Матричные модели, геометрия и интегрируемые системы

Леонид Олегович Чехов

Матричные модели, будучи в некотором смысле "нульмерными" объектами (т.е. теориями без континуальных, или полевых, степеней свободы) представляют собой, с одной стороны, достаточно простой объект, поддающийся исследованиям с помощью асимптотических и геометрических методов, а с другой стороны, они удивительным образом описывают целый класс самых разнообразных явлений, относящихся к двумерной (классической и квантовой) гравитации, спиновым моделям на двумерных поверхностях, суперсимметричным теориям Янга–Миллса и пр. Во многом это обусловлено тем поразительным разнообразием структур, которые скрываются за внешне вполне тривиальным матричным интегралом. Оказывается, что статистическая сумма уже наиболее простой эрмитовой матричной модели представляет собой тау-функцию иерархии цепочки Тоды, а ее "планарный предел" – ведущий асимптотический вклад в разложении по размеру матриц N – оказывается препотенциалом.

Требования к слушателям. Необходимы только знания стандартных математических курсов вплоть до комплексного анализа включительно. Все прочие сведения будут сообщаться по мере изложения материала.

Первая лекция – во вторник 3 апреля. Начиная с третьей недели, надеюсь, будет возможность давать две лекции в неделю.

Лекции 1–2

Эрмитов матричный интеграл. 1/N -разложение т Хофта. Метод ортогональных многочленов и уравнения иерархии цепочки Тоды. (Понятие о дискретных матричных моделях.)

Лекция 3

Условия Вирасоро в одноматричной модели. Петлевое уравнение. Простейшее решение BIPZ (Brezin–Itzykson–Parisi–Zuber).

Лекции 4–5 (непрерывные матричные модели.)

Матричная модель Концевича и гипотеза Виттена. Корреляционные функции квантовой двумерной гравитации и иерархия КдВ. Статистическая сумма обобщенной модели Концевича как тау-функция иерархии Кадомцева–Петвиашвили. Детерминантное представление и уравнения Хироты.

Лекция 6

Преобразования Мивы. Двойной скейлинговый предел и переходы между различными (дискретными и непрерывными) матричными моделями.

Лекция 7

Многозонные распределения собственных значений и спектральные кривые старших родов. Планарный предел эрмитовой одноматричной модели как препотенциал. Уравнения ассоциативности.

Лекция 8

Общее решение эрмитовой одноматричной модели в разложении по родам (в многозонном случае). Диаграммная техника.

Лекция 9

Обзор разнообразных обобщений (двухматричные модели, O(n)-модели, модели собственных значений, модели с жесткими стенками и т.д. – в зависимости от того, что успеем).

Литература. Хороших (или плохих – все равно) учебников не могу порекомендовать – их просто не существует в природе. Из доступной литературы есть обзор А.Ю.Морозова в УФН "Интегрируемость и матричные модели" т.37, стр.1–55 (1994), а также обзоры при участии Di Francesco (доступные в архиве) и оригинальные работы. Содержание последних 3 лекций можно найти в моей обзорной статье, опубликованной в УМН (2006).

Лекция 1
- Из истории метода обратной задачи
- Вывод уравнения Кортевега–де Фриза
- Тест Пенлеве

Лекция 2
- Лаксова пара для уравнения Кортевега–де Фриза
- Решения Йоста уравнения Штурма–Лиувилля

Лекция 3
- Матрица монодромии
- Интерпретация в терминах данных рассеяния
- Целое решение уравнения Штурма–Лиувилля
- Производная решений Йоста по спектральному параметру.

Лекция 4
- Дискретный спектр оператора Штурма–Лиувилля
- Явные формулы для дискретных данных рассеяния в терминах решений Йоста
- Дисперсионное соотношение.
- Связь нулей функции Йоста и собственных значений

Лекция 5
- Спектральные данные, восстановление матрицы монодромии по спектральным данным
- Обратная задача для уравнения Штурма–Лиувилля
- Задача Римана.
- Уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко.
- Вывод уравнения Штурма–Лиувилля из уравнений обратной задачи.
- Предел совпадающих собственных значений.
- Временная эволюция спектральных данных.

Лекция 6.
- Солитонные решения: общая формула
- Одно- и двусолитонные решения.
- Интегралы движения.

Лекция 7
- Общие замечания о симплектических формах и скобках Пуассона.
- Вывод скобки Гарднера из формы Захарова–Фаддеева
- Вариации данных рассеяния.
- Рекурсионный оператор.
- Иерархии интегрируемых уравнений и скобок Пуассона.

Последующие лекции будут посвящены теории (2+1)-мерных интегрируемых уравнений. Основным примером здесь будет уравнение Кадомцева–Петвиашвили

в двух своих версиях: KPI и KPII. Будет дано обобщение метода обратной задачи рассеяния на случай двумерных задач и построена иерархия интегрируемых уравнений, ассоциированных с нестационарным уравнением Шредингера и уравнением теплопроводности.