Программа вступительных экзаменов в аспирантуру по направлению 01.06.01 математика и механика

специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Введение

Настоящая программа базируется на следующих дисциплинах: Математический анализ, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики / уравнения в частных производных, алгебра, функциональный анализ, методы вычислений, прикладные вопросы функционального анализа, основы мат. статистики и теории вероятности.

I. Элементы линейной алгебры

Линейные пространства и их подпространства. Базис, размерность. Матрицы, определители. Собственные числа и собственные вектора. Ранг матрицы. Теорема Кронекера — Капелли. Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичных форм к нормальному виду. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме.

II. Элементы математического анализа

Равномерная сходимость последовательностей функций и функциональных рядов. Интеграл Римана, условия интегрируемости функции по Риману. Интеграл Лебега (основная конструкция и отличие от интеграла Римана).
Ряды Фурье и их сходимость.
Топологические, метрические, нормированные и банаховы пространства. Примеры. Гильбертовы пространства. Три основных принципа линейного функционального анализа (теоремы Хана — Банаха, принцип равномерной ограниченности, теорема Банаха об обратном операторе). Компактные и вполне непрерывные операторы. Принцип сжимающих отображений.
Функции комплексного переменного, их дифференцируемость. Примеры. Конформные отображения.
Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряды Тейлора и Лорана. Изолированные особые точки.
Вычеты и их свойства.
Схема Бернулли. Теорема Муавра-Лапласа.
Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

III. Дифференциальные уравнения

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (Пикара). Теорема Пеано (без доказательства). Теорема о продолжении решения. Случай линейных уравнений.
Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений по начальным условиям и параметрам. Уравнения в вариациях.
Линейные системы. Определитель Вронского. Теорема Лиувилля для уравнений 2-го порядка. Метод вариации постоянных.
Решение систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами.
Решение задачи Коши для уравнения 1-го порядка с частными производными.
Уравнения с частными производными. Порядок системы уравнений. Характеристики систем уравнений 1-го порядка. Нормальные системы уравнений и задача Коши. Теорема Коши — Ковалевской (без доказательства). Классификация линейных уравнений 2-го порядка и их приведение к каноническому виду.
Основные уравнения математической физики. Постановки начально-краевых задач.
Решение смешанных задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности методом разделения переменных (метод Фурье).

Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Функция Грина задачи Дирихле и ее свойства.

Гармонические функции и их свойства: теорема о среднем, принцип максимума, теорема Лиувилля, теорема об устранимости особенности.

Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Единственность решения и условия разрешимости.

Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Решение задачи Коши в различных классах начальных функций.

Решение задачи Коши для волнового уравнения методом преобразования Фурье. Формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа, их физический смысл.

Пространства Соболева и их свойства.

Обобщенные решения краевых и начально-краевых задач для линейных уравнений 2-го порядка общего вида: эллиптического, гиперболического и параболического. Применение метода Галёркина.

Численные методы решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: Эйлера, Рунге — Кутта, Адамса, стрельбы, прогонки.

Численные методы решения задач математической физики: бегущего счета (гиперболические уравнения), явные и неявные схемы (параболические уравнения), итерационные методы (уравнение Лапласа).

IV. Динамические системы и оптимальное управление

Общие свойства динамических систем. Особые точки линейных систем на плоскости. Устойчивость по Ляпунову.

Простейшие задачи вариационного исчисления. Задача Лагранжа. Достаточные условия слабого экстремума. Принцип максимума Понтрягина.

Список литературы

к I:

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М.: Лань, 2007.
2. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. — М.: Лань, 2009.

к II:

1. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Высшая школа, 1985.
2. Боровков А. А. Математическая статистика / А. А. Боровков. — М.: Физматлит, 2007.
3. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Физматлит, 2006.
4. Никольский С. М. Курс математического анализа. В 2 т. / С. М. Никольский. — М.: Физматлит, 2001.
5. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. — М.: Лань, 2009.

к III:

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. — М.: Физматлит, 2003.
2. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. — М.: Наука, 1983.
3. Михлин С. Г. Курс математической физики / С. Г. Михлин. — СПб.: Лань, 2002.
4. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: ГИТТЛ, 2008 (и последующие издания).

к IV:

1. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. — М.: Наука, 1970.
2. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. — М.: Наука, 2003.

3. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин. — М.: Наука, 1976.

1. Вопросы программы вступительного экзамена в аспирантуру по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения

Раздел 1

Теоремы о существовании неявной функции. Равномерная сходи-мость функциональных последовательностей и рядов. Теорема о суще-ствовании интеграла Римана. Несобственные интегралы, признаки равно-мерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру. Метрические пространства. Теорема о пополнении. Топологические пространства. Сравнение топологий. Непрерывные отображения топологических пространств. Гомеоморфные отображения. Способы задания топологий. Индуцированная топология и фактор-топология. Сходимость в топологических пространствах. Компактные топологические пространства и их свойства. Теорема Гейне – Бореля о структуре компактных множеств в R_n.

Раздел 2

Гладкость решения задачи Коши по начальным данным и парамет-рам, входящим в правые части системы уравнений. Продолжение реше-ния.

Общая теория линейных уравнений и систем (область существова-ния решения, фундаментальная матрица Коши, формула Лиувилля – Остроградского, метод вариации постоянных и др.).

Автономные системы уравнений. Положения равновесия. Предель-ные циклы.

Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости по-ложения равновесия по первому приближению.

Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи.

Задача Штурма – Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций.

Раздел 3

Функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана. Инте-грал по контуру. Теорема Коши. Формула Коши. Интеграл типа Коши и его свойства. Формулы Сохоцкого. Принцип максимума, теорема Лиувилля. Ряды аналитических функций, теоремы Вейерштрасса. Степенные ряды, теорема единственности. Ряд Тейлора и ряд Лорана. Поведение функции в окрестности особой точки, теорема Сохоцкого. Вычеты и их свойства. Геометрический смысл дифференцируемости функции комплексно- го переменного. Понятие конформного отображения. Свойства дробно-линейной функции (единственность, однолистность, круговое сохранение симметричных точек). Геометрические свойства элементарных функций. Лемма Шварца и теорема Римана. Принцип соответствия границ. Аналитическое продолжение по непрерывности. Принцип симметрии. Ветви и точ- ки ветвления. Общее понятия о римановых поверхностях.

Раздел 4

Связь ядер Коши и Шварца. Формула Гильберта. Регуляризующий множитель для задачи Гильберта. Задача Гильберта с разрывными коэф- фициентами в полуплоскости. Смешанная краевая задача. Задача Дирихле и ее видоизменения для плоскости со щелями. Задача Римана в односвяз- ной и многосвязной областях.

Раздел 5. Уравнения в частных производных

Постановка задач: на примерах малых поперечных колебаний струны и распространения тепла в изотропном твердом теле.

Классификация и приведение к каноническому виду уравнений вто- рого порядка.

Задача Коши для уравнения колебаний на плоскости: формулы Да- ламбера, единственность, устойчивость и физический смысл решения.

Задача Коши для уравнения колебания в пространстве : метод усреднения, формула Пуассона, физическая интерпретация, метод спуска.) , , , (zyxt

Метод Фурье для случаев: а) смешанная задача для уравнения коле- бания струны , прямоугольной и круглой мембраны, для уравнения тепло-проводности. Общая схема метода Фурье.

Метод последовательных приближений для линейного гиперболиче- ского уравнения в случае двух независимых переменных.

Эллиптические уравнения: на примере уравнения Лапласа для двух и трех независимых переменных (формула Грина, фундаментальное реше-

ние, интегральное представление, задачи Дирихле и Неймана, метод функции Грина, теория потенциала).
Линейные уравнения Вольтера и Фредгольма: решение в резольвен-тах, применение к задачам математической физики.

2. Учебно-методическое и информационное обеспечение программы вступительного экзамена в аспирантуру по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения

Раздел 1

1. Никольский С.М. Курс математического анализа, Т. 1, 2. – М.: Наука, 1983. – 464 с., 448 с.

2. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976. – 320 с.

Раздел 2

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 331 с.

2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1971. – 302 с.

Раздел 3

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

2. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. 2-е издание. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

Раздел 4

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. 3-е издание. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. 3-е из-дание. – М.: Наука, 1968. – 513 с.

Раздел 5

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 436 с.

2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

3. Крикунов Ю.М. Лекции по уравнениям математической физики. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. – 209 с.

Программа вступительного экзамена в аспирантуру составлена в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения.

Авторы: