармонических отображений $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m : S^2 \to U(n)$ такая, что φ_0 есть постоянное отображение (или, эквивалентно, решение нулевой энергии), $\varphi_m = \varphi$, а каждое отображение φ_{j+1} получается из φ_j добавлением некоторого φ_j-унитона. Последнее означает, что $\varphi_{j+1}(\zeta) = \varphi_j(\zeta)(I - 2P_j(\zeta))$ для некоторого семейства $\{P_j(\zeta) \,|\, \zeta \in \mathbb{C}\}$ ортопроекторов на $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих уравнениям

$$PAP^\perp = 0, \qquad P^\perp AP + 2P^\perp\overline{\partial}P = 0, \tag{1.3}$$

где $P = P_j$ есть указанное семейство проекторов, а $A = \varphi_j^{-1}\overline{\partial}\varphi_j$ есть логарифмическая $\overline{\partial}$-производная отображения φ_j. В частности, если $A = 0$, то уравнения (1.3) сводятся к условию $P^\perp\overline{\partial}P = 0$, означающему, что P есть антиголоморфное отображение из $\mathbb{C}P^1$ в соответствующий грассманиан (или, эквивалентно, отображение $P^\perp = I - P$ голоморфно). Дж. Валли [108] вывел из уравнений (1.3) формулу для скачка энергии

$$E(\varphi_{j+1}) - E(\varphi_j) = 8\pi c_1(P_j)[S^2], \tag{1.4}$$

[2]Это и есть евклидов аналог уравнений (1.1), который в дальнейшем будет перенесен на некоммутативный случай, см. утверждение 3 в п. 2.1.

где $c_1(P_j)$ есть первый класс Чженя векторного расслоения на S^2, слоем которого над точкой $\zeta \in S^2$ является образ проектора $P_j(\zeta)$, а правая часть (1.4) с точностью до множителя 8π равна значению этого класса когомологий на фундаментальном цикле базы $[S^2] \in H_2(S^2)$. Поскольку числа $c_1(P_j)[S^2]$ всегда целые, отсюда вытекает, что энергия любого гармонического отображения из S^2 в $U(n)$ есть целое кратное 8π. С помощью этих результатов к концу 80-ых годов было получено сравнительно явное описание[3] множества всех гармонических отображений из S^2 в $U(n)$ для $n \leqslant 4$. Однако энергию (а также другие целочисленные инварианты) построенных решений очень нелегко вычислить через параметры, участвующие в этом описании, и такое положение вещей сохраняется вплоть до самых последних достижений в области явных параметризаций (см. обзор [107] (2002) и работу [109] (2010)).

1.2. Некоммутативный вариант задачи. Для описания физически мотивированного некоммутативного аналога функционала (1.2) введем следующие обозначения. Пусть H есть сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_0, e_1, \dots\}$. Оператор a с областью определения $\mathrm{dom}(a) = \{x \in H \mid \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)|x_j|^2 < \infty\}$, действующий по формуле $a(e_j) = \sqrt{j}e_{j-1}$ для $j = 0, 1, 2, \dots$, хорошо известен в квантовой механике и носит название стандартного оператора уничтожения. Сопряженный к нему оператор a^* имеет ту же область определения $\mathrm{dom}(a^*) = \mathrm{dom}(a)$ и действует по формуле $a^*(e_j) = \sqrt{j+1}e_{j+1}$. Рассмотрим плотные в H подпространства

$$D_k := \{x \in H \mid \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^k|x_j|^2 < \infty\}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{1.5}$$

Пространство $D_k = \mathrm{dom}(a^k) = \mathrm{dom}(a^{*k})$ является областью определения любого произведения k операторов a, a^*. При этом $a(D_k) \subset D_{k-1}$ и $a^*(D_k) \subset D_{k-1}$ для всех $k \geqslant 1$. Оператор $a : D_1 \to D_0 = H$ замкнут, плотно определен на H и удовлетворяет каноническому коммутационному соотношению

$$[a, a^*] = I \tag{1.6}$$

в том смысле, что $aa^*x - a^*ax = x$ для всех $x \in D_2$. Для каждого целого $n \geqslant 1$ можно распространить обозначения D_k и a на гильбертово пространство $H^n := H \oplus H \oplus \dots \oplus H$ (n слагаемых) $= \mathbb{C}^n \otimes H$. А именно, объявим

[3] "Моментальный снимок" этого описания был сделан в книге [105] (1989) одновременно с публикацией работы Уленбек [32] (1989), которая в 1986–1988 гг. циркулировала в виде широко известного препринта.

элемент $x = (x_1, \dots, x_n) \in H^n$ принадлежащим D_k в том и только том случае, когда каждая компонента $x_i \in H$ $(i = 1, \dots, n)$ принадлежит D_k, и положим $a(x_1, \dots, x_n) := (ax_1, \dots, ax_n)$. Тогда равенство (1.6) будет выполнено на $D_2 \subset H^n$.

Перенесем задачу описания критических точек функционала (1.2) на семейство $\{\mathbb{R}^2_\theta \,|\, \theta \geqslant 0\}$ некоммутативных плоскостей, полученное из обычной плоскости $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2_0$ посредством *деформации Мойяла* или *квантования Мойяла–Вейля* (многочисленные ссылки на физические и математические работы, посвященные этим понятиям, содержатся, например, в [110]). Этот переход основан на формальных правилах исчисления Вейля псевдодифференциальных операторов ([75], т. III, § 18.5) и приводит к следующему результату. Отображения $\varphi : \mathbb{C} \to U(n)$ заменяются на унитарные операторы $\Phi \in \mathrm{U}(H^n)$, производные $\overline{\partial}$ и ∂ — на коммутаторы с $(2\theta)^{-1/2}a$ и $-(2\theta)^{-1/2}a^*$ соответственно, а взятие интеграла по $\mathbb{C}$ — на взятие $2\pi\theta \operatorname{Tr}$, где $\operatorname{Tr} X$ означает след ядерного оператора X на H^n. Таким образом, аналогом функционала (1.2) является не зависящий от θ функционал

$$E(\Phi) := 2\pi \|[a, \Phi]\|^2_{\mathrm{HS}} \tag{1.7}$$

на множестве всех операторов $\Phi \in \mathrm{U}(H^n)$ таких, что коммутатор $[a, \Phi]$ плотно определен и продолжается по непрерывности со своей области определения на все H^n, причем это продолжение принадлежит классу $\mathrm{HS}(H^n)$ операторов Гильберта–Шмидта. Здесь $\|A\|^2_{\mathrm{HS}} := \operatorname{Tr}(AA^*)$ означает квадрат нормы Гильберта–Шмидта.

1.3. Область определения функционала энергии. Обозначим через $\mathrm{B}(H^n)$ банахово пространство всех ограниченных линейных операторов на H^n. Некоторые операторы $A \in \mathrm{B}(H^n)$ коммутируют с a в том смысле, что оператор $[a, A]$ определен на плотном подпространстве в H^n и равен нулю на этом подпространстве. Для таких операторов функционал (1.7) принимает наименьшее возможное значение, равное 0. Например, указанным свойством обладают операторы вида $A = \Lambda \otimes I$, где $\Lambda \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ есть любая $n \times n$-матрица, а I — тождественный оператор на H. (Иными словами, A есть $n \times n$-матрица из операторов на H, и каждый из этих операторов есть скалярное кратное тождественного.) Можно рассматривать эти операторы как некоммутативные аналоги постоянных отображений, поскольку на последних функционал (1.2) также принимает свое минимальное значение, равное нулю. С этой точки зрения естественно рассмотреть следующие пространства

операторов, в некотором смысле аналогичные пространствам k раз дифференцируемых ($k = 0, 1, 2, \dots$) матричнозначных функций на $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ с равномерно ограниченными интегрируемыми производными:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k :=& \{\Lambda \otimes I + K \in \mathrm{B}(H^n) \,|\, \Lambda \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}),\ \dim \operatorname{im} K < \infty,\ \operatorname{im} K \subset D_k\} \\ =& (\mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \otimes I) \oplus \mathcal{F}_k^0,\end{aligned} \tag{1.8}$$

где $\mathcal{F}_k^0$ есть пространство всех операторов на H^n, образ которых конечномерен и содержится в D_k. Пространства (1.8) обладают удобными алгебраическими свойствами: каждое $\mathcal{F}_k$ есть векторное подпространство и даже подалгебра в $\mathrm{B}(H^n)$, а пересечение $\mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_k$ есть подгруппа в $\mathrm{U}(H^n)$. Функционал энергии (1.7) корректно определен на $\mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_1$, поскольку для любого $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_1$ оператор $[a, \Phi]$ плотно определен и продолжается на все H^n до оператора с конечномерным образом.

Выбор области определения функционала энергии играет принципиальную роль при изучении его критических точек. В настоящей работе мы рассматриваем функционал (1.7) только на $\mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$, хотя определение (1.7) имеет смысл и для более широкого класса унитарных операторов (достаточно, чтобы $[a, \Phi]$ был плотно определен и продолжался по непрерывности до оператора Гильберта–Шмидта на всем H^n). Такой "минимальный" выбор области определения для E позволяет нам не углубляться в тонкие вопросы, связанные с областями определения различных операторов и в то же время развить достаточно содержательную теорию. Отметим, что этот выбор дает те же уравнения экстремума, что и более широкий. В случае $U(1)$-модели очень правдоподобно (хотя пока не доказано), что все решения, имеющие конечную энергию, принадлежат $\mathcal{F}_2$. Однако для $U(n)$-моделей с $n \geqslant 2$ это заведомо не так. Например, если $P \in \mathrm{B}(H^2)$ есть ортопроектор на H^2, образ которого совпадает с графиком оператора a, то унитарный оператор $\Phi = I - 2P$ имеет конечную энергию и является решением $U(2)$-модели, но не принадлежит $\mathcal{F}_1$ из-за бесконечномерности образа оператора $[a, \Phi]$. Таким образом, распространение теории унитонов на все решения конечной энергии остается открытым вопросом.

1.4. Дальнейшее содержание главы. В § 2 мы вводим обозначения и напоминаем некоторые свойства решений некоммутативной $U(n)$-модели. Это делает наш текст независимым от других источников.

В § 3 изложены общие результаты теории унитонов, начиная с некоммутативных аналогов класса Чженя в формуле (1.4) и процедуры добавления унитона (1.3). Из существования канонических отрицательных унитонов (п. 3.3)

выводится наличие унитонной факторизации и целочисленность энергии (с точностью до множителя 8π) всех изучаемых решений. В оставшейся части § 3 введено понятие канонического ранга решения и дано описание решений с наименьшим и наибольшим возможным значением канонического ранга при данной энергии, а также установлены некоторые общие свойства грассмановых решений, которые затем иллюстрируются на примере диагональных решений $U(1)$-модели. В частности, в п. 3.5 вводится важное для дальнейшего понятие *дефекта* грассманова решения.

В § 4 изучаются пространства решений $U(1)$-модели, представимых в виде конечномерного возмущения тождественного оператора. Основными целочисленными характеристиками таких решений являются нормированная энергия e, канонический ранг r и минимальное унитонное число u, всегда удовлетворяющие неравенствам $r \leqslant e$ и $u \leqslant e$. Обозначения и результаты § 3 суммированы в удобном для случая $U(1)$-модели виде в п. 4.1. В п. 4.2 мы описываем множество всех BPS-решений, т.е. решений с $u = 1$ или, что то же самое, некоммутативных аналогов голоморфных отображений из $\mathbb{C}P^1$ в грассманианы, вложенные в $U(n)$ (см. определение 3 в п. 2.4). Оказывается, что все BPS-решения энергии e составляют пространство $\mathbb{C}^e$, вещественно-аналитически вложенное в унитарную группу $U(H)$ гильбертова пространства H. Это автоматически дает описание всех решений с $e \leqslant 2$, $r = 1$ или $r = e$: все они являются BPS-решениями. В п. 4.3 доказано, что всякое грассманово решение G дефекта 2 порождает сферу неграссмановых решений, интерполирующую между G и некоторым BPS-решением той же энергии. Поскольку любое не-BPS-решение с $r = e - 1$ принадлежит одной из этих сфер, мы автоматически получаем описание всех решений с $e = 3$ (п. 4.4). В п. 4.5 установлено, что множество всех не-BPS-решений энергии e и канонического ранга 2 является прямым произведением $\mathbb{C}^1$ на цепочку из $[(e-1)/2]$ двумерных сфер, последовательно склееных друг с другом своими полюсами. Это автоматически дает описание случая $e = 4$ (п. 4.6). В п. 4.7 изучены случаи $r = e - 2$ (частично) и $e = 5$. В заключительном п. 4.8 мы вкратце суммируем все полученные результаты.

2. Предварительные сведения

2.1. Уравнения экстремалей. Определим операторы $\partial_- : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_0^0$ и $\partial_+ : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_0^0$ формулами

$$\partial_- X := [a, X], \qquad \partial_+ X := -[a^*, X]. \tag{2.1}$$

Как уже упоминалось в п. 1.2, эти операторы суть некоммутативные аналоги частных производных $\overline{\partial}$ и ∂ из п. 1.1. Ясно, что $\partial_\pm(\mathcal{F}_k) \subset \mathcal{F}_{k-1}$. Операторы $\partial_\pm$ линейны и удовлетворяют правилу Лейбница $\partial_\pm(XY) = \partial_\pm XY + X\partial_\pm Y$. Кроме того, прямое вычисление (или тождество Якоби) дает формулу $\partial_+\partial_- X - \partial_-\partial_+ X = [[a, a^*], X]$ для всех $X \in \mathcal{F}_2$, на основании которой мы заключаем из (1.6), что операторы ∂_+ и ∂_- коммутируют на $\mathcal{F}_2$. Поэтому можно определить оператор $\Delta : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_0^0$ (некоммутативный аналог лапласиана) формулами

$$\Delta := \partial_+\partial_- = \partial_-\partial_+. \tag{2.2}$$

Вот еще одно немедленное следствие коммутационного соотношения (1.6).

Утверждение 1. *Если оператор $X \in \mathcal{F}_2$ эрмитов, то оператор $\Delta X \in \mathcal{F}_0^0$ также эрмитов.*

Определение 1. Унитарный оператор $\Phi_0 \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ называется *экстремалью* функционала энергии $E(\Phi)$ или, эквивалентно, *решением* некоммутативной $U(n)$-модели, если $t = 0$ является критической точкой функции $t \mapsto E(\Phi(t))$ для любого гладкого отображения $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ с $\Phi(0) = \Phi_0$. Здесь слово "гладкий" означает, что функции $\Lambda(t)$ и $K(t)$, определенные формулой $\Phi(t) = \Lambda(t) \otimes I + K(t)$, дифференцируемы в точке $t = 0$ в обычном смысле.

Утверждение 2. *Оператор $\Phi_0 \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ является экстремалью для функционала $E(\Phi)$ тогда и только тогда, когда оператор $\Phi_0^{-1}\Delta\Phi_0 = \Phi_0^*\Delta\Phi_0$ эрмитов.*

Доказательство. Покажем сначала, что операторы ∂_+ и $-\partial_-$ сопряжены друг другу относительно скалярного произведения Гильберта–Шмидта:

$$\langle X, \partial_- Y\rangle_{\mathrm{HS}} = -\langle \partial_+ X, Y\rangle_{\mathrm{HS}} \quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathcal{F}_1^0, \tag{2.3}$$

где $\langle A, B\rangle_{\mathrm{HS}} := \mathrm{Tr}(AB^*)$. Действительно, прямое вычисление показывает, что $X(\partial_- Y)^* + (\partial_+ X)Y^* = \partial_+(XY^*)$. Взяв след от обеих частей и воспользовавшись равенством $\mathrm{Tr}(\partial_+ Z) = 0$, справедливым для всех $Z \in \mathcal{F}_1^0$ (это доказывается так же, как уравнение (III.4.17) в книге Т. Като [28]), получаем (2.3).

Для любой гладкой кривой $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ с $\Phi(0) = \Phi_0$, оператор $\varphi := \Phi'(0)$ принадлежит векторному пространству $\mathcal{F}_2 \cap T_{\Phi_0}\mathrm{U}(H^n)$, где $T_{\Phi_0}\mathrm{U}(H^n) = \{\varphi \in \mathrm{B}(H^n) \,|\, (\Phi_0^{-1}\varphi)^* = -\Phi_0^{-1}\varphi\}$ есть касательное пространство к унитарной группе в точке Φ_0. Подставим $\Phi(t) = \Phi_0 + \varphi t + o(t)$ в формулу

(1.7) и вычислим $e(t) := E(\Phi(t))$ по формуле "квадрат суммы". Применяя последовательно равенства (2.3), (2.2) и то, что $\langle UA, UB\rangle_{\mathrm{HS}} = \langle A, B\rangle_{\mathrm{HS}}$ для всех унитарных U (в нашем случае $U = \Phi_0^{-1}$), получаем

$$e'(0) = 2\,\mathrm{Re}\langle \partial_-\Phi_0, \partial_-\varphi\rangle_{\mathrm{HS}} = -2\,\mathrm{Re}\langle \Delta\Phi_0, \varphi\rangle_{\mathrm{HS}} = -2\,\mathrm{Re}\langle \Phi_0^{-1}\Delta\Phi_0, \Phi_0^{-1}\varphi\rangle_{\mathrm{HS}}.$$

Таким образом, Φ_0 является экстремалью тогда и только тогда, когда оператор $\Phi_0^{-1}\Delta\Phi_0 \in \mathcal{F}_0^0$ ортогонален (в смысле вещественного скалярного произведения $\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$) к пространству $\mathcal{V}_-$ всех косоэрмитовых операторов[4] класса $\mathcal{F}_0^0$. Однако легко видеть, что ортогональным дополнением к $\mathcal{V}_-$ в $\mathrm{HS}(H^n)$ является пространство $\mathcal{V}_+$ всех эрмитовых операторов из $\mathrm{HS}(H^n)$. Поэтому Φ_0 является экстремалью тогда и только тогда, когда оператор $\Phi_0^{-1}\Delta\Phi_0 \in \mathcal{F}_0^0$ эрмитов. $\square$

Нам потребуются и другие формы записи указанного в утверждении 2 условия экстремума. Для их формулировки заметим, что при любом $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_1$ равенство (1.7) можно записать в виде

$$E(\Phi) = 2\pi\|\partial_-\Phi\|^2_{\mathrm{HS}} = 2\pi\|\Phi_-\|^2_{\mathrm{HS}} = 2\pi\|\Phi_+\|^2_{\mathrm{HS}} = 2\pi\|\partial_+\Phi\|^2_{\mathrm{HS}}, \tag{2.4}$$

где через Φ_+ и Φ_- обозначены "левые логарифмические производные" (т.е. образы $\partial_\pm\Phi$ при переносе в единицу группы $\mathrm{U}(H^n)$)

$$\Phi_+ := \Phi^{-1}\partial_+\Phi = a^* - \Phi^* a\Phi, \qquad \Phi_- := \Phi^{-1}\partial_-\Phi = \Phi^* a\Phi - a. \tag{2.5}$$

В силу унитарности Φ имеем

$$\Phi_+ = -\Phi_-^*, \tag{2.6}$$

чем и объясняется третье равенство в (2.4). Возвращаясь к утверждению 2 (с Φ вместо Φ_0), запишем $\Phi^{-1}\Delta\Phi = \Phi^*\partial_+\partial_-\Phi = \partial_+(\Phi^*\partial_-\Phi) - \partial_+\Phi^*\partial_-\Phi = \partial_+\Phi_- + (\partial_-\Phi)^*\partial_-\Phi$, где последнее равенство вытекает из очевидного свойства

$$\partial_+(X^*) = (\partial_- X)^* \quad \text{для всех} \quad X \in \mathcal{F}_1. \tag{2.7}$$

Поскольку оператор $(\partial_-\Phi)^*\partial_-\Phi$ всегда эрмитов, мы получаем, что условие экстремума из утверждения 2 эквивалентно эрмитовости оператора $\partial_+\Phi_-$. Применяя (2.6) и (2.7) с $X = \Phi_+$, видим, что это в свою очередь эквивалентно эрмитовости оператора $\partial_-\Phi_+$ или, в более симметричной форме, выполнению равенства $\partial_+\Phi_- + \partial_-\Phi_+ = 0$. Этим доказано следующее утверждение.

[4]Заметим, что $\mathcal{V}_-$ является векторным подпространством пространства $\mathcal{F}_0^0$ только над , чем и объясняется появление вещественного скалярного произведения. Для обоснования слова "всех" заметим, что каждый оператор $\varphi \in \mathcal{F}_2^0 \cap T_{\Phi_0}\mathrm{U}(H^n)$ является касательным вектором к некоторой гладкой кривой $\Phi(t)$ указанного выше вида (это чисто конечномерный факт), а пространство $\mathcal{F}_2^0$ плотно в $\mathcal{F}_0^0$ (и даже в $\mathrm{HS}(H^n)$) по норме Гильберта–Шмидта (см. [28], § V.2.4, задача 2.17).

Утверждение 3. *Каждое из следующих условий равносильно тому, что оператор* $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ *является экстремалью:*

(A) *оператор* $\partial_+\Phi_-$ *эрмитов,*

(B) *оператор* $\partial_-\Phi_+$ *эрмитов,*

(C) $\partial_+\Phi_- + \partial_-\Phi_+ = 0$.

2.2. Эллиптическая регулярность. С помощью утверждения 3 можно установить следующий аналог свойства эллиптической регулярности (всякое гармоническое отображение класса C^2 автоматически принадлежит C^∞), который будет играть существенную роль в п. 3.3.

Утверждение 4. *Всякое решение* $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ *принадлежит* $\cap_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_k$.

Доказательство. Запишем $\Phi = \Lambda \otimes I + K_0$ согласно (1.8). Поскольку оператор Φ унитарен, матрица Λ тоже унитарна. Поэтому, заменяя Φ на другое решение $(\Lambda \otimes I)^{-1}\Phi$, можно считать, что $\Phi = I + K$ для некоторого $K \in \mathcal{F}_2^0$.

Унитарность Φ означает, что $K + K^* + KK^* = 0 = K^* + K + K^*K$. Из равенств $K^* = -(K + KK^*)$ и $K = -(K^* + K^*K)$ вытекает, что $\operatorname{im} K^* \subset \operatorname{im} K$ и $\operatorname{im} K \subset \operatorname{im} K^*$, т.е. $\operatorname{im} K^* = \operatorname{im} K$. Теперь из формулы $\Phi_- = (I + K^*)(aK - Ka)$ получаем, что $\operatorname{im}\Phi_- \subset \operatorname{im}(aK - Ka) + \operatorname{im} K^* \subset a(\operatorname{im} K) + \operatorname{im} K$. Аналогичное рассуждение для Φ_+ позволяет заключить, что

$$\operatorname{im}\Phi_- \subset a(\operatorname{im} K) + \operatorname{im} K, \qquad \operatorname{im}\Phi_+ \subset a^*(\operatorname{im} K) + \operatorname{im} K. \tag{2.8}$$

Эти включения доказаны для всех $\Phi = I + K \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$: мы нигде не использовали тот факт, что Φ является решением. Теперь воспользуемся им и запишем условие (C) утверждения 3 в виде

$$-a^*\Phi_- x + \Phi_- a^* x + a\Phi_+ x - \Phi_+ a x = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in D_1. \tag{2.9}$$

Второе и четвертое слагаемые принадлежат пространству

$$W := \operatorname{im} K + a(\operatorname{im} K) + a^*(\operatorname{im} K)$$

в силу (2.8). С другой стороны, имеем $\Phi_- x - aKx \in \operatorname{im} K + \operatorname{im} K^* = \operatorname{im} K$ по приведенной выше формуле для Φ_- и, аналогично, $\Phi_+ x + a^*Kx \in \operatorname{im} K$. Подставляя эти включения в первое и третье слагаемые, выводим из (2.9), что $-(aa^* + a^*a)Kx \in W$ для всех $x \in D_1$. В частности,

$$(aa^* + a^*a)(\operatorname{im} K) \subset \operatorname{im} K + a(\operatorname{im} K) + a^*(\operatorname{im} K). \tag{2.10}$$

Оператор $aa^* + a^*a$ имеет в стандартном базисе $\{e_j\}$ пространства H диагональную матрицу с $2j+1$ в качестве jj-го элемента (см. п. 1.2). Поэтому *для всякого* $x \in D_2$ *с* $(aa^* + a^*a)x \in D_k$ *имеем* $x \in D_{k+2}$. Это свойство позволяет закончить доказательство с помощью индукции. Действительно, правая часть (2.10) содержится в D_1 в силу условия $\Phi \in \mathcal{F}_2$, так что из (2.10) вытекает включение $\operatorname{im} K \subset D_3$, т.е. $\Phi \in \mathcal{F}_3$. Но тогда правая часть (2.10) содержится в D_2 и мы аналогично заключаем, что $\operatorname{im} K \subset D_4$, и т.д. $\square$

2.3. Решения энергии 0. Покажем, что *оператор* $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ *удовлетворяет* $E(\Phi) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\Phi = \Lambda \otimes I$ *для некоторой унитарной матрицы* $\Lambda \in U(n)$.

Действительно, любой оператор $X \in \mathrm{B}(H^n)$ может быть записан в виде $n \times n$-матрицы $(X_{ij})_{i,j=1}^n$, элементы которой X_{ij} суть операторы на H. При этом $[a, X]_{ij} = [a, X_{ij}]$. Поэтому достаточно доказать следующее утверждение: *если* $X \in \mathrm{B}(H)$ *и* $\partial_- X = 0$, *то* $X = \lambda I$ *для некоторого* $\lambda \in \mathbb{C}$. Для этого воспользуемся формулой

$$[a, X]_{kl} = \sqrt{k+1} X_{k+1,l} - \sqrt{l} X_{k,l-1},$$

где через $X_{kl} := \langle Xe_l, e_k \rangle$ обозначаются матричные элементы оператора X в стандартном базисе $\{e_0, e_1, \dots\}$ пространства H (см. п. 1.2). Приравнивая числа $[a, X]_{kl}$ нулю и рассматривая отдельно каждую диагональ $\mathcal{E}_m := \{X_{kl} \,|\, k, l \geqslant 0, k - l = m\}$, легко видеть, что числа $X_{kl} \in \mathcal{E}_m$ с данным $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ могут быть равномерно ограничены только в том случае, когда они все равны нулю. При $m = 0$ то же самое рассуждение показывает, что все диагональные элементы X_{kk} должны совпадать. Поэтому $X = \lambda I$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$, что и требовалось.

Замечание 1. Уравнение $\partial_- X = 0$ (т.е. $aX = Xa$) имеет также *неограниченные* решения X, например, непостоянные полиномы от a. Естественно ожидать, что все решения $X : H \to H$ имеют вид $X = f(a)$, где f — целая функция с надлежащим условием на рост. Строгие результаты такого типа см. в [111].

2.4. Грассмановы решения. Аналогично п. 1.1 заметим, что каждый ортопроектор $P \in \mathcal{F}_2$ определяет унитарный оператор $\Phi := I - 2P \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$. Геометрически Φ есть ортогональное отражение относительно подпространства $\ker P$ ($\Phi x = x$ для $x \in \ker P$ и $\Phi x = -x$ для $x \in \operatorname{im} P$). В частности, имеем $\Phi^{-1} = \Phi = \Phi^*$. Обратно, любой элемент $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ с $\Phi^{-1} = \Phi$ имеет вид $\Phi = I - 2P$ для некоторого ортопроектора $P \in \mathcal{F}_2$.

Определение 2. Решение $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ называется *грассмановым*, если $\Phi^{-1} = \Phi$ (эквивалентно, $\Phi = I - 2P$ для некоторого ортопроектора $P \in \mathcal{F}_2$). Иногда удобно, несколько нарушая терминологию, отождествлять грассманово решение $\Phi = I - 2P$ с замкнутым векторным подпространством $V := \operatorname{im} P \subset H^n$ и использовать выражения вида "V есть решение" или "рассмотрим грассманово решение $\langle e_0, e_1 \rangle$ $U(1)$-модели".

Следующее утверждение выражает условия экстремума (утверждения 1, 3) для $\Phi = I - 2P$ в терминах ортопроектора P. Из него сразу видно, что всякое инвариантное подространство V оператора уничтожения a задает два грассмановых решения: V и $V^\perp$.

Утверждение 5. *Пусть $P \in \mathcal{F}_2$ — ортопроектор. Каждое из следующих условий эквивалентно тому, что унитарный оператор $\Phi = I - 2P$ является решением:*

(A) *оператор $\partial_+(P^\perp a P)$ эрмитов,*

(B) *оператор $\partial_+(P a P^\perp)$ эрмитов.*

В частности, если $a(\operatorname{im} P) \subset \operatorname{im} P$ (эквивалентно, $P^\perp a P = 0$) или $a(\ker P) \subset \ker P$ (эквивалентно, $P a P^\perp = 0$), то $\Phi = I - 2P$ является решением.

Доказательство. Для любого ортопроектора $P \in \mathcal{F}_2$ можно написать $\Phi^{-1} = I - 2P = 2P^\perp - I$, откуда $\Phi_- = \Phi^{-1}\partial_-\Phi = (2P^\perp - I)(-2\partial_- P) = -4P^\perp \partial_- P + 2\partial_- P$ и, следовательно, $\partial_+\Phi_- = -4\partial_+(P^\perp \partial_- P) + 2\Delta P$. Утверждение 3 показывает, что Φ является решением в том и только том случае, когда оператор $\partial_+\Phi_-$ эрмитов. Но оператор ΔP всегда эрмитов согласно утверждению 1, а $P^\perp \partial_- P = P^\perp a P$. Поэтому Φ есть решение тогда и только тогда, когда выполнено условие (A). Повторяя это рассуждение для $\partial_+\Phi_-$ вместо $\partial_-\Phi_+$, видим, что свойство Φ быть решением эквивалентно эрмитовости оператора $\partial_-(P^\perp a^* P)$, что равносильно условию (B) в силу (2.7). Далее, если один из операторов $P^\perp a P$, $P a P^\perp$ равен нулю, то очевидно выполняется одно из условий (A), (B), так что Φ является решением. $\square$

Определение 3. Решения $\Phi = I - 2P \in \mathcal{F}_2$ с $a(\operatorname{im} P) \subset \operatorname{im} P$ называются *BPS решениями*, а аналогичные решения с $a(\ker P) \subset \ker P$ называются *анти-BPS решениями*.

Заметим, что BPS и анти-BPS решения являются простейшими (после решений нулевой энергии) решениями некоммутативной сигма модели. Они аналогичны (см. п. 1.1) голоморфным и антиголоморфным отображениям $\mathbb{C}P^1$ в

грассманианы, вложенные в $U(n)$. Как и в коммутативном случае, эти решения являются точками глобального минимума функционала $P \mapsto E(I-2P)$ в своих топологических классах (см. утверждение 8 ниже), а их пространства модулей допускают полное и сравнительно простое явное описание (см. п. 4.2). Конкретные примеры BPS и анти-BPS решений впервые появятся в п. 3.6 ниже, а сейчас мы опишем простую конструкцию грассмановых решений, которые не являются ни BPS, ни анти-BPS решениями.

Утверждение 6. *Пусть V_1, V_2 суть BPS решения, причем $V_1 \subset V_2$ и $a^*V_1 \subset V_2$. Тогда ортогональное дополнение $V := V_2 \ominus V_1$ является решением.*

Доказательство. Обозначим ортопроекторы на V_1, V_2 и V через P_1, P_2 и P соответственно. Поскольку $V_1 \subset V_2$, имеем $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$ и $P = P_2 - P_1$. В частности, $P^\perp = I - P_2 + P_1 = P_2^\perp + P_1$. Согласно утверждению 5, достаточно проверить, что результат применения ∂_+ к оператору

$$PaP^\perp = (P_2 - P_1)a(P_2^\perp + P_1) = P_2aP_2^\perp - P_1aP_2^\perp + (P_2 - P_1)aP_1 =$$
$$P_2aP_2^\perp - P_1aP_2^\perp + (-P_2^\perp + P_1^\perp)aP_1 = P_2aP_2^\perp - P_1aP_2^\perp - P_2^\perp aP_1 + P_1^\perp aP_1$$

есть эрмитов оператор. Но результаты применения ∂_+ к первому и четвертому слагаемым последнего выражения эрмитовы, поскольку V_1 и V_2 суть решения. С другой стороны, второе слагаемое равно нулю в силу условия $a^*V_1 \subset V_2$ (которое следует записать в виде $P_2^\perp a^* P_1 = 0$ и применить сопряжение). Остается рассмотреть третье слагаемое $-P_2^\perp aP_1 = -P_2^\perp aP_2P_1$. Оно также равно нулю, т.к. V_2 есть BPS решение. $\square$

Замечание 2. Ясно, что доказательство проходит для любого решения V_1 (не обязательно BPS) при условии, что V_2 есть BPS решение. Заменив формулу для третьего слагаемого на $-P_2^\perp aP_1 = -P_2^\perp P_1^\perp aP_1$, мы аналогично видим, что утверждение 6 остается справедливым, если считать, что V_1 есть BPS решение, а V_2 — любое решение. Забегая вперед, отметим, что эти случаи подпадают под действие теории унитонов (п. 3.2): в первом случае P_2 есть унитон для $I - 2P_1$, а во втором P_1 есть унитон для $I - 2P_2$. Неизвестно, останется ли утверждение 6 справедливым, если считать V_1, V_2 любыми решениями (не обязательно BPS).

3. Теория унитонов

3.1. Топологический заряд проектора. Для $k = 1, 2, \ldots$ обозначим через $\mathcal{F}'_k$ множество всех операторов $A = \Lambda \otimes I + K \in \mathcal{F}_k$ таких, что $\Lambda \in$

$\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ есть скалярное кратное единичной матрицы: $\Lambda = \lambda I$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Как и в п. 1.3, множество $\mathcal{F}'_k$ есть подалгебра в $\mathrm{B}(H^n)$, а $\mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}'_k$ есть подгруппа в $\mathrm{U}(H^n)$. Ясно, что ортопроектор $P \in \mathrm{B}(H^n)$ принадлежит $\mathcal{F}'_1$ тогда и только тогда, когда либо $\operatorname{im} P$, либо $\ker P = \operatorname{im}(P^\perp)$ является конечномерным подпространством в $D_k \subset H^n$. Число

$$Q(P) := \|PaP^\perp\|^2_{\mathrm{HS}} - \|P^\perp aP\|^2_{\mathrm{HS}} \tag{3.1}$$

корректно определено для всех ортопроекторов $P \in \mathcal{F}'_1$, поскольку оба оператора в правой части имеют конечномерный образ. Будем называть число $Q(P)$ *топологическим зарядом* ортопроектора P. Следующее утверждение играет важную роль в теории унитонов. Оно аналогично утверждению о целочисленности классов Чженя, возникающих в формуле (1.4).

Утверждение 7. *Пусть $P : H^n \to H^n$ — ортопроектор класса $\mathcal{F}'_2$. Тогда число $Q(P)$ целое. Более точно,*

$$Q(P) = \begin{cases} \dim \operatorname{im} P\,, & \text{если} \quad \dim \operatorname{im} P < \infty, \\ -\dim \ker P\,, & \text{если} \quad \dim \ker P < \infty. \end{cases} \tag{3.2}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\dim \operatorname{im} P < \infty$, поскольку отображение $P \mapsto P^\perp$ переставляет ядро и образ P и меняет знак числа $Q(P)$ (см. (3.1)). Из определения $\|A\|^2_{\mathrm{HS}} = \operatorname{tr}(A^*A) = \operatorname{tr}(AA^*)$ видно, что $Q(P)$ есть след оператора

$$\begin{gathered}(PaP^\perp)(PaP^\perp)^* - (P^\perp aP)^*(P^\perp aP) = Pa(I-P)a^*P - Pa^*(I-P)aP = \\ = Paa^*P - PaPa^*P - Pa^*aP + Pa^*PaP = \\ = P - PaPa^*P + Pa^*PaP = P + [Pa^*P, PaP].\end{gathered}$$

Заметим, что переход от второй строки к третьей основан на уравнении (1.6) и предположении $P \in \mathcal{F}'_2$ (гарантирующем, что $aa^* - a^*a = I$ на $\operatorname{im} P \subset D_2$). Далее, поскольку операторы Pa^*P и PaP имеют конечномерный образ, след их коммутатора равен нулю (см. [28], гл. III, § 4, формула (4.17)). Поэтому $Q(P) = \operatorname{tr} P$ совпадает с $\dim \operatorname{im} P$, что и требовалось. □

Утверждение 8. *Все BPS и анти-BPS решения класса $\mathcal{F}'_2$ являются глобальными минимумами функционала $P \mapsto E(I-2P)$ в своих топологических классах, т.е. среди всех ортопроекторов P того же ранга или коранга соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим все ортопроекторы $P \in \mathcal{F}'_2$ с $\dim \operatorname{im} P = k$, где $k \geqslant 0$ — фиксированное целое число. Пользуясь (3.1) и (3.2), можно

переписать формулу $(8\pi)^{-1}E(I-2P) = \|PaP^\perp\|^2_{\mathrm{HS}}+\|P^\perp aP\|^2_{\mathrm{HS}}$ (вытекающую, например, из (2.4) и второй формулы (3.7) ниже) в виде

$$(8\pi)^{-1}E(I-2P) = k + 2\|P^\perp aP\|^2_{\mathrm{HS}}.$$

Ясно, что правая часть принимает свое минимальное значение (равное k) тогда и только тогда, когда $\operatorname{im} P$ есть BPS решение ранга k. $\square$

Замечание 3. Из доказательства видно, что энергия любого BPS решения ранга k (а также любого анти-BPS решения коранга k) равна $8\pi k$.

Замечание 4. Топологический заряд $Q(P)$ корректно определен формулой (3.1) для всех ортопроекторов $P \in \mathcal{F}_1'$ и очень правдоподобно, что формула (3.2) остается справедливой для этого более широкого класса проекторов. Нам это обобщение формулы (3.2) не потребуется. Отметим лишь, что для одномерных ортопроекторов P с $\operatorname{im} P = \langle u\rangle$, где $\|u\| = 1$, определение (3.1) принимает вид $Q(P) = \|a^*u\|^2 - \|au\|^2$. Поэтому любое доказательство указанного обобщения (3.2) должно опираться на "проинтегрированную форму" коммутационных соотношений (1.6), гласящую, что $\|a^*u\|^2 - \|au\|^2 = \|u\|^2$ для всех $u \in D_1$. С другой стороны, хорошо известно, что существуют "нестандартные" решения a коммутационных соотношений (1.6), не удовлетворяющие $\|a^*u\|^2 - \|au\|^2 = \|u\|^2$ на всем пространстве $\operatorname{dom}(a)$. Простейший пример содержится в классической книге Дж. фон Ноймана [112], гл. II, § 8: возьмем $a = 2^{-1/2}(x + d/dx)$ на гильбертовом пространстве $H = L^2(0,1)$ с $\operatorname{dom}(a) = \{\text{абсолютно непрерывные}\, u \in H \mid u' \in H,\, u(1) = u(0)\}$. Тогда $\|a^*u\|^2 - \|au\|^2 = \|u\|^2 - |u(0)|^2$ для всех $u \in \operatorname{dom}(a)$. Следовательно, в этом случае топологический заряд (3.1) одномерных ортопроекторов с образом, лежащим в $\operatorname{dom}(a) = \operatorname{dom}(a^*)$ (но не в $\operatorname{dom}(aa^*) \cap \operatorname{dom}(a^*a)$) не обязан быть целым: он может принимать любое вещественное значение, не превосходящее 1.

Замечание 5. Можно распространить понятие топологического заряда на ортопроекторы P класса $\mathcal{F}_2$ (а не только $\mathcal{F}_2'$). Нам это обобщение не потребуется.

3.2. Добавление унитона. Следующее утверждение содержит некоммутативные аналоги формул добавления унитона (1.3) и скачка энергии (1.4).

Утверждение 9. *Пусть унитарный оператор* $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ *и ортопроектор* $P \in \mathcal{F}_2'$ *таковы, что*

$$P\Phi_- P^\perp = 0, \qquad P^\perp\Phi_- P + 2P^\perp aP = 0. \tag{3.3}$$

Тогда оператор $\Psi := \Phi(I - 2P)$ *принадлежит* $\mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ *и справедливы следующие утверждения.*

(A) $\Psi_- = \Phi_- + 2\partial_- P$.

(B) $E(\Psi) = E(\Phi) + 8\pi Q(P)$.

(C) *Если* Φ *— решение, то* Ψ *— тоже решение.*

Доказательство. Применяя оператор ∂_- к обеим частям равенства $\Psi = \Phi(I - 2P)$ и умножая на Φ^{-1}, получаем

$$\Psi_- = (I - 2P)\Phi_-(I - 2P) - 2(I - 2P)\partial_- P. \tag{3.4}$$

Теперь перейдем в P-базис, т.е. будем представлять каждый оператор X следующей 2×2-матрицей операторов:

$$X = \begin{pmatrix} PXP & PXP^\perp \\ P^\perp XP & P^\perp XP^\perp \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Тогда уравнения (3.3) означают, что

$$\Phi_- = \begin{pmatrix} S & 0 \\ -2P^\perp aP & T \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

для некоторых S и T. Подставляя это в (3.4) и пользуясь очевидными формулами

$$I - 2P = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \qquad \partial_- P = \begin{pmatrix} 0 & -PaP^\perp \\ P^\perp aP & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

мы видим, что

$$\Psi_- = \begin{pmatrix} S & -2PaP^\perp \\ 0 & T \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Сравнение (3.8) и (3.6) немедленно дает утверждение (A). Далее, поскольку квадрат нормы Гильберта–Шмидта любого оператора X равен сумме квадратов норм Гильберта–Шмидта четырех операторов, стоящих в правой части (3.5), мы имеем

$$\|\Psi_-\|_{\mathrm{HS}}^2 - \|\Phi_-\|_{\mathrm{HS}}^2 = 4\|PaP^\perp\|_{\mathrm{HS}}^2 - 4\|P^\perp aP\|_{\mathrm{HS}}^2,$$

что с учетом (3.1) приводит к равенству (B). Для доказательства (C) напомним, что оператор $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ является решением тогда и только тогда, когда оператор $\partial_+\Phi_-$ эрмитов (см. утверждение 3). Но из формулы (A) вытекает, что $\partial_+\Psi_- = \partial_+\Phi_- + 2\Delta P$, а оператор ΔP всегда эрмитов в силу утверждения 1. $\square$

Определение 4. Ортопроектор $P \in \mathcal{F}_2'$ называется *унитоном для решения* $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ (или Φ-*унитоном*), если пара (Φ, P) удовлетворяет соотношениям (3.3). В этом случае будем говорить, что новое решение $\Psi = \Phi(I - 2P)$ *получено из* Φ *добавлением* Φ-*унитона* P. Будем называть Φ-унитон P *положительным* (или *отрицательным*), если $Q(P) > 0$ (или $Q(P) < 0$).

Замечание 6. В процедуре добавления унитона используется не само решение Φ, а только его логарифмическая производная Φ_-. Поэтому с точки зрения теории унитонов естественно не различать решения $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$, которые *эквивалентны* друг другу в том смысле, что $(\Phi_1)_- = (\Phi_2)_-$ (или, что то же самое, $\Phi_2 = C\Phi_1$ для некоторого решения $C \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ нулевой энергии). Это и в самом деле отношение эквивалентности. Отметим еще, что каждое анти-BPS решение $\Phi = I - 2P$ эквивалентно соответствующему BPS решению $-\Phi = I - 2P^\perp$ и потому в теории унитонов можно не различать BPS и анти-BPS решения. Ясно также, что любое решение $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ эквивалентно некоторому решению класса $\mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2'$ (см. начало доказательства утверждения 4). Однако свойство $\Phi^2 = I$ вообще говоря не сохраняется при переходе к эквивалентному решению, так что решение, эквивалентное грассманову, не обязано быть грассмановым.

Замечание 7. В общем случае, если решения Φ_1 и Φ_2 связаны соотношением $\Phi_2 = \Phi_1(I - 2P)$ для некоторого ортопроектора P, то P не обязан быть Φ_1-унитоном. Тем не менее, процедура добавления унитона всегда обратима в следующем смысле: *если* Ψ *получается из* Φ *добавлением* Φ-*унитона* P, *то* $P^\perp$ *является* Ψ-*унитоном, добавление которого к* Ψ *дает* $-\Phi$. Действительно, формулу $\Psi = \Phi(I - 2P)$ можно переписать в виде $-\Phi = \Psi(I - 2P^\perp)$. Чтобы проверить, что $P^\perp$ есть Ψ-унитон, достаточно (пользуясь утверждением 3(A)) заменить Φ_- на $\Psi_- + 2\partial_- P^\perp$ в (3.3). Тогда первое равенство (3.3) для Φ и P превратится во второе равенство (3.3) для Ψ и $P^\perp$, и наоборот.

3.3. Канонические унитоны. Покажем, что каждое решение обладает нетривиальными положительными и отрицательными унитонами.

Утверждение 10. *Пусть* $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ — *любое решение, а* P_Φ^- — *ортопроектор с* $\ker P_\Phi^- = \operatorname{im} \Phi_-$. *Тогда* P_Φ^- *является* Φ-*унитоном. Аналогично, если* P_Φ^+ *есть ортопроектор с* $\operatorname{im} P_\Phi^+ = \operatorname{im} \Phi_+$, *то* P_Φ^+ *является* Φ-*унитоном.*

Доказательство. Записав условие (3.3) в виде

$$P\Phi_- P^\perp = 0, \qquad P(\Phi_-^* + 2a^*)P^\perp = 0, \tag{3.9}$$

мы видим, что ортопроектор $P \in \mathcal{F}_2'$ с конечномерным ядром удовлетворяет (3.3) тогда и только тогда, когда $\ker P$ есть общее инвариантное подпространство для операторов Φ_- и $\Phi_-^* + 2a^*$. Утверждение 4 (об эллиптической регулярности) гарантирует принадлежность проектора P_Φ^- классу $\mathcal{F}_2'$ (а не только классу $\mathcal{F}_1'$, как вытекает из условия $\Phi \in \mathcal{F}_2$). При этом ясно, что $\operatorname{im} \Phi_-$ является инвариантным подпространством для Φ_-. Чтобы проверить инвариантность этого подпространства относительно $\Phi_-^* + 2a^*$, запишем условие (A) утверждения 3 в виде

$$[\Phi_-, \Phi_-^* + 2a^*] = 0 \tag{3.10}$$

и воспользуемся следующей очевидной леммой: если $[A, B] = 0$ и $\operatorname{im} A \subset \operatorname{dom} B$, то $B(\operatorname{im} A) \subset \operatorname{im} A$. Этим доказаны равенства (3.3) для $P = P_\Phi^-$. Доказательство для P_Φ^+ проводится совершенно аналогично на основе того факта, что ортопроектор $P \in \mathcal{F}_2'$ с конечномерным образом удовлетворяет (3.3) тогда и только тогда, когда $\operatorname{im} P$ является общим инвариантным подпространством для операторов $(\Phi_-)^* = -\Phi_+$ (см. (2.6)) и $\Phi_- + 2a$, которые коммутируют в силу утверждения 3 или формулы (3.10). $\square$

Определение 5. Ф-унитон P_Φ^- (соответственно P_Φ^+) называется *каноническим отрицательным* (соответственно *положительным*) *унитоном* для решения Ф.

Особенно важную роль в дальнейшем играет существование канонического *отрицательного* унитона. Добавление этого унитона уменьшает энергию любого данного решения Ф на число $8\pi \dim \operatorname{im} \Phi_-$, которое всегда положительно за исключением тривиального случая $E(\Phi) = 0$. Вот два немедленных следствия этого факта.

Утверждение 11 (унитонная факторизация). *Для каждого решения* $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ *найдется последовательность решений* $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_m$ *такая, что* $\Phi_0 = U \otimes I$ *для некоторой матрицы* $U \in U(n)$, $\Phi_m = \Phi$, *и каждое решение* Φ_{j+1} *получается из* Φ_j *добавлением некоторого положительного* Φ_j*-унитона* P_j $(j = 0, 1, \dots, m-1)$.

Доказательство. Понизим энергию Ф добавлением канонического отрицательного унитона и будем повторять эту процедуру до тех пор, пока не получим решение Φ_0 нулевой энергии. Это произойдет за конечное число шагов, т.к. на каждом шагу энергия убывает на положительное целое кратное числа 8π. Согласно п. 2.3, имеем $\Phi_0 = U \otimes I$ для некоторой матрицы $U \in U(n)$.

Теперь обратим все шаги указанной конструкции, пользуясь замечанием 7. Получим требуемую последовательность решений $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_m$. $\square$

Утверждение 12 (целочисленность энергии). *Энергия любого решения $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ есть целое кратное 8π.*

Доказательство. В ситуации утверждения 11 имеем согласно утверждению 9(B) формулу $E(\Phi) = 8\pi \sum_{j=0}^{m-1} \dim \operatorname{im} P_j$. $\square$

3.4. Базовые унитоны. Этот класс унитонов, содержащий все канонические, характеризуется тем свойством, что одно из равенств (3.3) выполняется автоматически.

Определение 6. Положительный (отрицательный) Φ-унитон $P \in \mathcal{F}_2'$ называется *базовым*, если $\operatorname{im} P \supset \operatorname{im} \Phi_+$ ($\ker P \supset \operatorname{im} \Phi_-$).

Согласно утверждению 12, нормированная энергия

$$e(\Phi) := (8\pi)^{-1} E(\Phi)$$

принимает целые значения для любого решения $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$. Назовем целое число $r(\Phi) := \dim \operatorname{im} \Phi_- = \dim \operatorname{im} \Phi_+$ (равенство вытекает из (2.6)) *каноническим рангом* произвольного решения $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$. Эти понятия и обозначения используются в следующем утверждении, содержащем основные свойства базовых унитонов.

Утверждение 13.

(A) *Унитон, обратный к каноническому, является базовым.*

(B) *Добавление канонического унитона к любому решению не увеличивает его канонический ранг.*

(C) *Для любого решения $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ имеем $r(\Phi) \leqslant e(\Phi)$. Если $r(\Phi) = e(\Phi)$, то Φ эквивалентно некоторому BPS решению класса $\mathcal{F}_2'$.*

(D) *Если $r(\Phi) = 1$, то Φ эквивалентно BPS решению класса $\mathcal{F}_2'$.*

Доказательство. (A) Пусть $\Psi = \Phi(I - 2P)$ получено из Φ добавлением канонического отрицательного унитона, т.е. $\ker P = \operatorname{im} \Phi_-$. Поскольку обратная операция задается равенством $\Phi = -\Psi(I - 2P^\perp)$ (см. замечание 7), нам надо показать, что $\operatorname{im} \Psi_+ \subset \operatorname{im} \Phi_-$. Однако из (2.6) и (3.8) видно, что оператор

$$\Psi_+ = -\Psi_-^* = \begin{pmatrix} -S^* & 0 \\ 2P^\perp a^* P & -T^* \end{pmatrix}$$

действительно имеет только ($\ker P$)-значные компоненты, т.к. $S = 0$ по определению канонического отрицательного унитона. В случае, когда Ψ получается из Φ добавлением канонического положительного унитона ($\operatorname{im} P = \operatorname{im} \Phi_+$), аналогично имеем $T = 0$ и в Ψ_- присутствуют только ($\operatorname{im} P$)-значные компоненты, откуда получаем требуемое включение $\operatorname{im} \Psi_- \subset \operatorname{im} P = \operatorname{im} \Phi_+$.

(B) Это утверждение вытекает из полученных в ходе доказательства пункта (A) включений $\operatorname{im} \Psi_+ \subset \operatorname{im} \Phi_-$ (для канонического отрицательного Φ-унитона) и $\operatorname{im} \Psi_- \subset \operatorname{im} \Phi_+$ (для канонического положительного Φ-унитона).

(C) Если Ψ получается из Φ добавлением канонического отрицательного унитона $P = P_\Phi^-$, то $e(\Psi) = e(\Phi) - r(\Phi)$. Поэтому $e(\Phi) - r(\Phi) \geqslant 0$. Если в этом неравенстве имеет место равенство, то Ψ есть решение нулевой энергии. Тогда $\Psi_- = 0$ и из (3.3) ясно, что все положительные унитоны для Ψ суть проекторы на BPS подпространства. Поэтому из замечания 7 вытекает, что решение $\Phi = -\Psi(I - 2P^\perp)$ эквивалентно BPS решению $I - 2P^\perp$ с $\dim \operatorname{im} P^\perp < \infty$.

(D) Доказательство использует индукцию по $e(\Phi)$. Если $e(\Phi) = 1$, то $r(\Phi) = e(\Phi)$ и требуемое утверждение вытекает из (C). Допустим теперь, что утверждение доказано для $e(\Phi) \leqslant m$ и рассмотрим случай $e(\Phi) = m + 1$. Добавление к Φ канонического отрицательного унитона дает новое решение Ψ с $e(\Psi) = m$ и $r(\Psi) \leqslant 1$ согласно (B). Если $r(\Psi) = 0$, то $\Psi_- = 0$ вопреки предположению $e(\Psi) = m \geqslant 1$. Поэтому $r(\Psi) = 1$ и, согласно (A), Φ получается из Ψ добавлением одномерного канонического положительного Ψ-унитона. По предположению индукции, решение Ψ эквивалентно некоторому конечномерному BPS-решению. Записав $\Psi = C(I-2P)$ и пользуясь (3.7) вместе с BPS-условием $P^\perp a P = 0$, имеем $\Psi_- = -2(I-2P)\partial_- P = -2(PaP^\perp + P^\perp aP) = -2PaP^\perp$. Поэтому пространство $\operatorname{im} \Phi_+ = \operatorname{im}(P^\perp a^* P)$ ортогонально $\operatorname{im} P$. Отсюда следует, что решение $C^{-1}\Phi$ грассманово. С другой стороны, энергия этого решения $e(\Phi) = e(\Psi) + 1 = m + 1$ совпадает с его рангом $\dim \operatorname{im} P + \dim \operatorname{im} \Phi_+ = m + 1$. Поэтому утверждение 8 влечет, что $C^{-1}\Phi$ есть (конечномерное) BPS решение, чем доказательство шага индукции закончено. $\square$

Утверждение 14. *Всякое решение $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ энергии $e(\Phi) = 1$ или 2 эквивалентно некоторому BPS решению класса $\mathcal{F}_2'$.*

Доказательство. Для таких решений всегда выполнено либо $r(\Phi) = 1$ либо $r(\Phi) = e(\Phi)$. Поэтому требуемое заключение вытекает из пунктов (C) или (D) утверждения 13. $\square$

Замечание 8. Решения $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ с $e(\Phi) \geqslant 3$ уже не обязаны быть

эквивалентны BPS решениям (и даже грассмановым решениям). Примеры будут приведены в замечании 14.

3.5. Грассмановы решения. Любое грассманово решение $\Phi = I - 2P$ класса $\mathcal{F}_2'$ имеет две целочисленные характеристики: энергию $e(\Phi) = E(\Phi)/8\pi$ и топологический заряд $q(\Phi) := Q(P)$ (см. п. 3.1). Будем для определенности считать, что $\dim \operatorname{im} P < \infty$ (иначе рассмотрим $I - P$ вместо P), так что $q(\Phi) = \dim \operatorname{im} P \geqslant 0$ согласно (3.2). Из доказательства утверждения 8 видно, что целое число

$$\delta(\Phi) := e(\Phi) - q(\Phi) = 2\|P^\perp a P\|^2_{\mathrm{HS}} \tag{3.11}$$

всегда неотрицательно. Оно обращается в нуль тогда и только тогда, когда Φ есть BPS решение (см. определение 3). Поэтому число $\delta(\Phi)$ можно назвать *дефектом* грассманова решения Φ и рассматривать как меру отклонения грассманова решения от свойства быть BPS решением. Теория унитонов позволяет установить, что дефект любого грассманова решения четен (что отнюдь не очевидно с других точек зрения) и дать весьма явное описание всех решений с минимальным ненулевым значением дефекта $\delta(\Phi) = 2$.

Утверждение 15. *Неотрицательное целое число $\delta(\Phi)$ четно для любого грассманова решения $\Phi = I - 2P \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ с $\dim \operatorname{im} P < \infty$. Равенство $\delta(\Phi) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда Φ есть BPS решение. Равенство $\delta(\Phi) = 2$ имеет место тогда и только тогда, когда Φ есть результат вычитания некоторого одномерного BPS решения из другого BPS решения, как описано в утверждении 6.*

Доказательство. Найдем $\Phi_- = -2(I - 2P)\partial_- P$ по формуле (3.7):

$$\Phi_- = -2 \begin{pmatrix} 0 & PaP^\perp \\ P^\perp a P & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{откуда} \quad \operatorname{im} \Phi_- = \operatorname{im}(PaP^\perp) \oplus \operatorname{im}(P^\perp a P). \tag{3.12}$$

Вычисляя действие нового решения $\Psi := (I - 2P)(I - 2P^-_\Phi)$ на каждом из четырех попарно ортогональных пространств $V_1 := \operatorname{im}(PaP^\perp)$, $V_2 := \operatorname{im} P \ominus \operatorname{im}(PaP^\perp)$, $V_3 := \operatorname{im}(P^\perp a P)$ и $V_4 := \operatorname{im}(P^\perp) \ominus \operatorname{im}(P^\perp a P)$, мы видим, что это новое решение также грассманово: $\Psi = -(I - 2P_1)$, где $\operatorname{im} P_1 = V_2 \oplus V_3$. Топологический заряд и энергия решения $\Phi_1 := -\Psi$ выражаются формулами

$$\begin{aligned} q(\Phi_1) &= q(\Phi) - \dim \operatorname{im}(PaP^\perp) + \dim \operatorname{im}(P^\perp a P), \\ e(\Phi_1) &= e(\Phi) - \dim \operatorname{im}(PaP^\perp) - \dim \operatorname{im}(P^\perp a P). \end{aligned}$$

Поэтому дефект $\delta(\Phi_1) = \delta(\Phi) - 2\dim\operatorname{im}(P^\perp aP)$ отличается от дефекта исходного решения на *положительное четное* число, за исключением случая, когда исходное решение Φ есть BPS. Повторяя процедуру добавления канонического отрицательного унитона конечное число раз, придем к решению с $\delta = 0$. Следовательно, число $\delta(\Phi)$ всегда четное.

Теперь допустим, что $\delta(\Phi) = 2$. Тогда из предыдущего рассуждения вытекает, что $V_2 \oplus V_3$ есть BPS подпространство и $\dim V_3 = 1$. Записав $V_3 = \langle u\rangle$, получаем отсюда, что $au \in V_2 \oplus V_3$, т.е. $au - \lambda u \in V_2$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. В частности, $au - \lambda u \perp Pay$ для всех $y \in \operatorname{im}(P^\perp)$. Применяя это к $y = u$ и замечая, что $Pau = au - \lambda u$, получаем равенство $au - \lambda u = 0$, так что $V_3 = \langle u\rangle$ есть одномерное BPS подпространство. Далее, поскольку $V_3 = \operatorname{im}(P^\perp aP)$ совпадает с $\langle u\rangle$, мы имеем $aV \subset V \oplus \langle u\rangle$, где $V := \operatorname{im} P$. Следовательно, $a(V \oplus \langle u\rangle) \subset V \oplus \langle u\rangle$. Таким образом, V получается вычитанием одномерного BPS подпространства $W_1 := \langle u\rangle$ из BPS подпространства $W_2 := V \oplus \langle u\rangle$, как в утверждении 6. Надо только проверить, что $a^*W_1 \subset W_2$. Для этого используем тот факт (вытекающий из второго уравнения (3.9) для $P = P^-_\Phi$), что $\ker P^-_\Phi = V_1 \oplus V_3$ есть инвариантное подпространство оператора

$$\Phi^*_- + 2a^* = 2\begin{pmatrix} Pa^*P & 0 \\ 0 & P^\perp a^* P^\perp \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Отсюда следует, что $P^\perp a^* P^\perp(V_3) \subset V_3$, т.е. $a^*u \in V \oplus \langle u\rangle$, что и требовалось.

Наконец, для любых BPS решений W_1, W_2 с $W_1 \subset W_2$ и $a^*W_1 \subset W_2$ (как в утверждении 6) соответствующее грассманово решение $\Phi = I - 2P$ с $\operatorname{im} P = W_2 \ominus W_1$ имеет энергию $e(\Phi) = d_1 + d_2$ и топологический заряд $q(\Phi) = d_2 - d_1$, где $d_1 = \dim W_1$, $d_2 = \dim W_2$. (Формула для $q(\Phi)$ очевидна, а формулу для $e(\Phi)$ легче всего получить из утверждения 9(B), заметив, что каждое из подпространств W_1, W_2 является в очевидном смысле унитоном для другого.) Поэтому получаем $\delta(\Phi) = 2d_1$, что действительно равно 2 для одномерных W_1. $\square$

Замечание 9. Грассмановы решения $\Phi \in \mathrm{U}(H^n) \cap \mathcal{F}_2$ с $\delta(\Phi) \geqslant 4$ уже не обязаны быть разностью двух BPS решений в смысле утверждения 6. Допустим, например, что грассманово решение $\langle e_0, e_2\rangle$ (дефекта 4) равно $W_2 \ominus W_1$ для некоторых BPS решений W_1, W_2 с $W_1 \subset W_2$. Поскольку пространство W_2 содержит e_2, оно должно содержать и $e_1 = 2^{-1/2}ae_2$. Тогда W_1 также обязано содержать e_1, а значит и $e_0 = ae_1$. Но в этом случае $W_2 \ominus W_1$ не может содержать e_0: противоречие.

3.6. Диагональные решения $U(1)$-модели. Рассмотрим операторы $\Phi = \mathrm{diag}(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots) \in \mathrm{U}(H) \cap \mathcal{F}_2$, имеющие диагональную матрицу в стандартном базисе $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ пространства H (см. п. 1.2). Здесь $\zeta_j \in \mathbb{C}$ и $|\zeta_j| = 1$ при $j = 0, 1, 2, \dots$. Легко вывести из утверждения 2, что Φ является решением тогда и только тогда, когда $\Phi = e^{i\theta}(I - 2P_M)$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$ и некоторого конечного множества $M \subset \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$, где P_M есть ортопроектор с $\mathrm{im}\, P_M = \langle e_j \,|\, j \in M \rangle$. Таким образом, все диагональные решения эквивалентны грассмановым и, обратно, все диагональные унитарные операторы Φ класса $\mathrm{U}(H) \cap \mathcal{F}_2$ с $\Phi = \Phi^{-1}$ являются решениями.

Проиллюстрируем понятия и результаты теории унитонов на примере диагональных решений. При этом мы опустим доказательства, т.к. все они состоят в прямой проверке с учетом явного вида формулы (3.12) для операторов $(\Phi_M)_\pm$. Энергия и канонический ранг любого диагонального решения $\Phi_M := I - 2P_M$ выражаются формулами

$$e(\Phi_M) = \sum_{j \in M \Delta (M-1)} (j+1), \quad r(\Phi_M) = \sum_{j \in M \Delta (M-1)} 1, \tag{3.14}$$

где $M \Delta (M-1) := (M \cup (M-1)) \setminus (M \cap (M-1))$ есть симметрическая разность множеств M и $M - 1 := \{j - 1 \in \mathbb{N} \,|\, j \in M\}$. Добавление канонического отрицательного унитона к решению Φ_M равносильно замене M на $M - 1$. Добавление канонического положительного унитона к Φ_M равносильно замене M на $M + 1$ (если $0 \notin M$) или на $\{0\} \cup M + 1$ (если $0 \in M$). Дефект решения Φ_M выражается формулой

$$\delta(\Phi_M) = 2 \sum_{j \in (M-1) \setminus M} (j+1) \tag{3.15}$$

и может, таким образом, принимать любые четные неотрицательные значения. Наконец, Φ_M является BPS решением тогда и только тогда, когда $M = \{0, 1, \dots, r-1\}$ для некоторого целого $r \geqslant 1$. Это доставляет примеры BPS решений любой заданной энергии (и канонического ранга 1), но отнюдь не исчерпывает их (см. п. 4.2 ниже).

4. Пространства решений $U(1)$-модели

4.1. Обозначения и предварительные сведения. В этом пункте приводится краткий обзор определений, обозначений и результатов § 3 применительно к интересующему нас случаю $U(1)$-модели. Кроме того, будет введено важное для дальнейшего понятие минимального унитонного числа.

Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство H с ортонормированным базисом $\{e_0, e_1, \dots\}$. Стандартный оператор уничтожения $ae_j := \sqrt{j}e_{j-1}$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ можно рассматривать как линейное отображение векторного пространства $D_\infty := \{x \in H \mid \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^k|x_j|^2 < \infty \text{ для всех } k = 0, 1, 2, \dots\}$ в себя. То же самое верно для оператора рождения $a^*e_j := \sqrt{j+1}e_{j+1}$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$. Некоммутативная $U(1)$ сигма-модель задается функционалом энергии

$$4e(\Phi) := \|\partial_+\Phi\|^2_{\mathrm{HS}} = \|\partial_-\Phi\|^2_{\mathrm{HS}} = \|\Phi_+\|^2_{\mathrm{HS}} = \|\Phi_-\|^2_{\mathrm{HS}} \tag{4.1}$$

на множестве $\mathcal{M}$ всех унитарных операторов $\Phi : H \to H$ вида $\Phi = e^{i\theta}I + K$, где $\theta \in \mathbb{R}$, I — тождественный оператор, а $K : H \to H$ — такой линейный оператор, что образ $\operatorname{im} K := K(H)$ является конечномерным подпространством в D_∞. Здесь $\partial_+\Phi := -[a^*, \Phi]$ и $\partial_-\Phi := [a, \Phi]$ суть некоммутативные аналоги производных по z и $\overline{z}$, через $\Phi_\pm := \Phi^{-1}\partial_\pm\Phi$ обозначены аналоги соответствующих логарифмических производных, а $\|X\|^2_{\mathrm{HS}} := \operatorname{Tr}(X^*X)$ означает квадрат нормы Гильберта–Шмидта любого оператора $X : H \to H$ с конечномерным образом. Уравнения Эйлера–Лагранжа функционала (4.1) можно записать в виде $\partial_-\Phi_+ + \partial_+\Phi_- = 0$ или $[\Phi_+, \Phi_- + 2a] = 0$ или многими другими эквивалентными способами (см., например, утверждения $2, 3$ и формулу (3.10)). Число $e(\Phi)$ является неотрицательным и целым для любого решения $\Phi \in \mathcal{M}$ (утверждение 12). Поэтому множество всех решений распадается на счетное число компонент, занумерованных значением e. Ниже будет показано, что множество решений энергии e линейно связно при $e \leqslant 5$. Очень правдоподобно, что это верно и для всех e.

Решение $\Phi \in \mathcal{M}$ называется *грассмановым*, если $\Phi = \Phi^*$ или, эквивалентно, $\Phi = I - 2P$ для некоторого ортопроектора $P : H \to H$. Часто удобно отождествлять оператор $\Phi = I - 2P$ с замкнутым векторным подпространством $V = \operatorname{im} P$. Заметим, что ортопроектор $P : H \to H$ удовлетворяет условию $I - 2P \in \mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда либо $\operatorname{im} P$ либо $\ker P$ является конечномерным подпространством в D_∞. *Топологический заряд* такого проектора определяется формулой

$$Q(P) := \begin{cases} \dim \operatorname{im} P & \text{если} \quad \dim \operatorname{im} P < \infty, \\ -\dim \ker P & \text{если} \quad \dim \ker P < \infty. \end{cases} \tag{4.2}$$

Топологический заряд грассманова решения $\Phi = I - 2P$ определяется как $q(\Phi) := Q(P)$. Целое число $\delta(\Phi) := e(\Phi) - |q(\Phi)|$ является неотрицательным и

четным для любого грассманова решения $\Phi \in \mathcal{M}$ (см. утверждение 15). Это число называется *дефектом* решения Φ. Если одно из пространств $\operatorname{im} P$, $\ker P$ содержится в D_∞ и инвариантно относительно a, то $\Phi = I - 2P$ является решением с $\delta(\Phi) = 0$. Обратно, любое грассманово решение дефекта 0 может быть получено таким образом. Соответствующие решения $\Phi = I - 2P$ называются *BPS-решениями* (если $a(\operatorname{im} P) \subset \operatorname{im} P$) или *анти-BPS-решениями* (если $a(\ker P) \subset \ker P$). В нашем контексте нет необходимости отдельно изучать анти-BPS-решения, так как они превращаются в BPS-решения при умножении Φ на -1.

Пусть $\Phi \in \mathcal{M}$ — произвольное решение некоммутативной $U(1)$-модели. Ортопроектор $P : H \to H$ называется *унитоном для* Φ (или Φ-*унитоном*), если $I - 2P \in \mathcal{M}$ и выполнены уравнения $P\Phi_- P^\perp = 0$, $P^\perp \Phi_- P + 2P^\perp a P = 0$. Тогда унитарный оператор $\Psi = \Phi(I - 2P) \in \mathcal{M}$ также является решением, причем $e(\Psi) = e(\Phi) + Q(P)$ (см. утверждение 9). Операция добавления унитона обратима по формуле $\Phi = -\Psi(I - 2P^\perp)$. Каждое решение $\Phi \in \mathcal{M}$ допускает канонические положительный и отрицательный унитоны P^+_Φ и P^-_Φ, заданные формулами $\operatorname{im} P^+_\Phi = \operatorname{im} \Phi_+$ и $\ker P^-_\Phi = \operatorname{im} \Phi_-$ (см. утверждение 10). Вообще, пусть $P : H \to H$ — некоторый ортопроектор с $\dim \operatorname{im} P < \infty$ и пусть $\Phi \in \mathcal{M}$ — произвольное решение. Если

$$\operatorname{im} \Phi_+ \subset \operatorname{im} P \quad \text{и} \quad (\Phi_- + 2a)(\operatorname{im} P) \subset \operatorname{im} P, \tag{4.3}$$

то P является Φ-унитоном (и называется базовым положительным унитоном). Условия (4.3) часто возникают в дальнейшем (причем всегда для случая, когда Φ есть BPS-решение), потому что они выполняются для унитона, обратного к каноническому отрицательному унитону (см. п. 3.4).

Важной характеристикой любого решения Φ является его *канонический ранг*

$$r(\Phi) := \dim \operatorname{im} \partial_+ \Phi = \dim \operatorname{im} \partial_- \Phi = \dim \operatorname{im} \Phi_+ = \dim \operatorname{im} \Phi_-. \tag{4.4}$$

Число $r(\Phi)$ показывает, насколько возрастает (убывает) энергия решения Φ при добавлении к нему канонического положительного (отрицательного) Φ-унитона. Для любого решения $\Phi \in \mathcal{M}$ ненулевой энергии имеем $1 \leqslant r(\Phi) \leqslant e(\Phi)$, причем крайние случаи $r(\Phi) = 1$, $r(\Phi) = e(\Phi)$ реализуются только если Φ эквивалентно BPS-решению (см. пункты (C) и (D) утверждения 13, а также их уточнение в замечании 11 ниже). Здесь эквивалентность решений $\Phi, \Psi \in \mathcal{M}$ означает, что $\Psi = e^{i\theta}\Phi$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$ (см. замечание 6). Чтобы раз

и навсегда зафиксировать выбор представителя в каждом классе эквивалентности, можно перейти от $\mathcal{M}$ к множеству $\mathcal{M}_0 := \{\Phi \in \mathcal{M} \mid \dim \operatorname{im}(\Phi - I) < \infty\}$ (т.е. считать $\theta = 0$ в определении $\mathcal{M}$). Ясно, что $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times S^1$ являются бесконечномерными незамкнутыми подгруппами в унитарной группе $U(H)$ гильбертова пространства H.

Определим *минимальное унитонное число* $u(\Phi)$ любого решения $\Phi \in \mathcal{M}$ как наименьшее n, для которого существует разложение $\Phi = \Phi_0(I - 2P_1)\dots(I - 2P_n)$, где $e(\Phi_0) = 0$ и каждый ортопроектор P_j является унитоном для решения $\Phi_0(I - 2P_1)\dots(I - 2P_{j-1})$ (см. утверждение 11). Из определения унитона вытекает, что $u(\Phi) = 1$ тогда и только тогда, когда Φ эквивалентно BPS-решению (за тривиальным исключением решений с $e(\Phi) = 0$: они эквивалентны BPS-решению $\Phi = I$, но имеют $u(\Phi) = 0$.) Ясно, что $u(\Phi) \leqslant e(\Phi)$ для любого решения Φ. Поскольку числа $e(\Phi)$, $r(\Phi)$, $u(\Phi)$ не меняются при переходе к эквивалентному решению, мы можем, не теряя общности, рассматривать следующие множества как основные объекты изучения в настоящей работе:

$$\mathcal{M}(e, r, u) := \{\text{все решения } \Phi \in \mathcal{M}_0 \text{ с } e(\Phi) = e,\ r(\Phi) = r,\ u(\Phi) = u\}, \tag{4.5}$$

гле e, r, u — положительные целые числа, причем $r \leqslant e$ и $u \leqslant e$. В отличие от множеств решений фиксированной энергии e, пространства (4.5) в общем случае незамкнуты и часто несвязны в топологии нормы на $U(H)$. Однако во всех изученных ниже случаях (полный список которых содержится в п. 4.8) пространства $\mathcal{M}(e, r, u)$, если они непусты, имеют комплексную размерность r (точнее говоря, допускают взаимно-однозначную вещественно-аналитическую параметризацию некоторым алгебраическим многообразием комплексной размерности r). Это неожиданное явление вряд ли можно обнаружить стандартным способом (через вычисление размерности ядра линеаризации уравнений Эйлера–Лагранжа). Оно безусловно заслуживает дальнейшего изучения.

4.2. BPS-решения. Чтобы построить инвариантные подпространства оператора A, можно использовать ядра операторов $f(A)$ для надлежащих функций $f(z)$. Применим эту идею для описания BPS-решений, т.е. инвариантных подпространств оператора уничтожения a. Пусть $\Pi(z) = z^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m$ есть произвольный монический (т.е. со старшим коэффициентом 1) комплекснозначный полином степени m. Тогда корректно определены оператор $\Pi(a) : D_\infty \to D_\infty$ и векторное подпространство $\ker \Pi(a) := \{x \in D_\infty \mid \Pi(a)x = 0\}$.

Утверждение 16. (A) *Оператор* $\Phi = I - 2P \in \mathcal{M}$ *является BPS-решением тогда и только тогда, когда образ* $V := \operatorname{im} P$ *ортопроектора* P *либо совпадает со всем пространством* H *либо имеет вид* $V = \ker \Pi(a)$ *для некоторого монического полинома* $\Pi(z)$. *Для каждого* $m = 1, 2, \dots$ *отображение* $\Pi \mapsto \ker \Pi(a)$ *устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством всех мониических полиномов* $\Pi(z)$ *степени* m *и множеством всех BPS-решений размерности* m.

(B) *Пусть* $\Phi = I - 2P$ *есть BPS-решение с* $\operatorname{im} P = \ker \Pi(a)$. *Тогда энергия* $e(\Phi)$ *равна степени полинома* $\Pi(z)$, *а канонический ранг* $r(\Phi)$ *равен числу различных корней полинома* $\Pi(z)$.

(C) *Для любых целых чисел* r, e *с* $1 \leqslant r \leqslant e$ *обозначим через* $N(e, r)$ *число представлений* e *в виде суммы* r *неубывающих положительных целых слагаемых. Тогда множество* $\mathcal{M}(e, r, 1)$ *всех BPS-решений энергии* e *и канонического ранга* r *является объединением* $N(e, r)$ *непересекающихся связных компонент. Каждая компонента допускает вещественно-аналитическую взаимно-однозначную параметризацию некоторым открытым подмножеством пространства* $\mathbb{C}^r$.

(D) *Множество* $\cup_{r=1}^{e} \mathcal{M}(e, r, 1)$ *всех BPS-решений энергии* e *совпадает с образом* $\mathbb{C}^e$ *при некотором вещественно-аналитическом вложении* $\mathbb{C}^e \to U(H)$. *Прообразы множеств* $\mathcal{M}(e, r, 1)$ *при этом вложении задают стратификацию (в смысле Уитни, применяемом в теории особенностей, см., например,* [113], *стр.* 148) *пространства* $\mathbb{C}^e$ *комплексными подмногообразиями комплексной размерности* r. *Замыкание каждого множества* $\mathcal{M}(e, r, 1)$ *равно* $\cup_{\rho=1}^{r} \mathcal{M}(e, \rho, 1)$.

Доказательство. (A) Чтобы оператор $\Phi = I - 2P$ принадлежал $\mathcal{M}$, пространство $V = \operatorname{im} P$ должно иметь конечную размерность или коразмерность. Заметим, что оператор a не имеет инвариантных подпространств $V \subset H$ конечной коразмерности, кроме $V = H$. Действительно, иначе $V^\perp$ было бы конечномерным инвариантным подпространством оператора a^*. Но всякий линейный оператор на конечномерном пространстве имеет собственный вектор, а a^* не имеет собственных векторов в H (что легко вывести из определения a^*, данного в п. 4.1). Получаем требуемое утверждение.

Для описания конечномерных BPS-решений введем векторы

$$R_\lambda := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\sqrt{j!}} e_j \quad \text{и} \quad R_\lambda^k := (a^* - \overline{\lambda} I)^k R_\lambda \quad \text{для} \quad \lambda \in \mathbb{C},\ k = 0, 1, 2, \dots . \tag{4.6}$$

Нормированные векторы $R_\lambda/|R_\lambda|$ известны как *когерентные состояния* для гармонического осциллятора (см., например, монографию А. М. Переломова [114]). Любое конечное подмножество системы $\{R_\lambda^k \mid \lambda \in \mathbb{C},\ k = 0, 1, 2, \dots\}$ состоит из линейно независимых векторов. Кроме того, прямое вычисление в обозначениях п. 4.1 показывает, что R_λ есть единственный (с точностью до скалярного множителя) собственный вектор оператора a с собственным значением λ:

$$\ker(a - \lambda I) = \langle R_\lambda \rangle \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.7}$$

Из коммутационной формулы $[A, A^{*k}] = k(A^*)^{k-1}$, справедливой для оператора $A = a - \lambda I$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$, вытекает, что $(a - \lambda I)R_\lambda^k = kR_\lambda^{k-1}$. Поэтому можно рассматривать R_λ^k как присоединенные векторы к собственному вектору R_λ. По индукции получаем следующее обобщение формулы (4.7):

$$\ker(a - \lambda I)^k = \langle R_\lambda, R_\lambda^1, \dots, R_\lambda^{k-1} \rangle \quad \text{для} \quad \lambda \in \mathbb{C},\ k = 1, 2, \dots . \tag{4.8}$$

Кроме того, из той же коммутационной формулы по индукции следует, что базис в правой части равенства (4.8) ортогонален.

Пусть теперь $V \subset D_\infty$ — конечномерное инвариантное подпространство оператора a. Сужение a на V распадается в прямую сумму жордановых клеток. Их собственные значения *различны*, поскольку каждое собственное подпространство оператора a одномерно (см. (4.7)). Каждая из клеток однозначно определяется своим собственным значением λ и размерностью k по формуле (4.8). Если сужение a на V распадается на r жордановых клеток, имеющих собственные значения λ_j и размерности k_j $(j = 1, \dots, r)$, то $V = \ker \Pi(a)$, где $\Pi(z) = (z - \lambda_1)^{k_1} \dots (z - \lambda_r)^{k_r}$. В частности, размерность $\dim V = k_1 + \dots + k_r$ равна степени полинома $\Pi(z)$. Обратно, для любого монического полинома $\Pi(z) = (z - \lambda_1)^{k_1} \dots (z - \lambda_r)^{k_r}$ (где все λ_j различны) степени $m = k_1 + \dots + k_r$ пространство

$$\ker \Pi(a) = \langle R_{\lambda_j}^{l_j} \mid 1 \leqslant j \leqslant r,\ 0 \leqslant l_j \leqslant k_j - 1 \rangle \tag{4.9}$$

является m-мерным и очевидно инвариантным относительно a.

(В) Равенство $e(\Phi) = m = \deg \Pi$ уже доказано. Покажем, что $r(\Phi) = r$. Для этого вычислим значение оператора $\Phi_+ = 2P^\perp a^* P$ на каждом базисном векторе (4.9). Получаем, что $\operatorname{im} \Phi_+ = \langle P^\perp R_{\lambda_j}^{k_j} \mid j = 1, \dots, r \rangle$. Это пространство r-мерно, поскольку каждая конечная система векторов R_λ^k линейно независима.

(C) Компонента множества $\mathcal{M}(e,r,1)$, отвечающая представлению $e = k_1 + \ldots + k_r$, состоит из всех решений вида (4.9) с фиксированными $k_1, \ldots, k_r$ и произвольными наборами $\xi := (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r \setminus \Delta_r$, где Δ_r есть замкнутое $(r-1)$-мерное множество всех точек из $\mathbb{C}^r$, имеющих хотя бы две равные координаты. Множество $\mathbb{C}^r \setminus \Delta_r$ связно, т.к. вещественная коразмерность множества Δ_r в $\mathbb{C}^r$ равна 2. Поскольку некоторые пространства (4.9) с разными ξ могут совпадать (перестановка корней одинаковой кратности не меняет полинома), иногда необходимо профакторизовать $\mathbb{C}^r \setminus \Delta_r$ по действию надлежащей конечной группы перестановок. Однако все факторпространства указанного вида снова будут биголоморфны некоторым открытым связным подмножествам в $\mathbb{C}^r$, т.к. монические полиномы можно параметризовать не корнями, а коэффициентами (см. замечание 12 ниже). Наконец, параметризация множества всех подпространств вида (4.9) посредством $\xi \in \mathbb{C}^r \setminus \Delta_r$ является вещественно-аналитической, потому что каждый вектор R^l_λ зависит от λ вещественно-аналитически (и даже голоморфно при $l = 0$), а ортопроектор на пространство V, натянутое на столбцы матрицы M, задается формулой $M(M^*M)^{-1}M^*$.

(D) Множество $\cup_{r=1}^e \mathcal{M}(e,r,1)$ отождествляется с $\mathbb{C}^e$, если сопоставить каждому моническому полиному $\Pi(z) = z^e + c_1 z^{e-1} + \ldots + c_e$ степени e набор $(c_1, \ldots, c_e)$ его коэффициентов. Для доказательства вещественной аналитичности полученного отображения $\mathbb{C}^e \to U(H)$ достаточно построить (хотя бы локально по $c_1, \ldots, c_e$) такой базис векторного пространства $\ker \Pi(a)$, который зависел бы голоморфно от коэффициентов полинома $\Pi(z)$. Это делается выбором надлежащей линейной комбинации векторов $R_{\lambda_1}, \ldots, R_{\lambda_e}$, образующей базис пространства $\ker \Pi(a)$ даже в том предельном случае, когда некоторые из корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_e$ совпадают. (Например, при $e = 2$ такой базис состоит из векторов $R_{\lambda_1}, (R_{\lambda_2} - R_{\lambda_1})/(\lambda_2 - \lambda_1)$.) После этого остается применить теорему об устранимой особенности, гласящую, что непрерывная функция, голоморфная вне некоторого множества комплексной коразмерности 1, голоморфна всюду (см. [11], п. 32, теорема 3). Утверждения о стратификации пространства $\mathbb{C}^e$ и о замыкании множества $\mathcal{M}(e,r,1)$ становятся тогда очевидными. $\square$

Замечание 10. Числа λ_j естественно называть *корнями*, а k_j — *кратностями* BPS-решения $V = \ker \Pi(a)$, где $\Pi(z) = (z-\lambda_1)^{k_1} \ldots (z-\lambda_r)^{k_r}$ и все λ_j различны. В этих терминах результат добавления канонического положительного унитона к любому BPS-решению снова является BPS-решением, полученным из исходного увеличением кратности каждого его корня на 1 (см. дока-

зательство утверждения 16(C) выше). Аналогично доказывается, что добавление канонического отрицательного унитона к произвольному BPS-решению сводится к уменьшению кратности каждого корня этого решения на 1.

Замечание 11. Из утверждения 13 вытекает, что наибольший (e-мерный) и наименьший (1-мерный) страты множества $\cup_{r=1}^{e}\mathcal{M}(e,r,1)$ исчерпывают множества всех (не обязательно BPS) решений $\Phi\in\mathcal{M}_0$ с $r=e$ и $r=1$ соответственно. Таким образом, любое решение $\Phi\in\mathcal{M}$ энергии $e(\Phi)=m$ и канонического ранга $r(\Phi)=m$ или $r(\Phi)=1$ эквивалентно BPS-решению, у которого все m корней различны или, наоборот, все m корней совпадают. Из утверждения 14 получаем явное описание всех решений $\Phi\in\mathcal{M}_0$ энергии 1 или 2: их множество есть образ $\mathbb{C}^1$ или $\mathbb{C}^2$ при вложении в унитарную группу $U(H)$, состоящий из отражений относительно ортогональных дополнений к BPS-подпространствам размерности 1 или 2 соответственно.

Замечание 12. Для иллюстрации утверждения 16(C) рассмотрим первый нетривиальный случай: $e=4$, $r=2$. Число 4 имеет два допустимых представления: $1+3$ и $2+2$. Поэтому $\mathcal{M}(4,2,1)=\mathcal{M}_1\cup\mathcal{M}_2$, где $\mathcal{M}_1$ состоит из всех BPS-решений $\ker\Pi(a)$ с $\Pi(z)=(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)^3$, а $\mathcal{M}_2$ — из всех $\ker\Pi(a)$ с $\Pi(z)=(z-\lambda_1)^2(z-\lambda_2)^2$. Во втором случае пространство $\ker\Pi(a)$ не меняется при перестановке λ_1 и λ_2. Поэтому $\mathcal{M}_1\cong\mathbb{C}^2\setminus\Delta_2$, но $\mathcal{M}_2\cong(\mathbb{C}^2\setminus\Delta_2)/S_2$, где S_2 есть группа перестановок двух координат. Однако отображение $(\lambda_1,\lambda_2)\mapsto(\mu_1,\mu_2)$, заданное формулами $\mu_1=\lambda_1+\lambda_2$ и $\mu_2=\lambda_1\lambda_2$, биголоморфно отождествляет факторпространство $\mathcal{M}_2\cong(\mathbb{C}^2\setminus\Delta_2)/S_2$ с открытым связным подмножеством $\{\mu\in\mathbb{C}^2\,|\,\mu_1^2-4\mu_2\neq0\}$ пространства $\mathbb{C}^2$.

Замечание 13. Кроме конечномерных инвариантных подпространств, у оператора уничтожения a имеются замкнутые инвариантные подпространства $V\subset H$ бесконечной размерности и коразмерности: $V=\ker f(a)$ для неполиномиальных целых функций $f(z)$ надлежащего роста (грубо говоря, $\log|f(z)|\leqslant C|z|^2$; см. подробности в [111] или в приложении 1 книги [114]). Например, если $f(z)=\sin z$, то V есть замыкание линейной оболочки всех векторов R_λ с $\lambda\in\mathbb{Z}$. Хотя ортопроекторы P с образом $\operatorname{im}P=V$ указанного вида не удовлетворяют условию $I-2P\in\mathcal{M}$, для них выполнено BPS-условие $P^\perp aP=0$ на всюду плотном подпространстве в H. Если f — экспоненциальный полином, то оператор $[a,\Phi]$ (с $\Phi=I-2P$ и $\operatorname{im}P=\ker f(a)$) плотно определен на H, но не продолжается до оператора Гильберта–Шмидта на всем H (см. [115]). Поэтому пространства $V=\ker f(a)$ можно интерпретировать как

"BPS-решения бесконечной энергии". Их коммутативные аналоги — это голоморфные нерациональные отображения из $\mathbb{C}$ в грассманианы $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \subset U(n)$.

4.3. Грассмановы решения дефекта 2 и сферы неграссмановых решений. Согласно утверждению 15, всякое грассманово решение энергии e и дефекта 2 представляет собой $(e-2)$-мерное подпространство вида $G := M \ominus S$, где M и S суть BPS-решения энергии $e-1$ и 1 соответственно, причем $S \subset M$ и $a^*S \subset M$. (Здесь и далее через $\ominus$ обозначается ортогональное дополнение.) Опишем эту геометрическую ситуацию более подробно. Прежде всего, из утверждения 16 вытекает, что $S = \langle R_\lambda \rangle$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Для упрощения обозначений мы заменим все рассматриваемые унитарные операторы Φ на $U_\lambda \Phi U_\lambda^*$, где U_λ есть *некоммутативный сдвиг*[5] *на* λ. Это позволяет нам считать, что $\lambda = 0$ и, следовательно, $S = \langle R_0 \rangle = \langle e_0 \rangle$. Пусть k — наибольшее целое число такое, что $e_0, e_1, \ldots, e_{k-1} \in M$. Условия $S \subset M$ и $a^*S \subset M$ эквивалентны неравенству $k \geqslant 2$. Введем еще одно BPS-подпространство $B := M \oplus \langle e_k \rangle$ размерности e. (Здесь и далее через $\oplus$ обозначается прямая сумма векторных подпространств, не обязательно ортогональная.) Обозначим через P_0 ортопроектор в H с $\operatorname{im} P_0 = \langle e_0 \rangle$, а через $P(c)$ — ортопроектор в H с $\operatorname{im} P(c) = V(c) := G \oplus \langle e_0 + ce_k \rangle \subset B$, где $c \in \mathbb{C}^1$ — любое фиксированное число. Эти обозначения сохраняют смысл и в предельном случае $c = \infty$, когда $\operatorname{im} P(\infty) = V(\infty) = G \oplus \langle e_k \rangle = B \ominus \langle e_0 \rangle$. Рассмотрим семейство унитарных операторов

$$\Phi(c) := (I - 2P_0)(I - 2P(c)) \in \mathcal{M}_0, \quad c \in \mathbb{C}P^1. \tag{4.10}$$

Оно представляет собой сферу $\mathbb{C}P^1$, вложенную в унитарную группу $U(H)$ и интерполирующую между грассмановым решением $\Phi(0) = I - 2P_G$ дефекта 2 и BPS-решением $\Phi(\infty) = I - 2P_B$, где P_G и P_B — это ортопроекторы с образами G и B соответственно.

Утверждение 17. (A) *Все операторы* (4.10) *являются решениями энергии* $e(\Phi(c)) = e$ *с унитонным числом* $u(\Phi(c)) = 2$, *кроме* $u(\Phi(\infty)) = 1$.

[5]Иными словами, U_λ — это единственный унитарный оператор на H, переводящий каждое когерентное состояние $R_\alpha/|R_\alpha|$ в $R_{\alpha+\lambda}/|R_{\alpha+\lambda}|$ (см. [114]). Так как $U_\lambda a U_\lambda^* = a - \lambda I$, то сопряжение унитарных операторов посредством U_λ не меняет функционал энергии (4.1) и отображает все решения $U(1)$-модели снова в решения той же энергии и того же канонического ранга. Оно также перестановочно со всеми конструкциями теории унитонов (пп. 3.2, 3.3). Коммутативный аналог этого преобразования заменяет $\varphi(z)$ на $\varphi(z - \lambda)$ в обозначениях п. 1.1.

(B) *Канонический ранг любого решения* (4.10) *для* $c \neq \infty$ *равен* $r(\Phi(c)) = r(\Phi(\infty)) + 1$.

(C) *С точностью до некоммутативного сдвига, всякое не-BPS-решение* $\Phi \in \mathcal{M}_0$ *с* $e(\Phi) = e$ *и* $r(\Phi) = e - 1$ *принадлежит некоторой сфере* (4.10).

Доказательство. (A) Покажем, что каждый ортопроектор $P(c)$ удовлетворяет условию (4.3) для $\Phi = \Phi^0 := I - 2P_0$ и, следовательно, является Φ^0-унитоном. Действительно, раз $k \geqslant 2$, то имеем $V(c) \supset G \supset \langle e_1 \rangle = \operatorname{im} \Phi^0_+$ и первое условие (4.3) выполнено. С другой стороны, формула (3.12) и очевидное равенство $aP_0 = 0$ показывают, что $\Phi^0_- + 2a = 2P_0^\perp a$. Поэтому второе условие (4.3) принимает вид $P_0^\perp a(V(c)) \subset V(c)$. Оно выполнено, поскольку $P_0^\perp a(V(c)) \subset P_0^\perp aB = P_0^\perp M = G \subset V(c)$. Итак, все операторы (4.10) являются решениями. Их энергия равна $e(\Phi(c)) = e(\Phi^0) + Q(P(c)) = 1 + (e-1) = e$ (см. утверждение 9(B)). Их унитонное число не превосходит 2 по самому определению, и оно равно 2 при $c \neq \infty$, так как в этом случае $\Phi(c)$ не являются BPS-решениями (последнее ясно, например, из утверждения 18 ниже).

(B) Покажем, что оператор $\Phi(c)_+$ равен нулю на ортогональном дополнении $B^\perp$ пространства B. Действительно, по утверждению 9(A) имеем

$$\Phi(c)_+ = \Phi^0_+ + 2[a^*, P(c)]. \tag{4.11}$$

Если $x \in B^\perp$, то $P_0 x = 0$, так что оператор $\Phi^0_+ = 2P_0^\perp a^* P_0$ обращается в нуль на векторе x. С другой стороны, если $x \in B^\perp$, то $a^* x \in B^\perp$ в силу инвариантности B относительно a. Отсюда $[a^*, P(c)]x = a^* P(c)x - P(c)a^* x = a^* 0 - 0 = 0$, что и требовалось. Чтобы вычислить действие $\Phi(c)_+$ на B, рассмотрим единичный вектор нормали $n = n(c)$ к гиперплоскости $V(c) \subset B$ и запишем базис (4.9) пространства B в виде

$$\begin{gathered} B = \langle e_0, e_1, \dots, e_k; R_{\alpha_2}, R^1_{\alpha_2}, \dots, R^{k_2-1}_{\alpha_2}; \dots; R_{\alpha_s}, R^1_{\alpha_s}, \dots, R^{k_s-1}_{\alpha_s} \rangle = \\ = \langle n \rangle \oplus V(c) = \langle n; e_0 + ce_k, e_1, \dots, e_{k-1}; P_0^\perp R_{\alpha_2}, P_0^\perp R^1_{\alpha_2}, \dots, P_0^\perp R^{k_2-1}_{\alpha_2}; \dots; \\ P_0^\perp R_{\alpha_s}, P_0^\perp R^1_{\alpha_s}, \dots, P_0^\perp R^{k_s-1}_{\alpha_s} \rangle, \end{gathered} \tag{4.12}$$

где $\alpha_2, \dots, \alpha_s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Здесь число $s \geqslant 1$ равно каноническому рангу $r(\Phi(\infty))$ по предложению 1(B), причем в случае $s = 1$ равенство (4.12) упрощается до $B = \langle e_0, e_1, \dots, e_k \rangle = \langle n; e_0 + ce_k, e_1, \dots, e_{k-1} \rangle$. Из формулы $P(c)x = x - (x, n)n$, верной для всех $x \in B$, легко получить, что

$$[a^*, P(c)]x = P_B^\perp a^* x + (a^* x, n)n - (x, n)a^* n \quad \text{для всех} \quad x \in B. \tag{4.13}$$

Слагаемое $(x,n)a^*n$ обращается в нуль на всех векторах x второго базиса (4.12), кроме $x = n$. Если же $x = n$, то обе части формулы (4.13) равны $-P_{V(c)}a^*n$, откуда $\Phi(c)_+n = 2(n,e_0)e_1 - 2P_{V(c)}a^*n = 0$ (первое равенство есть не что иное как (4.11), а второе вытекет из того, что векторы a^*n и $(n,e_0)e_1$ имеют одинаковые скалярные произведения со всеми перечисленными в (4.12) базисными векторами пространства $V(c)$). Пользуясь (4.11), (4.13) и очевидной формулой $P_0^\perp R^l_{\alpha_j} = R^l_{\alpha_j} - (-\overline{\alpha}_j)^l e_0$, мы получаем, что $\Phi(c)_+(e_0 + ce_k) = 2e_1 + 2cP_B^\perp a^*e_k + 2c(a^*e_k,n)n$, $\Phi(c)_+(e_{k-1}) = 2(a^*e_{k-1},n)n$ и $\Phi(c)_+(P_0^\perp R^{k_j-1}_{\alpha_j}) = 2P_B^\perp a^* R^{k_j-1}_{\alpha_j} + 2(a^*R^{k_j-1}_{\alpha_j},n)n$ для $2 \leqslant j \leqslant s$. (Действие оператора $\Phi(c)_+$ на остальных векторах x второго базиса (4.12) равно нулю: для этих векторов имеем $x \perp e_0$, $x \in V(c)$ и $a^*x \in V(c)$, так что оба слагаемых в правой части (4.11) обращаются в нуль на x.) Заметим, что вектор $\Phi(c)_+(e_{k-1})$ является ненулевым кратным вектора n. (Действительно, если $(a^*e_{k-1},n) = 0$, то $e_k \in V(c)$ и, следовательно, $e_0 \in V(c)$. Но тогда $V(c) = M$, откуда $e_k \in M$ вопреки определению k.) Поэтому пространство $\operatorname{im}\Phi(c)_+$ является линейной оболочкой вектора n и s векторов $e_1 + cP_B^\perp a^*e_k$, $P_B^\perp a^* R^{k_j-1}_{\alpha_j}$ $(2 \leqslant j \leqslant s)$, ортогональных к n. Эти s векторов линейно независимы в силу такого же рассуждения как в доказательстве утверждения 16(B). Тем самым $r(\Phi(c)) = s+1$.

(C) Добавляя к Φ канонический отрицательный Φ-унитон, получим некоторое решение Φ^0 энергии 1. С точностью до некоммутативного сдвига и эквивалентности можно считать, что $\Phi^0 = I - 2P_0$, где $\operatorname{im} P_0 = \langle e_0\rangle$ (см. утверждение 16 или замечание 11). Согласно утверждению 13(A), достаточно показать, что всякий положительный базовый Φ^0-унитон P ранга $e-1$ совпадает с $P(c)$ для некторого $c \in \mathbb{C}$, если только Φ не является BPS-решением. Иными словами, надо описать все подпространства $V := \operatorname{im} P$ размерности $e-1$, удовлетворяющие условиям (4.3) для $\Phi = \Phi^0$:

$$\langle e_1\rangle \subset V \quad \text{и} \quad P_0^\perp aV \subset V. \tag{4.14}$$

Если V содержит e_0, то из условий (4.14) вытекает, что $\langle e_0, e_1\rangle \subset V$ и $aV \subset P_0aV + P_0^\perp aV \subset \langle e_0\rangle + P_0^\perp aV \subset V$. Поэтому V является BPS-решением, содержащим $\langle e_0,e_1\rangle$, а $\Phi = \Phi^0(I-2P)$ — грассмановым решением $V \ominus \langle e_0\rangle$ дефекта 2. Такое решение Φ принадлежит одной из сфер (4.10) согласно утверждению 15.

Таким образом, можно считать, что $e_0 \notin V$. Тогда $a(\langle e_0\rangle \oplus V) = aV \subset P_0aV + P_0^\perp aV \subset \langle e_0\rangle + P_0^\perp aV \subset \langle e_0\rangle \oplus V$ в силу второго условия (4.14). Следовательно, $B := \langle e_0\rangle \oplus V$ является BPS-подпространством, содержащим e_0

(по определению) и e_1 (в силу первого условия (4.14)). Пусть k есть максимальное целое число, для которого $e_0, e_1, \dots, e_k \in B$. Если $k = 1$, то первое равенство (4.12) показывает, что $P_0^\perp B = \langle e_0 \rangle \oplus P_0^\perp aB$. Из очевидного равенства $aB = aV$ и условий (4.14) вытекает, что $P_0^\perp B \subset V$. Это включение должно быть равенством, поскольку $\dim P_0^\perp B = \dim V = e - 1$. Но тогда $V \perp e_0$, так что $\Phi = \Phi^0(I - 2P)$ есть BPS-решение вопреки предположению. Таким образом, можно считать, что $k \geqslant 2$. Из первого равенства (4.12) мы опять видим, что второе условие (4.14) эквивалентно включению $G \subset V$, где $G := P_0^\perp aB = P_0^\perp aV$ есть соответствующее грассманово решение дефекта 2. Поскольку $\dim G = e - 2$ и $\dim V = e - 1$, имеем $V = G \oplus \langle u \rangle$ для некоторого вектора $u \neq 0$ из подпространства $\langle e_0, e_k \rangle \subset B$. (Это подпространство трансверсально к G.) Записав u в виде $u = e_0 + ce_k$ для некоторого $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (случаи $c = 0$ и $c = \infty$ исключаются сделанными выше предположениями), мы видим, что $V = V(c)$ и $\Phi = \Phi(c)$ в обозначениях (4.10). $\square$

Чтобы наглядно представить действие унитарных операторов (4.10) на H, запишем эти операторы матрицами в надлежащем ортонормированном базисе пространства H. Формула (4.15) ниже взаимно однозначно параметризует семейство (4.10) сферой $S^2 = \{(\kappa, \lambda) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{C}^1 \mid \kappa^2 + |\lambda|^2 = 1\}$.

Утверждение 18. *Каждый оператор* (4.10) *имеет инвариантные подпространства $B^\perp$, G и $B \ominus G$, ортогональная прямая сумма которых равна всему H. При каждом $c \in \mathbb{C}P^1$ имеем $\Phi(c)x = x$ для $x \in B^\perp$ и $\Phi(c)x = -x$ для $x \in G$. Рассмотрим вектор $N := P_G^\perp e_k = P_M^\perp e_k$. Тогда матрица унитарного оператора $\Phi(c)$ в ортонормированном базисе $\langle e_0, N/|N| \rangle$ пространства $B \ominus G$ имеет вид*

$$\Phi(c)|_{B\ominus G} = \begin{pmatrix} \kappa & -\overline{\lambda} \\ \lambda & \kappa \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \kappa = \frac{1 - |c|^2|N|^2}{1 + |c|^2|N|^2}, \quad \lambda = -\frac{2c|N|}{1 + |c|^2|N|^2}. \tag{4.15}$$

Доказательство. Формулы для $\Phi(c)|_{B^\perp}$ и $\Phi(c)|_G$ вытекают из (4.10). Докажем (4.15). Заметим, что $N \neq 0$ по определению k. Поскольку векторы e_0, N ортогональны к G, их образы при $P(c)$ параллельны вектору нормали к G в пространстве $\operatorname{im} P(c) = G \oplus \langle e_0 + ce_k \rangle$. Указанный вектор нормали равен $e_0 + cN$. Записывая $P(c)x = \mu(e_0 + cN)$ для $x = e_0, N$, мы легко находим из условия $x - P(c)x \perp e_0 + cN$, что $\mu = (1 + |c|^2|N|^2)^{-1}$ для $x = e_0$ и $\mu = \overline{c}|N|^2(1 + |c|^2|N|^2)^{-1}$ для $x = N$. Подставляя эти результаты в (4.10), получаем (4.15). $\square$

Замечание 14. Из утверждения 17 вытекает, что $\mathcal{M}(e, e-1, u) = \emptyset$ при $u > 2$, а $\mathcal{M}(e, e-1, 2)$ представляется в виде $D^{e-2} \times \mathbb{C}^1_c$, где $D^{e-2} \subset \mathbb{C}^{e-2}$ есть открытое подмножество, параметризующее все BPS-решения энергии e с кратностями $3, 1, \dots, 1$ (это одна из двух упомянутых в утверждении 16(C) связных компонент множества $\mathcal{M}(e, e-2, 1)$), а множество $\mathbb{C}^1_c$ получено из сферы (4.10) удалением точки $c = \infty$. Если $e \leqslant 5$, то замыкание множества $\mathcal{M}(e, e-1, 2)$ равно $M^{e-2} \times \mathbb{C}P^1_c$, где $M^{e-2} \subset \mathbb{C}^e$ есть множество всех BPS-решений, имеющих хотя бы один корень кратности $\geqslant 3$. Для произвольных e это замыкание равно объединению сфер (4.10) по всем грассмановым решениям G энергии e и дефекта 2, причем множество всех таких G слегка отличается от M^{e-2} при $e \geqslant 6$. Заметим еще, что утверждение 17 дает примеры не-BPS-решений (как грассмановых, так и неграссмановых) с любым допустимым значением канонического ранга: $2 \leqslant r \leqslant e-1$ (сравните с замечанием 11 для случаев $r = 1$ и $r = e$). В частности, этими примерами мы выполняем обещание, данное в замечании 8.

4.4. Решения с $e = 3$. Согласно замечанию 11, для всякого не-BPS-решения $\Phi \in \mathcal{M}$ энергии $e(\Phi) = 3$ имеем $r(\Phi) = 2$. Поэтому утверждение 17(C) показывает, что Φ принадлежит (с точностью до некоммутативного сдвига и эквивалентности) сфере (4.10), отвечающей решениям $G = \langle e_1 \rangle$ и $B = \langle e_0, e_1, e_2 \rangle$, а утверждение 18 (в котором тогда $N = e_2$) дает для Φ следующую матрицу в исходном базисе $\{e_0, e_1, \dots\}$:

$$\Phi = \begin{pmatrix} k & 0 & -\bar{l} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ l & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_\infty \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad k := \frac{1-|c|^2}{1+|c|^2}, \quad l := -\frac{2c}{1+|c|^2}. \tag{4.16}$$

Здесь I_∞ означает единичную матрицу бесконечного ранга. Эти рассуждения доказывают следующее утверждение.

Утверждение 19. *С точностью до некоммутативного сдвига и эквивалентности, любое не-BPS-решение $\Phi \in \mathcal{M}$ энергии $e(\Phi) = 3$ задается формулой* (4.16) *для некоторого $c \in \mathbb{C}$. Обратно, для любого $c \in \mathbb{C}$ формула* (4.16) *задает не-BPS-решение с $e(\Phi) = 3$ и $r(\Phi) = 2$.*

Таким образом, имеем $\mathcal{M}(3, 2, 2) \cong \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^1_c \times \mathbb{C}^1_\lambda$, где λ параметризует некоммутативные сдвиги. Можно описать пространство

$$\mathcal{M}(3) := \mathcal{M}(3, 3, 1) \cup \mathcal{M}(3, 2, 1) \cup \mathcal{M}(3, 1, 1) \cup \mathcal{M}(3, 2, 2) \cong \mathbb{C}^3 \cup \mathbb{C}^2$$

всех решений Φ с $e(\Phi)=3$ еще и другим способом: это образ $\mathbb{C}^3\cup(\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}^1)$ при вещественно-аналитическом вложении в $U(H)$, причем $\mathbb{C}^3$ состоит из всех BPS-решений, а $\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}^1$ — из всех решений, получаемых добавлением 2-мерных базовых унитонов к BPS-решениям энергии 1. Компоненты $\mathbb{C}^3$ и $\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}$ рассматриваемого пространства модулей являются гладкими, замкнутыми и неприводимыми. Их пересечение равно множеству всех BPS-решений с $e=3$ и $r=1$. Заметим, что пространства $\mathcal{M}(3,r,u)$ образуют стратификацию множества $\mathcal{M}(3)$ подобно утверждению 16(D).

4.5. Решения с $r=2$. Конструкцию решений (4.16) можно обобщить так. Для любых целых чисел s,t с $0\leqslant s\leqslant t-2$ рассмотрим двумерную сферу S^2_{st}, состоящую из всех унитарных операторов вида

$$\Phi=\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & k & 0 & -\overline{l} & 0\\ 0 & 0 & -I_{t-s-1} & 0 & 0\\ 0 & l & 0 & k & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_\infty \end{pmatrix},\quad \text{где}\quad k\in\mathbb{R},\ l\in\mathbb{C},\ k^2+|l|^2=1. \tag{4.17}$$

Здесь I_s, I_{t-s-1} и I_∞ — это единичные матрицы ранга s, $t-s-1$ и ∞ соответственно. Заменяя пару (k,l) на один комплексный параметр $c\in\mathbb{C}$ как в (4.16), можно также рассматривать S^2_{st} как комплексную проективную прямую $\mathbb{C}P^1$.

Утверждение 20. (A) *Все операторы* (4.17) *являются решениями, для которых* $e(\Phi)=s+t+1$, $r(\Phi)=2$ *и* $u(\Phi)=2$, *кроме случая* $s=0$, $k=-1$, *когда* $u(\Phi)=r(\Phi)=1$.

(B) *Добавление канонического положительного унитона ко всем решениям класса* S^2_{st} *задает голоморфное (дробно-линейное) взаимно-однозначное отображение сферы* S^2_{st} *на* $S^2_{s+1,t+1}$. *Добавление канонического отрицательного унитона ко всем решениям класса* $S^2_{s+1,t+1}$ *задает обратное отображение сферы* $S^2_{s+1,t+1}$ *на* S^2_{st}. *Добавляя канонический отрицательный унитон к любому решению из* S^2_{0t}, *получим диагональное BPS-решение* $\langle e_0,e_1,\dots,e_{t-2}\rangle$ *энергии* $t-1$.

(C) *С точностью до некоммутативного сдвига и эквивалентности, любое не-BPS-решение* $\Phi\in\mathcal{M}$ *с* $r(\Phi)=2$ *имеет вид* (4.17) *для некоторых целых* s,t *с* $0\leqslant s\leqslant t-2$ *и некоторой пары* $(k,l)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ *с* $k^2+|l|^2=1$.

Доказательство. (A) Можно явно вычислить действие оператора $\Phi_+=a^*-\Phi^*a^*\Phi$ на всех векторах стандартного базиса. А именно, если $j\neq s-1,s,t-1,t$, то $\Phi e_j=\pm e_j$ и $\Phi^*e_{j+1}=\pm\Phi^*e_{j+1}$, откуда $\Phi_+e_j=0$. В оставшихся

случаях имеем

$$\Phi_+ e_{s-1} = \sqrt{s}((1-k)e_s + le_t), \quad \Phi_+ e_s = (1+k)\sqrt{s+1}e_{s+1} - l\sqrt{t+1}e_{t+1},$$
$$\Phi_+ e_{t-1} = \sqrt{t}(\bar{l}e_s + (1+k)e_t), \quad \Phi_+ e_t = -\bar{l}\sqrt{s+1}e_{s+1} + (1-k)\sqrt{t+1}e_{t+1}.$$

Отсюда прямой проверкой получается, что Φ является решением (см. утверждение 3(B)) и $e(\Phi) = s+t+1$ (см. формулу (4.1)). Кроме того, векторы $\Phi_+ e_{s-1}$, $\Phi_+ e_{t-1}$ пропорциональны друг другу (то же самое верно для пары $\Phi_+ e_s$, $\Phi_+ e_t$) и отличны от нуля, за исключением случая $s = 0$ и диагонального случая, когда $k = \pm 1$, $l = 0$. Поэтому $\operatorname{im}\Phi_+ = \langle v_1, v_2\rangle$, где ненулевые векторы

$$v_1 := (1-k)e_s + le_t, \quad v_2 := (1+k)\sqrt{s+1}e_{s+1} - l\sqrt{t+1}e_{t+1} \tag{4.18}$$

ортогональны друг другу и, следовательно, линейно независимы. Таким образом, $r(\Phi) = \dim\operatorname{im}\Phi_+ = 2$. Утверждение 17(B) дает тот же результат в исключительном случае $s = 0$ (кроме значения $k = -1$, когда Φ является BPS-решением). В исключительных случаях $k = \pm 1$, $l = 0$, $s \neq 0$ тот же самый результат получается небольшой модификацией приведенного рассуждения (обозначим через v_1 единственный ненулевой вектор из двух векторов $\Phi_+ e_{s-1}$, $\Phi_+ e_{t-1}$, и аналогично для v_2). Для доказательства равенства $u(\Phi) = 2$ заметим, что Φ получается из диагонального BPS-решения $\Phi_0 = I - 2P_0$ с $\operatorname{im} P_0 = \langle e_0, \dots, e_s\rangle$ добавлением положительного базового Φ_0-унитона P с $\operatorname{im} P = \langle e_0, \dots, e_{s-1}, e_{s+1}, \dots, e_{t-1}, \eta\rangle$, где $\eta = (1+k)e_s - le_t$. Действительно, условия (4.3) с заменой Φ на Φ_0 легко проверяются явным вычислением. (В комплексной координате c, вектор η пропорционален $e_s + ce_t$ при $k \neq -1$.) Отсюда также получается другое доказательство того, что Φ является решением и $e(\Phi) = s+t+1$.

(B) Пусть P есть канонический положительный Φ-унитон, т.е. $\operatorname{im} P = \operatorname{im}\Phi_+$. Действие оператора $I - 2P$ на всех базисных векторах легко найти с помощью (4.18). Например, $(I-2P)e_s = e_s - 2\frac{(e_s, v_1)}{(v_1, v_1)}v_1 = ke_s - le_t$. Умножая полученные результаты на (4.17), мы видим, что новое решение $\Psi := \Phi(I-2P)$ опять имеет вид (4.17) с заменой целых чисел (s,t) на $(s+1, t+1)$, а параметров (k,l) — на дробно-линейные выражения

$$k' = \frac{(s+t+2)k + (s-t)}{(s-t)k + (s+t+2)}, \quad l' = \frac{-2l\sqrt{(s+1)(t+1)}}{(s-t)k + (s+t+2)}.$$

(Зависимость комплексной координаты c' от c оказывается даже *линейной*.) Этим доказано утверждение о канонических положительных унитонах. Унитон, обратный к каноническому положительному, является базовым согласно

утверждению 13(A). Канонический ранг полученного нового решения не превосходит 2 (по утверждению 13(B)) и не равен 1 (согласно замечаниям 11 и 10). Следовательно, этот канонический ранг равен 2, а рассматриваемый базовый унитон является каноническим. Этим доказано утверждение о канонических отрицательных унитонах для $\Phi \in S^2_{s+1,t+1}$. Утверждение о канонических отрицательных унитонах для $\Phi \in S^2_{0t}$ можно проверить напрямую с помощью явной формулы для $\Phi_+ = -\Phi_-^*$ из доказательства утверждения 20(A) или вывести из утверждения 20(C), доказательство которого не использует интересующий нас результат.

(C) Установим следующую лемму: *если P — положительный базовый унитон ранга 2 для диагонального BPS-решения $\Phi_0 = I - 2P_0$ с $\operatorname{im} P_0 = \langle e_0, \dots, e_{p-1}\rangle$, то либо $\Phi_0(I-2P)$ является BPS-решением, либо $\operatorname{im} P = \langle e_p, e_0 + ce_{p+1}\rangle$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$.* Действительно, поскольку $\operatorname{im}(\Phi_0)_+ = \langle e_p\rangle$, мы можем записать $\operatorname{im} P = \langle e_p, \eta\rangle$, где $\eta \perp e_p$. Оператор $(\Phi_0)_- + 2a$ равен $2a$ на $\langle e_p\rangle^\perp$ и обращается в нуль на векторе e_p. Поэтому инвариантность $\operatorname{im} P$ относительно $(\Phi_0)_- + 2a$ эквивалентна существованию таких $A, B \in \mathbb{C}$, что $2a\eta = Ae_p + B\eta$. Если $B \neq 0$, то сравнение проекций обеих частей равенства на e_{p-1} дает $\eta_{p-1} = 0$. Тогда сравнение проекций на e_{p-2} дает $\eta_{p-2} = 0$ и т.д. В итоге получаем $P_0\eta = 0$, так что новое решение $\Phi_0(I-2P)$ оказывается BPS-решением. Если же $B = 0$, то $2a\eta = Ae_k$ и, следовательно, вектор η пропорционален $e_0 + ce_{p+1}$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$. Лемма доказана.

Теперь докажем основное утверждение индукцией по значению энергии $e(\Phi)$, отдельно для четных и нечетных значений. Например, пусть число $e(\Phi) = 2j+1$ нечетно. При $j = 0$ утверждение верно, т.к. все решения энергии 1 являются BPS-решениями. Допустим, что оно верно при всех $j \leqslant j_0 - 1$ и рассмотрим любое не-BPS-решение Φ с $e(\Phi) = 2j_0 + 1$ и $r(\Phi) = 2$. Добавляя к Φ канонический отрицательный унитон, получим новое решение Ψ с $e(\Psi) = 2(j_0-1)+1$ и $r(\Psi) \leqslant 2$ (см. утверждение 13(B)). Если $r(\Psi) = 2$, то по индуктивному предположению Ψ принадлежит некоторой сфере S^2_{st} с $s+t+1 = e(\Phi) - 2$. Более того, в этом случае переход от Ψ к Φ осуществляется добавлением *канонического* положительного унитона, так что Φ принадлежит $S^2_{s+1,t+1}$ согласно утверждению (B). Если же $r(\Psi) = 1$, то в силу замечания 11 можно (после некоммутативного сдвига) считать, что $\Psi = I - 2P_0$ с $\operatorname{im} P_0 = \langle e_0, \dots, e_m\rangle$, где $m = 2j_0 - 1$. Тогда Φ принадлежит $S^2_{0,m+1}$ по доказанной выше лемме. Этим доказан шаг индукции. Доказательство для четных значений $e(\Phi)$ полностью аналогично. $\square$

Утверждение 20 дает следующее описание пространств $\mathcal{M}(e,2,u)$.

Утверждение 21. *Для всех $e \geqslant 3$ имеем $\mathcal{M}(e,2,2) = A_e \times \mathbb{C}^1_\lambda$, где $\mathbb{C}^1_\lambda$ параметризует некоммутативные сдвиги, а A_e получается из объединения $\cup(S^2_{st})$ (по всем целым s,t с $0 \leqslant s \leqslant t-2$ и $s+t+1=e$) удалением точки $(k,l)=(-1,0)$ сферы $S^2_{0,e-1}$. Множество $\mathcal{M}(e,2,u)$ пусто при $u \geqslant 3$.*

Замечание 15. Опишем множества A_e с более геометрической точки зрения. При этом заменим букву e на m во избежание конфликта обозначений. Для любого $m \geqslant 3$ множество A_m является объединением $g := [(m-1)/2]$ двумерных сфер $S_j := S^2_{j-1,m-j}$ $(j=1,\dots,g)$, из которого удалена одна точка сферы S_1. Каждая сфера S_j состоит из неграссмановых решений, за исключением двух своих "полюсов" $p_j, p_{j+1} \in S_j$, где точка p_j представляет собой диагональное грассманово решение с образом $\langle e_{j-1},\dots,e_{m-j}\rangle$. Как в п. 4.3, можно считать S_j "комплексной пленкой", интерполирующей между грассмановыми решениями p_j, p_{j+1}. Точка $p_1 \in S_1$ не принадлежит A_m, поскольку она представляет собой BPS-решение ($u=1$). Имеем $S_j \cap S_{j+1} = \{p_{j+1}\}$ при каждом $j=1,\dots,g$, а все остальные сферы S_j попарно не пересекаются. Поэтому множество A_m есть *цепочка из g двумерных сфер, последовательно соединяющих точки $p_1,\dots,p_g$ и не имеющих других точек пересечения.* Можно было бы еще представить A_m как объединение g непересекающихся экземпляров $S_j \setminus \{p_j\}$ плоскости $\mathbb{C}^1$, но это несколько затемняет структуру особенностей алгебраического многообразия A_m в точках p_j.

4.6. Решения с $e=4$. Согласно замечанию 11 для любого не-BPS-решения $\Phi \in \mathcal{M}$ энергии $e(\Phi)=4$ имеем либо $r(\Phi)=3$ либо $r(\Phi)=2$. Из утверждений 17(C) и 17(B) видно, что случай $r(\Phi)=3$ имеет место тогда и только тогда, когда Φ принадлежит (с точностью до некоммутативного сдвига и эквивалентности) сфере (4.10), отвечающей $G=\langle e_1, R_\alpha - e_0\rangle$ и $B=\langle e_0,e_1,e_2,R_\alpha\rangle$ для некотрого $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Поэтому $\mathcal{M}(4,3,2) \cong \mathbb{C}^1_\lambda \times (\mathbb{C}^1_\alpha \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^1_c$, где λ параметризует некоммутативные сдвиги, а c — все не-BPS-решения вида (4.10) при каждом фиксированном $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Из утверждения 21 видно, что случай $r(\Phi)=2$ имеет место тогда и только тогда, когда Φ принадлежит (с точностью до некоммутативного сдвига и эквивалентности) сфере S^2_{03}, задаваемой формулой (4.17) для $s=0$, $t=3$, причем из этой сферы удалена одна точка. Таким образом, $\mathcal{M}(4,2,2) \cong \mathbb{C}^1_\lambda \times \mathbb{C}^1_c$, где $c \in \mathbb{C}$ параметризует все не-BPS-решения вида (4.17) с $s=0$, $t=3$ (связь между c и (k,l) задается формулами (4.16)). Этим доказана часть (A) следующего утверждения.

Утверждение 22. (A) *С точностью до некоммутативного сдвига и эквивалентности каждое не-BPS-решение* $\Phi \in \mathcal{M}$ *с* $e(\Phi) = 4$ *задается либо формулой* $\Phi = (I - 2P^0)(I - 2Q(c))$, *где* $\operatorname{im} P^0 := \langle e_0 \rangle$ *и* $\operatorname{im} Q(c) := \langle e_1, e_2, e_0 + ce_3 \rangle$ *для всех* $c \in \mathbb{C}$ (*это в точности формула* (4.17) *при* $s = 0$, $t = 3$, $k \neq -1$) *либо формулой* $\Phi = (I - 2P^0)(I - 2P(c, \alpha))$, *где* $\operatorname{im} P(c, \alpha) := \langle e_1, e_0 + ce_2, R_\alpha - e_0 \rangle$ *для всех* $c \in \mathbb{C}$ *и* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (*это — частный случай формулы* (4.10)). *Таким образом, имеем* $\mathcal{M}(4, 2, 2) \cong \mathbb{C}^2$ *и* $\mathcal{M}(4, 3, 2) \cong \mathbb{C}^3 \setminus \mathbb{C}^2$.

(B) *Множество* $\mathcal{M}(4, 3, 2) \cup \mathcal{M}(4, 2, 2)$ *всех не-BPS-решений энергии* 4 *является вещественно-аналитическим подмногообразием в* $U(H)$, *изоморфным* $\mathbb{C}^3$. *Его замыкание в* $U(H)$ *есть вещественно-аналитическое подмногообразие, изоморфное* $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$. *Переход к этому замыканию осуществляется добавлением некоторых BPS-решений энергии* 4 *и канонического ранга* $\leqslant 2$.

Доказательство. Осталось доказать часть (B). Пользуясь определением (4.6), представим все элементы множества $\mathcal{M}(4, 2, 2)$ как пределы элементов $\mathcal{M}(4, 3, 2)$ по формуле[6]

$$Q(c) = \lim_{\alpha \to 0} P(-\sqrt{3}c/\alpha,\, \alpha).$$

Это позволяет нам вещественно-аналитически и взаимно-однозначно параметризовать замыкание множества $\mathcal{M}(4, 3, 2) \cup \mathcal{M}(4, 2, 2)$ в $U(H)$ посредством многообразия $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$. Действительно, покроем $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$ двумя координатными картами $(c', \alpha, \lambda) \in \mathbb{C}^3$ и $(c'', \alpha, \lambda) \in \mathbb{C}^3$ с функцией перехода $c'' = 1/c'$. Вложим первую карту в $U(H)$ по формуле $\Phi(c', \alpha, \lambda) := U_\lambda(I - 2P^0)(I - 2P_1(c', \alpha))U_\lambda^*$, где U_λ есть некоммутативный сдвиг (см. п. 4.3), а ортопроектор $P_1(c', \alpha)$ задан формулой

$$\operatorname{im} P_1(c', \alpha) := \langle e_1,\, e_0 + c'e_3 + \sqrt{3}c'\alpha M(\alpha),\, e_2 + \alpha e_3/\sqrt{3} + \alpha^2 M(\alpha) \rangle =$$

$$= \operatorname{im} P(-\sqrt{3}c'/\alpha,\, \alpha), \quad \text{причем} \quad M(\alpha) := \frac{\sqrt{2}}{\alpha^4} \left(R_\alpha - \sum_{j=0}^{3} \frac{\alpha^j e_j}{\sqrt{j!}} \right)$$

есть голоморфная H-значная функция от $\alpha \in \mathbb{C}$ с $M(0) = e_4/\sqrt{12}$. Вторая карта аналогично вкладывается в $U(H)$ по формуле $\Psi(c'', \alpha, \lambda) := \Phi(1/c'', \alpha, \lambda) = U_\lambda(I - 2P^0)(I - 2P_2(c'', \alpha))U_\lambda^*$, где

$$\operatorname{im} P_2(c'', \alpha) := \langle e_1,\, c''e_0 + e_3 + \sqrt{3}\alpha M(\alpha),\, e_2 + \alpha e_3/\sqrt{3} + \alpha^2 M(\alpha) \rangle.$$

[6]Если просто фиксировать $c \in \mathbb{C}$ и устремить $\alpha \to 0$, то предел проекторов $P(c, \alpha)$ будет равен $Q(0)$ независимо от значения c.

Векторы, порождающие подпространства $\operatorname{im} P_1(c',\alpha)$ и $\operatorname{im} P_2(c'',\alpha)$, всегда линейно независимы, поскольку уже их проекции на $\langle e_0,e_1,e_2\rangle$ таковы. Теперь ясно, что замыкание множества $\mathcal{M}(4,3,2)\cup\mathcal{M}(4,2,2)$ в $U(H)$ получается добавлением к этому множеству следующих семейств BPS-решений: $\mathcal{M}(4,1,1)\cong\mathbb{C}^1$ и $\mathcal{M}_1\cong\mathbb{C}^2\setminus\mathbb{C}^1$ (в обозначениях замечания 12). Множество $\mathcal{M}_1$ состоит из всех BPS-решений с кратностями 3, 1 и является одной из двух связных компонент пространства $\mathcal{M}(4,2,1)$. $\square$

4.7. Решения с $e=5$. Множества всех не-BPS-решений $\Phi\in\mathcal{M}_0$ энергии 5 и канонического ранга 4 или 2 уже известны: мы имеем $\mathcal{M}(5,4,2)\cong D^3\times\mathbb{C}^1$ для некоторого открытого подмножества $D^3\subset\mathbb{C}^3$ (см. замечание 14) и $\mathcal{M}(5,2,2)\cong\mathbb{C}^1\times(S^2_{13}\cup S^2_{04}\setminus\{\mathrm{pt}\})$ (см. замечание 15). Кроме того, утверждение 17(B) описывает две связные компоненты множества $\mathcal{M}(5,3,2)$. Обозначим их через $\mathcal{N}_j\cong\mathcal{B}_j\times\mathbb{C}^1_c$ $(j=1,2)$. Здесь $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\cong\mathbb{C}^2\setminus\mathbb{C}^1$ — это две связные компоненты множества $\mathcal{M}(5,2,1)$ (см. утверждение 16(C)), а каждое $\mathcal{N}_j$ состоит из всех не-BPS-решений вида (4.10), для которых $B\in\mathcal{B}_j$. Следующее утверждение завершает описание полной картины.

Утверждение 23. (A) *Каждое не-BPS-решение $\Phi\in\mathcal{M}_0$ с $e(\Phi)=5$ и $r(\Phi)=3$ либо принадлежит $\mathcal{N}_1\cup\mathcal{N}_2$, либо имеет вид*

$$\Phi=U_\lambda(I-2P_0)(I-2P(c_1,c_2))U_\lambda^* \tag{4.19}$$

для некоторых $\lambda\in\mathbb{C}$, $c_1\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $c_2\in\mathbb{C}$, где U_λ есть некоммутативный сдвиг, а P_0, $P(c_1,c_2)$ — ортопроекторы, заданные формулами

$$\operatorname{im}P_0=\langle e_0,e_1\rangle,\quad \operatorname{im}P(c_1,c_2)=\langle e_2,\ e_0+c_1e_3,\ e_1+c_2e_3+c_1e_4/2\rangle. \tag{4.20}$$

Обозначим множество всех таких операторов (4.19) через $\mathcal{N}_3$. Тогда имеем $\mathcal{M}(5,3,2)=\mathcal{N}_1\cup\mathcal{N}_2\cup\mathcal{N}_3$. Множества $\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2,\mathcal{N}_3$ являются непересекающимися незамкнутыми вещественно-аналитическими подмногообразиями в $U(H)$, изоморфными $\mathbb{C}^3\setminus\mathbb{C}^2$.

(B) *Замыкания множеств $\mathcal{N}_j$ при $j=1,2$ получаются добавлением к ним множеств $\mathcal{B}_j\cup(\mathbb{C}^1\times S^2_{04})\subset\mathcal{M}(5,2,1)\cup\mathcal{M}(5,1,1)\cup\mathcal{M}(5,2,2)$ и изоморфны $\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}^2$. Замыкание множества $\mathcal{N}_3$ получается добавлением к нему множества $\mathbb{C}^1\times(S^2_{04}\cup S^2_{13})=\mathcal{M}(5,1,1)\cup\mathcal{M}(5,2,2)$ и изоморфно прямому произведению $\mathbb{C}^1$ на некоторую компактную комплексную поверхность с одной особой точкой типа конуса.*

Доказательство. (A) Добавляя к Φ канонический отрицательный Φ-унитон, получим новое решение Ψ с $e(\Psi)=2$. Согласно замечанию 11 можно

считать, что $\Psi = I - 2P_D$, где P_D есть ортопроектор на некоторое BPS-подпространство $D \subset H$ размерности 2. Из утверждения 13(A) вытекает, что $\Phi = (I - 2P_D)(I - 2P)$ для некоторого ортопроектора P с $\dim \operatorname{im} P = 3$, удовлетворяющего условиям (4.3) с заменой Φ на $\Psi = I - 2P_D$. Согласно формуле (3.13), эти условия на пространство $V := \operatorname{im} P$ имеют вид

$$E \ominus D \subset V \quad \text{и} \quad (P_D a P_D + P_D^\perp a P_D^\perp)V \subset V, \tag{4.21}$$

где BPS-решение $E \supset D$ размерности $2 + r(\Psi)$ определяется как образ BPS-решения D при добавлении канонического положительного Ψ-унитона (тогда $\operatorname{im} \Psi_+ = E \ominus D$ в силу замечания 10). Применяя P_D к обеим частям второго условия (4.21) и пользуясь инвариантностью D относительно a, получаем, что $aP_DV \subset P_DV$. Таким образом, *векторное пространство $P_DV \subset D$ является BPS-подпространством в H*. Его размерность может быть равна 0, 1 или 2. Покажем, что первый случай невозможен, второй дает $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$, а третий дает $\mathcal{N}_3$.

Случай 1: $\dim P_DV = 0$. Тогда $V \perp D$ и исходное решение $\Phi = (I - 2P_D)(I - 2P)$ равно $I - 2P_{D\oplus V}$. При этом второе условие (4.21) принимает вид $aV \subset D \oplus V$, откуда $a(D \oplus V) \subset D \oplus V$ и Φ является BPS-решением вопреки предположению. Следовательно, случай 1 невозможен.

Случай 2: $\dim P_DV = 1$. Тогда векторное подпространство $V' := \{x \in V \mid P_Dx = 0\} = V \cap D^\perp$ имеет коразмерность 1 в V, т.е. $\dim V' = 2$. После некоммутативного сдвига можно считать, что одномерное BPS-подпространство P_DV натянуто на вектор $e_0 \in D$. Значит, вектор нормали u к V' в V можно записать в виде $u = e_0 + \xi$, где $\xi \in D^\perp$. Заметим, что $E \ominus D \subset V'$ в силу первого условия (4.21) и положим $V_1 := V' \ominus (E \ominus D)$. Тогда второе условие (4.21) принимает вид $P_D^\perp a V_1 \subset V'$, $P_D^\perp a\xi \subset V'$ или, эквивалентно,

$$aV_1 \subset M \quad \text{и} \quad a\xi \in M, \qquad \text{где} \quad M := D \oplus V' = E \oplus V_1. \tag{4.22}$$

Отсюда $\dim M = 4$ и M является BPS-подпространством. Поскольку $D \ni e_0$, имеем $E \supset \langle e_0, e_1\rangle$. Поэтому $G := M \ominus \langle e_0\rangle$ является грассмановым решением энергии 5 и дефекта 2 (см. начало п. 4.3).

Если $\xi = 0$, то исходное решение $\Phi = (I - 2P_D)(I - 2P)$ совпадает с $I - 2P_G$. Поскольку $r(\Phi) = 3$, из утверждения 17(B) вытекает, что $\Phi \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$. Поэтому будем считать, что $\xi \neq 0$. Тогда $B := M \oplus \langle \xi\rangle$ является BPS-подпространством размерности 5. (Это вытекает из (4.22) и того, что $\xi \perp M$ согласно определениям ξ и M.) Пусть $k \geqslant 2$ есть наибольшее целое число

такое, что $e_0, e_1, \dots, e_{k-1} \in M$. Тогда $\xi = cP_M^\perp e_k$ для некоторого $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Чтобы убедиться в этом, заметим, что все прообразы всех базисных векторов (4.9) пространства M относительно a лежат опять в M за исключением $a^{-1}(e_{k-1}) = e_k/\sqrt{k} + \text{const}\cdot e_0$.) Отсюда имеем $B = M \oplus \langle e_k \rangle$, что согласуется с обозначениями п. 4.3. Полагая $N := P_M^\perp e_k$, мы видим, что $\xi = cN$, $V = V' \oplus \langle e_0 + cN \rangle$ и $B \ominus G = \langle e_0, N \rangle$. Теперь прямая проверка, использующая (4.22) и очень похожая на доказательство утверждения 18, показывает, что $\Phi x = x$ для $x \in B^\perp$, $\Phi x = -x$ для $x \in G$, а сужение Φ на $B \ominus G$ задается матрицей (4.15) в ортонормированном базисе $\langle e_0, N/|N| \rangle$ пространства $B \ominus G$. Таким образом, решение Φ принадлежит сфере (4.10), порожденной грассмановым решением G. Поскольку $r(\Phi) = 3$, из утверждения 17(B) получаем, что $\Phi \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$.

Случай 3: $\dim P_D V = 2$. Тогда подпространство $V' := V \cap D^\perp$ имеет коразмерность 2 в V, т.е. $\dim V' = 1$. Из включения $V' \supset E \ominus D$ вытекает, что число $\dim(E \ominus D) = r(\Psi)$ тоже равно 1. Поэтому после некоммутативного сдвига можно считать, что $D = \langle e_0, e_1 \rangle$ и $E \ominus D = \langle e_2 \rangle = V'$. Так как $P_D V = D$, то оставшиеся базисные векторы пространства V, ортогональные к V', можно записать в виде $e_0 + \xi_0$ и $e_1 + \xi_1$, где $\xi_0, \xi_1 \in \langle e_0, e_1, e_2 \rangle^\perp$. Второе условие (4.21) принимает вид

$$P_D^\perp a\xi_0 \in V, \quad e_0 + P_D^\perp a\xi_1 \in V. \tag{4.23}$$

Отсюда $a\xi_0 \in V'$. Поскольку $V' = \langle e_2 \rangle$ и $\xi_0 \in \langle e_0, e_1, e_2 \rangle^\perp$, мы видим, что $\xi_0 = c_1 e_3$ для некоторого $c_1 \in \mathbb{C}$. Второе включение (4.23) можно записать в виде $e_0 + P_D^\perp a\xi_1 = Ae_2 + B(e_0 + \xi_0) + C(e_1 + \xi_1)$ для некоторых $A, B, C \in \mathbb{C}$. Сравнивая проекции обеих частей этого равенства на $\langle e_0 \rangle$, а затем на $\langle e_0, e_1 \rangle$, мы находим $B = 1$ и $C = 0$. Следовательно, $\xi_1 = c_1 e_4/2 + c_2 e_3$ для некоторого $c_2 \in \mathbb{C}$. Тем самым V совпадает с пространством $\operatorname{im} P(c_1, c_2)$ из (4.20), а оператор Φ задается формулой (4.19) с $\lambda = 0$. Случай $c_1 = 0$ следует исключить потому, что операторы (4.19) с $c_1 = 0$ и $\lambda = 0$ имеют канонический ранг 2 (они образуют сферу S^2_{13} в обозначениях п. 4.5). Все остальные решения (4.19) с $\lambda = 0$ имеют канонический ранг 3. Действительно, они не могут принадлежать $\mathcal{M}(5, 4, 2)$, поскольку действуют внутри BPS-подпространства с только одним корнем, и не могут принадлежать оставшейся сфере $S^2_{04} \subset \mathcal{M}(5, 2, 2)$, поскольку не переводят e_1 в $-e_1$.

(B) Утверждения о замыканиях множеств $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ следуют из результатов п. 4.3. Чтобы найти замыкание $\mathcal{N}_3$, рассмотрим множество $\mathcal{N}_3^2$ всех операторов (4.19) с $\lambda = 0$. Его замыкание может дополнительно содержать только

элементы сфер S^2_{04} и S^2_{13}. И обе этих сферы действительно содержатся в указанном замыкании: вводя обозначение $\Phi_0 = I - 2P_G$ для $G = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, мы видим, что $S^2_{13} \setminus \{\Phi_0\}$ есть координатная ось $\{c_1 = 0\}$ в обозначениях (4.20), а $S^2_{04} \setminus \{\Phi_0\}$ есть координатная ось $\{c'_1 = 0\}$ пространства $\mathbb{C}^2$ с координатами $c'_1 := c_1^{-1}$, $c'_2 := 2c_1^{-1}(1 - c_2c_1^{-1})$, где

$$\operatorname{im} P(c_1, c_2) = \langle e_2,\, e_3 + c'_1e_0,\, e_4 + c'_2e_0 + 2c'_1e_1\rangle. \tag{4.24}$$

Начиная отсюда, будем обозначать замыкание $\mathcal{N}^2_3$ через $\mathcal{R}^2$. Из уравнений (4.24) и (4.20) видно, что все точки комплексной поверхности $\mathcal{R}^2 = \mathcal{N}^2_3 \cup S^2_{13} \cup S^2_{04}$ гладкие, кроме, может быть Φ_0. Чтобы убедиться в том, что точка Φ_0 является особой, положим $\gamma_1 := c_1$ и $\gamma_2 := c_2^{-1}$. Тогда

$$\operatorname{im} P(c_1, c_2) = \langle e_2,\, e_0 + Ae_1 + Be_4,\, e_3 + Ce_1 + De_4\rangle, \tag{4.25}$$

где $A = -\gamma_1\gamma_2$, $B = -\frac{1}{2}\gamma_1^2\gamma_2$, $C = \gamma_2$, $D = \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2$. Поэтому поверхность $\mathcal{R}^2$ задается уравнениями $A + 2D = 0$, $AD = BC$ в пространстве $\mathbb{C}^4$ с координатами A, B, C, D. Начало координат Φ_0 пространства $\mathbb{C}^4$ является особой точкой типа конуса на $\mathcal{R}^2$ (см. замечание 17 ниже). Этим утверждение 23(B) доказано, поскольку замыкание множества $\mathcal{N}_3$ равно $\mathcal{R}^2 \times \mathbb{C}^1_\lambda$. $\square$

Замечание 16. Обобщая описание случая 2 из доказательства утверждения 23(A), можно показать, что все решения $\Phi \in \mathcal{M}_0$ с $r(\Phi) = e(\Phi) - 2$ и $\dim P_DV = 1$ принадлежат некоторым сферам (4.10) с точностью до некоммутативного сдвига. Описание случая 3 также допускает обобщение, в результате которого мы получаем 2-мерную "комплексную пленку" решений с $r = e-2$, интерполирующую между BPS-решением $B = M_1 \oplus \langle e_4\rangle = M_2 \oplus \langle e_3, e_4\rangle$ энергии e и двумя грассмановыми решениями $G_1 = M_1 \ominus \langle e_0\rangle$, $G_2 = M_2 \ominus \langle e_0, e_1\rangle$ энергии e и дефекта 2, 4 соответственно. Эта конструкция представляет собой следующий по сложности шаг по сравнению с конструкциями п. 4.3. Если энергия e достаточно велика, то можно пойти дальше и получить "комплексные пленки" более высокой размерности, интерполирующие между элементами большего множества грассмановых решений.

Замечание 17. Комплексная поверхность $\mathcal{R}^2$ биголоморфна проективной компактификации стандартного конуса $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$, вершина которого соответствует решению $\Phi_0 = I - 2P_G$. В этом легко убедиться, полагая $A = -\sqrt{2}x$, $B = y - z$, $C = y + z$, $D = x/\sqrt{2}$. Поскольку замыкания всех $\mathcal{N}_j$ ($j = 1, 2, 3$) содержат $\mathbb{C}^1_\lambda \times S^2_{04}$, можно представлять себе замыкание множества

$\mathcal{M}(5,3,2)$ в виде книги с 3 страницами $\bar{\mathcal{N}}_1, \bar{\mathcal{N}}_2, \bar{\mathcal{N}}_3$ (комплексной размерности 3) и переплетом $\mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}P^1$. Заметим еще, что формулы (4.20), (4.24) и (4.25) представляют собой не что иное как координатные представления поверхности $\mathcal{R}^2$ в трех различных стандартных картах грассманова многообразия $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$, где $\mathbb{C}^4 = \langle e_0, e_1, e_3, e_4 \rangle$.

4.8. Заключение. Обозначим через $\mathcal{M}(e) \subset U(H)$ множество всех решений $\Phi \in \mathcal{M}_0$ с $e(\Phi) = e$. Мы показали, что множества $\mathcal{M}(1), \mathcal{M}(2), \ldots, \mathcal{M}(5)$ равны соответственно

$$\mathbb{C}^1, \quad \mathbb{C}^2, \quad \mathbb{C}^3 \cup A_1^2, \quad \mathbb{C}^4 \cup A_1^3, \quad \mathbb{C}^5 \cup A_1^4 \cup A_2^3, \tag{4.26}$$

где $\mathbb{C}^e$ есть множество всех BPS-решений энергии e (см. п. 4.2), а каждое A_s^k есть некоторое неприводимое алгебраическое многоообразие размерности k над $\mathbb{C}$. (Здесь и далее имеется в виду, что все эти многообразия вещественно-аналитически вложены в $U(H)$.) Если $e \in \{3,4\}$, то имеем $A_1^{e-1} \cong \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^{e-2}$ и $A_1^{e-1} \cap \mathbb{C}^e \cong \mathbb{C}^{e-2}$ (см. пп. 4.4, 4.6). Однако алгебраические многообразия $A_1^4 \cong \mathbb{C}P^1 \times M^3$ и $A_2^3 \cong \mathcal{R}^2 \times \mathbb{C}^1$ уже не гладкие (см. замечания 14 и 17). При этом $\mathbb{C}^5 \cap A_1^4 \cong M^3$, $\mathbb{C}^5 \cap A_2^3 \cong \mathbb{C}^1$ и $A_1^4 \cap A_2^3 \cong \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}P^1$. В частности, множества $\mathcal{M}(e)$ линейно связны при $e \leqslant 5$.

Мы имеем также полное описание множеств $\mathcal{M}(e,r,u)$ (см. (4.5)) для всех случаев, когда $u = 1$ или $r \in \{1, 2, e-1, e\}$ (см. утверждение 16(C) и замечания 11, 14, 15): $\mathcal{M}(e,r,1)$ есть конечное дизъюнктное объединение открытых связных подмножеств $\mathbb{C}^r$ при $1 \leqslant r \leqslant e$, $\mathcal{M}(e, e-1, 2)$ есть открытое связное подмножество в $\mathbb{C}^{e-1}$, $\mathcal{M}(e,2,2)$ есть прямое произведение $\mathbb{C}^1$ на цепочку из $[(e-1)/2]$ экземпляров $\mathbb{C}P^1$, из которой удалена одна точка, а все остальные множества $\mathcal{M}(e,r,u)$ в указанном диапазоне значений e, r, u являются пустыми. Вне этого диапазона известно только то, что $\mathcal{M}(5,3,2)$ есть объединение 3 непересекающихся экземпляров $\mathbb{C}^3 \setminus \mathbb{C}^2$ и что все множества $\mathcal{M}(e, e-2, u)$ пусты при $u \geqslant 3$.

Эти результаты позволяют высказать следующие *гипотезы*, которые суммируют основные моменты полученного в настоящей работе "экспериментального материала".

(1) Имеем $\mathcal{M}(e) = \mathbb{C}^e \cup A_1^{e-1} \cup \ldots \cup A_g^{e-g}$, где $g = [(e-1)/2]$, $\mathbb{C}^e$ есть множество BPS-решений, а каждое A_s^{e-s} есть неприводимое алгебраическое многообразие размерности $e-s$ над $\mathbb{C}$, содержащее множество $\mathcal{M}(e,1,1) \subset \mathbb{C}^e$. В частности, пространство $\mathcal{M}(e)$ всегда связно.

(2) Множество $\mathcal{M}(e,r,u)$ либо пусто, либо r-мерно над $\mathbb{C}$.

(3) Любое решение $\Phi \in \mathcal{M}_0$ подчинено некоторому BPS-решению $\Phi_0 = I - 2P_0$ той же энергии, т.е. имеем $\dim \operatorname{im} P_0 = e(\Phi)$ и $\Phi x = x$ для всех $x \in (\operatorname{im} P_0)^\perp$.

(4) Для всякого BPS-решения Φ_0 множество всех подчиненных Φ_0 решений $\Phi \in \mathcal{M}(e)$ имеет размерность $[(e(\Phi_0) - r(\Phi_0))/2]$ над $\mathbb{C}$, содержит Φ_0 в качестве гладкой точки и является трансверсальным к множеству всех BPS-решений в этой точке.

(5) Имеем $r(\Phi) \geqslant u(\Phi)$ для всех решений Φ, причем для диагональных Φ (см. п. 3.6) имеет место равенство. Множество $\mathcal{M}(e, r, u)$ непусто тогда и только тогда, когда $e \geqslant r \geqslant u$ и $2e \geqslant u(u+1)$.

Замечание 18. А. В. Домрина [116] доказала гипотезу (3), причем для этого не потребовалось существенно новых идей по сравнению с изложенными выше, и сделала большие продвижения в доказательстве гипотезы (5), связанные с переносом на некоммутативный случай понятия петлевого поднятия (extended solution), которое в ситуации п. 1.1 было введено К. Уленбек [32]. А именно, в [116] показано, что равенство $r(\Phi) = u(\Phi)$ имеет место для всех диагональных решений Φ (но, разумеется, не только для них: многочисленные примеры недиагональных решений с $r(\Phi) = u(\Phi) = 2$ содержатся в п. 4.5) и установлено, что выполнение неравенств $e \geqslant r \geqslant u$ и $2e \geqslant u(u+1)$ необходимо для непустоты $\mathcal{M}(e, r, u)$, а после замены неравенства $2e \geqslant u(u+1)$ на более сильное неравенство $2e \geqslant 2r + u(u-1)$ также и достаточно.

Список публикаций автора по теме диссертации

1. Об одном варианте задачи Римана в теории интегрируемых систем. Доклады Росс. Акад. Наук, 390 (2003), выпуск 3, 301–303.

2. Достаточное условие разрешимости задачи Римана и его приложения к теории интегрируемых систем. "Геометрический анализ и его приложения". Труды международной школы-конференции, г. Волгоград (24.05.04 — 30.05.04). Изд-во Волгоградского госуд. ун-та, 2005. Стр. 33–43.

3. Задача Римана и матричнозначные потенциалы со сходящейся функцией Бейкера–Ахиезера. Теор. и Матем. Физика, 144 (2005), вып. 3, стр. 453–471.

4. Замечания о локальном варианте метода обратной задачи рассеяния. Труды Матем. Института им. В.А.Стеклова РАН, 253 (2006), стр. 46–60.

5. A noncommutative uniton theory. Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 10 (2007), pages 1–7.

6. Локальная голоморфная задача Коши для солитонных уравнений параболического типа. Доклады Росс. Акад. Наук, 420 (2008), стр. 14–17.

7. (совместно с А. В. Домриной) О расходимости ряда Концевича–Виттена. Успехи Матем. Наук 63 (2008), вып. 4, стр. 185–186.

8. Некоммутативные унитоны. Теор. и Матем. Физика, 154 (2008), вып. 2, стр. 220–239.

9. Пространства модулей решений некоммутативной сигма-модели. Теор. и Матем. Физика 156 (2008), вып. 3, стр. 307–327.

10. Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений. Известия АН Сер. Матем. 74 (2010), вып. 3, стр. 23–44.

11. О голоморфных решениях уравнений типа Кортевега–де Фриза, Труды Московского Матем. Общества 73 (2012), выпуск 2, стр. 241–257.

Список литературы

1. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков и Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи рассеяния*, Наука, Москва, 1980.
2. Л. А. Тахтаджян и Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва, 1986.
3. С. П. Новиков, *Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза*, Функц. анализ и его прилож. **8** (1974), вып. 3, 54–66.
4. В. Е. Захаров и А. Б. Шабат, *Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния.* II, Функц. анализ и его прилож. **13** (1979), вып. 3, 13–22.
5. Н. П. Векуа, *Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи*, 2-е изд., Наука, Москва, 1970.
6. А. Н. Паршин, *К главе X "Проблема Римана в теории функций комплексного переменного"*, В книге: Д. Гильберт. Избранные труды. Том II, Факториал, Москва, 1998, стр. 535–538.
7. K. Clancey and I. Gokhberg, *Factorization of matrix functions and singular integral operators*, Birkhäuser, Basel, 1981.
8. Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, Мир, Москва, 1987.
9. B. Malgrange, *Sur les deformations isomonodromiques. I. Singularites regulieres*, Mathematique et Physique. Sem. Ecole Norm. Sup. 1979–1982 (L. Boutet de Monvel et al., eds.), Progress in Math. no. 37, Birkhäuser, Basel, 1983, pp. 401–426.
10. А. А. Болибрух, *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений*, МЦНМО, Москва, 2009.
11. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Том II, Наука, Москва, 1985.
12. И. М. Кричевер, *Аналог формулы Даламбера для уравнений главного кирального поля и уравнения sine-Gordon*, Докл. АН СССР **253** (1980), 288–292.
13. И. М. Кричевер, *Нелинейные уравнения и эллиптические кривые*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Том 23, ВИНИТИ, Москва, 1983, стр. 79–136.
14. В. Г. Дринфельд и В. В. Соколов, *Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Том 24, ВИНИТИ, Москва, 1984, стр. 81–180.
15. L. A. Dickey, *Soliton equations and Hamiltonian systems*, 2 nd ed., World Scientific, Singapore, 2003.
16. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон и Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, Москва, 1988.
17. C.-L. Terng and K. Uhlenbeck, *Bäcklund transformations and loop group actions*, Comm. Pure Appl. Math. **53** (2000), 1–75.
18. В. Е. Захаров и А. Б. Шабат, *Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах*, Журнал экспер. и теор. физики **61** (1971), вып. 1, 118–134.
19. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, *The inverse scattering transform — Fourier analysis for nonlinear problems*, Stud. Appl. Math. **53** (1974), no. 4, 249–315.
20. Б. А. Дубровин, *Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с матричными операторами, и абелевы многообразия*, Функц. анализ и его прилож. **11** (1977), вып. 4, 28–41.
21. G. B. Segal and G. Wilson, *Loop groups and equations of KdV type*, Publ. Math. IHES **61** (1985), 5–65; Русский перевод в книге: Э. Прессли и Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, Москва, 1990, стр. 379–442.
22. G. Wilson, *The τ-functions of the $\mathfrak{g}AKNS$ equations*, Integrable systems. The Verdier memorial conf. (O. Babelon et al., eds.), Progress in Math. no. 115, Birkhäuser, Basel,

1993, pp. 131–145.
23. D. H. Sattinger and J. S. Szmigielski, *Factorization and the dressing method for the Gel'fand–Dikii hierarchy*, Physica D **64** (1993), 1–34.
24. G. D. Birkhoff, *The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations*, Proc. Amer. Acad. Arts and Sci. **49** (1913), 521–568; Collected Math. Papers, vol. 1, 1950, pp. 259–306.
25. А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Наука, Москва, 1967.
26. Y. Sibuya, *Linear differential equations in the complex domain: problems of analytic continuation*, Amer. Math. Soc., Providence, 1990.
27. P.-F. Hsieh and Y. Sibuya, *Basic theory of ordinary differential equations*, Springer, Berlin et al., 1999.
28. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, Москва, 1972.
29. В. П. Потапов, *Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций*, Труды ММО **4** (1955), 125–236.
30. Э. Прессли и Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, Москва, 1990.
31. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, *Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов*, Успехи матем. наук **13** (1958), вып. 2, 3–72.
32. K. Uhlenbeck, *Harmonic maps into Lie groups: classical solutions of the chiral model*, J. Diff. Geom. **30** (1989), 1–50.
33. А. В. Ефимов и В. П. Потапов, *J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей*, Успехи матем. наук **28** (1973), вып. 1, 65–130.
34. I. McIntosh, *Global solutions of the elliptic 2D periodic Toda lattice*, Nonlinearity **7** (1994), 85–108.
35. И. В. Чередник, *О регулярности "конечнозонных" решений интегрируемых матричных дифференциальных уравнений*, Докл. АН СССР **266** (1982), 593–597.
36. X. Zhou, *Zakharov–Shabat inverse scattering*, Scattering (R. Pike and P. Sabatier, eds.), Academic Press, San Diego etc., 2002, pp. 1707–1716.
37. R. Beals, P. Deift, and X. Zhou, *The inverse scattering transform on the line*, Important developments of soliton theory (A. S. Fokas and V. E. Zakharov, eds.), Springer, Berlin et al., 1993, pp. 7–32.
38. Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер и С. П. Новиков, *Интегрируемые системы.* I., Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 4. Динамические системы–4, ВИНИТИ, Москва, 1985, стр. 179–285.
39. G. Haak, M. Schmidt, and R. Schrader, *Group theoretic formulation of the Segal–Wilson approach to integrable systems with applications*, Reviews Math. Phys. **4** (1992), 451–499.
40. А. Ф. Леонтьев, *Целые функции. Ряды экспонент*, Наука, Москва, 1983.
41. И. Ц. Гохберг, *О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра*, Доклады АН СССР **78** (1951), вып. 4, 629–632.
42. С. Ленг, $SL_2(\ )$, Мир, Москва, 1977.
43. М. Рид и Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, том IV: Анализ операторов, Мир, Москва, 1982.
44. Д. Р. Яфаев, *Математическая теория рассеяния*, Изд-во СПГУ, С.-Петербург, 1994.
45. M. U. Schmidt, *Integrable systems and Riemann surfaces of infinite genus*, Memoirs Amer. Math. Soc. no. 581, Amer. Math. Soc., Providence, 1996.
46. Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, Москва, 1964.
47. О. Форстер, *Римановы поверхности*, Мир, Москва, 1980.
48. А. В. Комлов, *Аналитические свойства решений некоторых классических и некоммутативных интегрируемых систем*, Дисс. на соискание уч. степени к.ф.-м.н., МГУ, Москва, 2010.

49. Г. С. Салехов, *О задаче Коши–Ковалевской для одного класса линейных уравнений с частными производными в области сколь угодно гладких функций*, Изв. Акад. Наук СССР Сер. матем. **14** (1950), 355–366.
50. Г. С. Салехов и В. Р. Фридлендер, *К вопросу о задаче, обратной задаче Коши–Ковалевской*, Успехи матем. наук **7** (1952), вып. 5, 161–192.
51. Э. Л. Айнс, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, ОНТИ, Харьков, 1939.
52. Э. Гурса, *Курс математического анализа*, ГТТИ, Москва–Ленинград, 1933–1934.
53. E. Hopf, *The partial differential equation* $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, Comm. Pure Appl. Math. **3** (1950), no. 3, 201–230.
54. Н. А. Кудряшов, *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений*, Ин-т компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2004.
55. A.-L. Cauchy, *Mémoire sur les systèmes d'equations aux dérivées partielles d'ordre quelconque et sur leur réduction à systèmes d'equations linéaires du premier ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris **40** (1842), 131–138.
56. C. Moussy, *Théorème du point fixe et théorèms de Cauchy–Kowalewsky–Lednev pour les systèmes semi-linéaires*, Ann. Fac. Sci. Tolouse **8** (1999), 491–535.
57. S. von Kowalevsky, *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen*, Inaugural Dissertation zur erlangung der Doctorwurde bei der Philosophischen Facultät zu Göttingen, Georg Reimer, Berlin, 1874; J. reine angew. Math. **80** (1875), 1–32.
58. О. А. Олейник, *Теорема С. В. Ковалевской и современная теория уравнений с частными производными*, Соросовский образовательный журнал **8** (1997), 116–121.
59. J. Le Roux, *Sur les intégrales analytiques de l'équation* $\partial^2 z/\partial y^2 = \partial z/\partial x$, Bull. Sci. Math. **19** (1895), 127–128.
60. G. Mittag–Leffler, *Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm*, Acta Math. **15** (1891), 279–280.
61. D. Khavinson and H. S. Shapiro, *The heat equation and analytic continuation: Ivar Fredholm's first paper*, Expo Math. **12** (1994), 79–95.
62. *Письма Карла Вейерштрасса к Софье Ковалевской*, Наука, Москва, 1973.
63. Л. Берс, Ф. Джон и М. Шехтер, *Уравнения с частными производными*, Мир, Москва, 1966.
64. J. B. McLeod and P. J. Olver, *The connection between partial differential equations soluble by inverse scattering and ordinary differential equations of Painlevé type*, SIAM J. Math. Anal. **14** (1983), 488–506.
65. E. Holmgren, *Sur l'équation de la propagation de la chaleur*, Arkiv für Math. Astr. Phys. **4** (1908), no. 1–2, pp. 1–11; no. 3–4, pp. 1–28.
66. M. Gevrey, *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles. Premier mémoire*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **35** (1918), 129–190.
67. Г. Е. Шилов, *Математический анализ. Второй специальный курс*, Наука, Москва, 1965.
68. L. Rodino, *Linear partial differential operators in Gevrey spaces*, River Edge, NJ, World Sci., 1993.
69. C. Kiselman, *Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants*, Bull. Soc. Math. France **97** (1969), 329–356.
70. Ю. Ф. Коробейник, *Представляющие системы экспонент и задача Коши для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами*, Изв. Росс. Акад. Наук Сер. матем. **61** (1997), вып. 3, 91–132.
71. S. Rigat, *Application of functional calculus to complex Cauchy problems*, Comput. Meth. Funct. Theory **7** (2007), 509–526.
72. J. Leray, *Problème de Cauchy* I: *Uniformisation de la solution du problème de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy*, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 389–429.
73. P. Schapira, *Sheaves*: *from Leray to Grothendieck and Sato*, Séminaires et Congrès **9** (2004), 173–183.

74. M. Zerner, *Domaines d'holomorphie des fonctions vérifiànt une équation aux dérivées partielles*, C. R. Acad. Sci. Paris **272** (1971), 1646–1648.
75. Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, Мир, Москва, 1986–1987.
76. J. Persson, *Some results on classical solutions of the equation* $D_t^m u = x^q D_x^n u$, $m < n$, Boll. Unione Math. Ital. Ser. IV **3** (1970), 426–440.
77. G. M. Henkin, *Jean Leray and several complex variables*, in J. Leray, Oeuvres Scientifiques, vol. III, Springer-Verlag and SMF, Berlin and Paris, 1998, pp. 1–31.
78. D. Khavinson, *Holomorphic partial differential equations and classical potential theory*, Univ. de la Laguna Press, La Laguna (Tenerife), 1996.
79. Ю. А. Дубинский, *Задача Коши в комплексной области*, Изд-во МЭИ, Москва, 1996.
80. F. Linares and G. Ponce, *Introduction to nonlinear dispersive equations*, Springer, New York, 2009.
81. A. Rybkin, *The Hirota τ-function and well-posedness of the Korteweg–de Vries equation with an arbitrary step-like initial profile decaying on the right half-line*, Nonlinearity **24** (2011), 2953–2990.
82. A. Cohen and T. Kappeler, *Non-uniqueness for solutions of the Korteweg–de Vries equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **312** (1989), 819–840.
83. N. Hayashi and K. Kato, *Regularity in time of solutions to nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal. **128** (1995), 253–277.
84. H. Tahara, *On the singularities of solutions of nonlinear partial differential equations in the complex domain*, Microlocal analysis and asymptotic analysis (T. Kawai, ed.), RIMS Kôkyûroku **1397** (2004), pp. 102–111.
85. M. D. Kruskal, N. Joshi and R. Halburd, *Analytic and asymptotic methods for nonlinear singularity analysis*: *a review and extension of tests for the Painlevé property*, Integrability of nonlinear systems (Y. Kosmann–Schwarzbach et al., eds.), Lect. Notes Phys. **638** (2004), pp. 175–208.
86. R. Gérard and H. Tahara, *Singular nonlinear PDE*, Vieweg, Braunschweig, 1996.
87. S. Kichenassamy, *Fuchsian reduction*, Birkhäuser, Boston, 2007.
88. N. Joshi, J. A. Petersen and L. M. Schubert, *Nonexistence results for the Korteweg–de Vries and Kadomtsev–Petviashvili equations*, Stud. Appl. Math. **105** (2000), 361–374.
89. H. Hannach, A. A. Himonas and G. Petronilho, *Gevrey regularity in time for generalized KdV type equations*, Recent progress on some problems in SCV and PDE (S. Berhanu et al., eds.), Contemp. Math. **400** (2006), Amer. Math. Soc., Providence, pp. 117–127.
90. J. J. Duistermaat and F. A. Grünbaum, *Differential equations in the spectral parameter*, Comm. Math. Phys. **103** (1986), 177–240.
91. E. Witten, *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space*, Surveys in diff. geom. (Cambridge MA, 1990), vol. 1, Lehigh Univ., Bethlehem PA, 1991, pp. 243–310.
92. А. К. Звонкин и С. К. Ландо, *Графы на поверхностях и их приложения*, МЦНМО, Москва, 2010.
93. M. L. Kontsevich, *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*, Comm. Math. Phys. **147** (1992), 1–23.
94. А. В. Комлов, *Оценки классов Жеврея данных рассеяния для полиномиальных потенциалов*, Успехи матем. наук **63** (2008), вып. 4, 189–190.
95. И. М. Кричевер, *Алгебраические кривые и коммутирующие матричные дифференциальные операторы*, Функц. анализ и его прилож. **10** (1976), вып. 2, 75–77.
96. И. М. Гельфанд и Л. А. Дикий, *Дробные степени операторов и гамильтоновы системы*, Функц. анализ и его прилож. **10** (1976), вып. 4, 15–29.
97. R. Beals, P. Deift and C. Tomei, *Direct and inverse scattering on the line*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

98. Ю. И. Манин, *Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Том 11, ВИНИТИ, Москва, 1978, стр. 5–152.
99. F. Gesztesy, D. Race, K. Unterkofler and R. Weikard, *On Gelfand–Dickey and Drinfeld–Sokolov systems*, Reviews Math. Phys. **6** (1994), no. 2, 227–276.
100. И. М. Кричевер, *Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии*, Функц. анализ и его прилож. **11** (1977), вып. 1, 15–31.
101. R. Weikard, *On commuting differential operators*, Electron. J. Diff. Eq. **19** (2000), 1–11.
102. А. П. Веселов и А. Б. Шабат, *Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шредингера*, Функц. анализ и его прилож. **27** (1993), вып. 2, 1–21.
103. Г. Полиа и Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа*, 3-е изд., том II, Наука, Москва, 1978.
104. I. V. Cherednik, *Basic structures of soliton theory*, World Sci., Singapore, 1996.
105. W. J. Zakrzewski, *Low dimensional sigma models*, Adam Hilger, Bristol, 1989.
106. Й. Давидов и А. Г. Сергеев, *Твисторные пространства и гармонические отображения*, Успехи Матем. Наук **48** (1993), вып. 3 3–96.
107. M. A. Guest, *An update on harmonic maps of finite uniton number, via the zero curvature equation*, Integrable systems, topology, and physics. A conference on integrable systems in differential geometry. Univ. of Tokyo, July 17–21, 2000 (M. Guest et al., eds.), Contemp. Math. **309** (2002), Amer. Math. Soc., Providence, pp. 85–113.
108. G. Valli, *On the energy spectrum of harmonic* 2*-spheres in unitary groups*, Topology **27** (1988), no. 2, 129–136.
109. M. J. Ferreira, B. A. Simoẽs and J. C. Wood, *All harmonic* 2*-spheres in the unitary group, completely explicitly*, Math. Z. **266** (2010), 953–978.
110. J. M. Gracia-Bondia, J. C. Várilly and H. Figueroa, *Elements of noncommutative geometry*, Birkhäuser, Boston, 2001.
111. R. Rochberg and N. Weaver, *Noncommutative complex analysis and Bargmann–Segal multipliers*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 9, 2679–2687.
112. И. фон Нейман, *Математические основы квантовой механики*, Наука, Москва, 1964.
113. В. И. Арнольд, А. Н. Варченко и С. М. Гусейн-заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, МЦНМО, Москва, 2004.
114. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения*, Наука, Москва, 1987.
115. А. В. Комлов, *Некоммутативная грассманова* $U(1)$ *сигма-модель и пространство Баргманна–Фока*, Теор. Матем. Физика **153** (2007), 347–357.
116. А. В. Домрина, *Петлевые поднятия в некоммутативной сигма-модели*, Труды МИАН **279** (2012), 72–80.