# Программа вступительных экзаменов в аспирантуру МИАН

**специальность 1.1.2** – *Дифференциальные уравнения и математическая физика*

## Раздел 1. «Дифференциальные уравнения»

1. Теорема существования и глобальной единственности решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Непродолжимые решения и теорема о продолжении решения до границы компакта.

2. Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений по начальным условиям и по параметру. Система уравнений в вариациях.

3. Линейные системы с переменными коэффициентами. Теорема о структуре пространстве решений однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Фундаментальная система решений. Метод вариации постоянных.

4. Экспонента матрицы. Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами. Уравнения с квазимногочленом в правой части.

5. Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость. Функция Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теорема об устойчивости по первому приближению.

6. Автономные системы. Положения равновесия и фазовые пространства. Классификация фазовых портретов на плоскости линейных однородных систем с постоянными коэффициентами.

7. Предельный цикл. Отображение последования Пуанкаре. Теорема Пуанкаре–Бендиксона.

8. Задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера–Лагранжа. Гамильтонов формализм. Теорема Гильберта о гладкости экстремалей. Задача с подвижными концами. Условия трансверсальности.

9. Необходимые и достаточные условия Лежандра и Якоби слабого минимума в задаче вариационного исчисления. Теория поля экстремалей: необходимые и достаточные условия Вейерштрасса сильного минимума.

10. Уравнения в частных производных первого порядка. Полные интегралы. Метод характеристик. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана.

11. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина.

# Список литературы


[1] В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: МЦНМО, 2012.

[2] В.П. Михайлов, Дифференциальные уравнения в частных производных, М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1976.

[3] Л.С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Классический учебник МГУ, 2019.

[4] Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.

[5] М.И. Зеликин, Оптимальное управление и вариационное исчисление, 2017.

[6] Л.К. Эванс, Уравнения с частными производными, Новосибирск: Тамара Рожковская, Университетская серия; Т. 7, 2003.

[7] И.М. Гельфанд, С.В. Фомин, Вариационное исчисление, М.: Физматлит, 1961

[8] А.Б. Каток, Б. Хасселблат, Введение в современную теорию динамических систем, М.: Факториал, 1999.


## Раздел 2. «Математическая физика»

1. Задача Коши для системы уравнений в частных производных. Теорема Ковалевской.

2. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Принцип Дюамеля. Формула Пуассона и теорема существования. Принцип максимума и теорема единственности.

3. Уравнение Пуассона в трехмерном пространстве. Потенциал Ньютона. Формулы Грина и теорема существования. Принцип максимума и теорема единственности.

4. Задача Коши для волнового уравнения. Формулы Даламбера, Кирхгофа и Пуассона. Запаздывающий потенциал. Закон сохранения энергии. Теорема существования и единственности.

5. Свойства гармонических функций (гладкость, устранение особенностей, поведение на бесконечности, принцип максимума, интегральное представление, теорема о среднем). Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Теоремы единственности.

6. Поверхностные потенциалы. Теоремы о скачке. Интегральные уравнения и теоремы существования для краевых задач. Функции Грина краевых задач.

7. Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в ограниченной области. Смешанные задачи. Общая схема разделения переменных.

8. Обобщенные функции. Дифференцирование обобщенных функций. Тензорное произведение и свертка. Обобщенные функции умеренного роста. Преобразование Фурье.

9. Обобщенные решения линейных уравнений в частных производных. Фундаментальные решения дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и их свойства. Теорема существования фундаментального решения. Лестница Хермандера. Фундаментальные решения операторов теплопроводности, Лапласа и волнового.

10. Пространства Соболева. Теорема вложения.

11. Псевдодифференциальные операторы и их свойства. Ограниченность п.д.о. в пространствах Соболева. Асимптотическое представление. Теорема о композиции и следствия из нее.

12. Эллиптические п.д.о. Параметрикс эллиптического оператора. Приложения к общим эллиптическим уравнениям.

# Список литературы


[1] В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. М: Наука, 1981.

[2] Ю.В. Егоров. Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы. М: Изд-во МГУ, 1985.

[3] Ю.В. Егоров. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М: Наука, 1984.

[4] М.А. Шубин. Лекции об уравнениях математической физики. М: МЦНМО, 2003.

[5] Р. Курант. Уравнения с частными производными. М: Мир, 1964.