Программа вступительных экзаменов в аспирантуру МИАН

специальность 1.1.3 – *Геометрия и топология*

Раздел 1. «Топология»

1. Понятие топологического пространства. Открытые и замкнутые множества. База и предбаза топологии. Внутренность и замыкание подмножества. Граница подмножества. Топология подпространства (индуцированная топология).

2. Аксиомы отделимости: хаусдорфовы, регулярные и нормальные пространства. Примеры. Связные топологические пространства. Линейно связные топологические пространства. Примеры.

3. Компактные пространства. Компактные множества на вещественной прямой и в n-мерном пространстве. Локально компактные пространства. Одноточечная компактификация Александрова локально компактного пространства.

4. Непрерывные отображения топологических пространств. Компактно-открытая топология на простанстве отображений.

5. Теорема Урысона о метризуемости.

6. Топология произведения топологических пространств. Топология Тихонова на бесконечных произведениях компактных пространств.

7. Гомотопные отображения. Понятие гомотопической эквивалентности. Ретракция. Фундаментальная группа. Гомотопическая инвариантность фундаментальной группы.

8. Накрывающее пространство. Универсальное накрытие. Связь фундаментальной группы накрытия и базы. Теорема о поднятии гомотопии. Классификация накрытий.

9. Фактор-топология. Надстройка, конус над пространством. CW-комплексы. Задание фундаментальной группы клеточного пространства образующими и соотношениями.

10. Лемма Шпернера. Теоремы Брауэра о неподвижной точке и о барабане (граничная сфера не является ретрактом шара).

11. Классификация двумерных компактных поверхностей.

12. Узлы и зацепления. Движения Райдемайстера. Полином Александера. Группа кос как фундаментальная группа конфигурационного пространства систем точек на плоскости.

13. Теорема Зейферта–ван Кампена. Фундаментальная группа дополнения к узлу.

14. Локально тривиальные расслоения. Расслоение Хопфа, его нетривиальность. Свойство накрывающей гомотопии. Пространства путей и петель. Расслоения в смысле Гуревича и Серра.

Список литературы

[1] П.С. Александров, Введение в теорию множеств и общую топологию. М: Наука, 1977.

[2] О.Я. Виро, О.А. Иванов, Н.Ю. Нецветаев, В.М. Харламов, Элементарная топология. - 2-е изд., исправл. - М.: МЦНМО, 2012.

[3] У. Масси, Дж. Столлингс, Алгебраическая топология. Введение, 1977.

[4] Дж. Милнор, А. Уоллес, Дифференциальная топология. М.: Мир, 1972.

[5] Н. Стинрод, У. Чинн, Первые понятия топологии. М: Мир, 1967.

[6] А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс, Курс гомотопической топологии. Изд. 2. URSS, 2014.

[7] А. Хатчер, Алгебраическая топология, М.: МЦНМО, 2011.

Раздел 2. «Геометрия»

1. Конические сечения. Фокальные и оптические свойства. Законы Кеплера.

2. Проективные пространства. Однородные координаты. Двойное отношение. Проективные преобразования. Проективная двойственность. Поляритет. Теоремы Дезарга, Паппа, Паскаля и Брианшона.

3. Геометрия Лобачевского. Модель на гиперболоиде в псевдоевклидовом пространстве. Модели Пуанкаре и Клейна. Модель на верхней полуплоскости. Теоремы косинусов и синусов. Группа изометрий плоскости Лобачевского.

4. Кривизна плоской кривой. Пространственные кривые. Сопровождающий репер (трехгранник Френе) и формулы Френе. Кривизна и кручение. Восстановление кривой по кривизне и кручению.

5. Первая и вторая квадратичные формы поверхности, оператор Вейнгартена. Длина кривой, лежащей на поверхности, углы между кривыми, площадь куска поверхности. Главные направления и главные кривизны. Гауссова и средняя кривизны. Развертывающиеся поверхности.

6. Уравнения Петерсона–Кодацци–Майнарди. Уравнения Гаусса–Вейнгартена. Теорема Гаусса Egregium.

7. Ковариантное дифференциирование векторных полей на поверхностях. Символы Кристоффеля. Преобразование символов Кристоффеля при замене координат. Формула Леви–Чивиты.

8. Геодезическая кривизна кривой. Геодезические линии. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Геодезические как локально кратчайшие. Формула Гаусса–Бонне.

9. Гладкие многообразия. Ориентация на многообразии. Ориентируемые и неориентируемые многообразия. Дифференцируемые отображения. Сферы, вещественные и комплексные проективные пространства как гладкие многообразия.

10. Касательное и кокасательное пространства к дифференцируемому многообразию в данной точке. Касательные векторы как дифференцирования пространства функций. Кокасательные векторы как дифференциальные 1-формы. Формулы преобразования при замене координат. Касательное и кокасательное расслоения.

11. Подмногообразие. Критические точки и критические значения дифференцируемого отображения. Лемма Сарда. Прообраз регулярного значения. Теорема Уитни о вложении.

12. Тензорные поля типа (p, q) на дифференцируемых многообразиях. Произведение тензоров. Свертка тензоров. Симметричные и кососимметричные тензоры. Операции симметрирования и альтернации тензора, их свойства.

13. Векторные поля на многообразиях. Интегральные кривые векторного поля. Однопараметрическая группа диффеоморфизмов. Коммутатор векторных полей. Производная Ли тензорных полей.

14. Римановы и псевдоримановы многообразия. Существование римановой метрики. Ковариантное дифференцирование тензорных полей. Связность Леви–Чивиты.

15. Тензор кривизны. Симметрии тензора кривизны. Тождества Бьянки. Тензор Риччи. Скалярная кривизна.

16. Дифференциальные p-формы на гладком многообразии. Внешний дифференциал и его свойства. Теорема Стокса. Дивергенция и ротор векторного поля. Частные случаи теоремы Стокса: формулы Грина, Кельвина–Стокса и Гаусса–Остроградского.

17. Замкнутые и точные формы. Лемма Пуанкаре о локальной точности замкнутой формы. Когомологии де Рама. Поведение дифференциальных форм и когомологий при отображениях. Гомотопическая инвариантность.

18. Группы Ли. Алгебры Ли. Левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля и дифференциальные формы. Структура алгебры Ли на касательном пространстве в единице группы Ли. Алгебра Ли матричной группы Ли. Однопараметрические подгруппы групп Ли. Экспоненциальное отображение.

Список литературы

[1] П.С. Александров, Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979.

[2] В.И. Арнольд, Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.

[3] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко, Современная геометрия, Методы и приложения. 1998.

[4] Р. Курант. Г. Роббинс. Что такое математика? (Элементарный очерк идей и методов). М.: МЦНМО, 2004.

[5] А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко, Курс дифференциальной геометрии и топологии. Изд. 4, перераб. и доп. URSS, 2020.

[6] С.П. Новиков, И.А. Тайманов, Современные геометрические структуры и поля. 2-е изд., испр., М.: МЦНМО, 2014.

[7] В.В. Прасолов, Геометрия Лобачевского М: МЦНМО, 2016.

[8] И.А. Тайманов, Лекции по дифференциальной геометрии. — Ижевск, 2002.