Программа вступительных экзаменов в аспирантуру по направлению 01.06.01 математика и механика

специальность 01.01.01 — *вещественный, комплексный и функциональный анализ*

Раздел 1

Теоремы о существовании неявной функции. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Теорема о существовании интеграла Римана. Несобственные интегралы, признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру. Функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана. Интеграл по контуру. Теорема Коши. Формула Коши. Интеграл типа Коши и его свойства. Формулы Сохоцкого. Принцип максимума, теорема Лиувилля. Ряды аналитических функций, теоремы Вейерштрасса. Степенные ряды, теорема единственности. Ряд Тейлора и ряд Лорана. Поведение функции в окрестности особой точки, теорема Сохоцкого. Вычеты и их свойства.

Метрические пространства. Теорема о пополнении. Топологические пространства. Сравнение топологий. Непрерывные отображения топологических пространств. Гемеоморфные отображения. Способы задания топологий. Индуцированная топология и фактор-топология. Сходимость в топологических пространствах. Компактные топологические пространства и их свойства. Теорема Гейне – Бореля о структуре компактных множеств в Rn.

Раздел 2

Декартово произведение топологических пространств. Теорема Тихонова о декартовом произведении компактных пространств. Локально компактные пространства и их свойства. Компактные расширения локально компактных пространств. Связные пространства и их свойства.

Раздел 3

Мера Лебега и ее свойства. Борелевская алгебра на числовой прямой (числовой плоскости), измеримые функции. Измеримые по Борелю функции. Сходимость почти всюду. Теорема Егорова. Сходимость по мере и ее связь со сходимостью почти всюду, интеграл Лебега и его свойства. Предельный переход под знаком интеграла. Почленное интегрирование сходящихся рядов. Теорема Фату. Произведение мер. Теорема Фубини.

Заряды (обобщенные меры). Теорема Хана, Неопределенный интеграл Лебега. Теорема Радона – Никодима. Понятие σ-конечной меры. Определенный интеграл по σ-конечной мере.

Раздел 4

Теорема Бэра о категориях. Линейное нормированное пространство. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Банахово пространство линейных ограниченных операторов L(E,F). Сопряженное пространство. Теорема Банаха – Хана для полунорм. Принцип равномерной ограниченности. Понятие топологического линейного пространства. Слабая топология в линейном нормированом пространстве. Абстрактное гильбертово пространство. Теорема об ортогональном разложении. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала. 0ртонормированные системы. Ряды Фурье. Существование полных ортонормированных систем. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

Обратимые линейные операторы в банаховых пространствах. Теорема Банаха об обратном операторе. Вполне непрерывные операторы и их свойства. Сопряженный оператор. Замкнутый оператор. Регулярные точки и спектр линейного ограниченного оператора. Классификация точек спектра. Ограниченность, замкнутость, непустота спектра. Свойства спектра вполне непрерывного оператора. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Свойства спектра самосопряженных операторов. Существование ненулевых собственных значений у вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Принцип сжатых отображений и его применение к доказательству существования и единственности решения дифференциального уравнения и интегрального уравнения Фредгольма с малым параметром. Относительно компактные множества, критерий Хаусдорфа и Фреше. Теорема Арчела.

Раздел 5

Теория Рисса-Шаудера. Нормальная разрешимость оператора Фредгольма. Теорема Фредгольма. Интегральные уравнения Фредгольма в пространствах L2(a,b) и C(a,b). Случай вырожденного ядра.

Уравнение Фредгольма в абстрактном гильбертовом пространстве. Теория Гильберта – Шмидта. Приложение к интегральным уравнениям с симметрическим ядром. Нелинейный анализ. Непрерывность и дифференцируемость оператора. Производная Фреше и ее свойства. Необходимое условие экстремума функционала. Простейшие задачи вариационного исчисления и уравнение Эйлера-Лагранжа.

Раздел 6

Разложение единиц (проекторные меры). Операторные интегралы Стилтьеса. Спектральное разложение самосопряженных операторов. Интегральное представление группы унитарных операторов. Функции от самосопряженного оператора. Оператор дифференцирования.

Раздел 7

Полиномы наилучшего равномерного приближения. Теоремы Чебышева и Бореля. Полиномы Чебышева первого рода. Прямые теоремы конструктивной теории функций. Теоремы Джексона и их обобщения (периодический и непериодический случаи). Обратные теоремы конструктивной теории функций. Теоремы Бернштейна и Зигмунда.

Суммы Фурье, Фейера, Валле-Пуссена, Бернштейна – Рогозинского и их важнейшие свойства. Наилучшие приближения в нормированных пространствах. Положительные операторы и функционалы. Приложения в конструктивной теории функций. Алгебраическое и тригонометрическое интерполирование. Положительные и отрицательные результаты. Аппроксимация в среднем интерполяционными полиномами. Аппроксимация и интерполяция сплайнами. Теоремы типа Джексона. Экстремальные свойства сплайнов. Квадратурные формулы. Экстремальные задачи теории квадратур. Теорема Банаха – Штейнгауза и ее приложения к конструктивной теории функций.

Раздел 8

Геометрический смысл дифференцируемости функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения. Свойства дробно-линейной функции (единственность, однолистность, круговое сохранение симметричных точек). Геометрические свойства элементарных функций. Лемма Шварца и теорема Римана. Принцип соответствия границ. Аналитическое продолжение по непрерывности. Принцип симметрии. Ветви и точки ветвления. Общее понятия о римановых поверхностях.

Раздел 9

Связь ядер Коши и Шварца. Формула Гильберта. Регуляризующий множитель для задачи Гильберта. Задача Гильберта с разрывными коэффициентами в полуплоскости. Смешанная краевая задача. Задача Дирихле и ее видоизменения для плоскости со щелями. Задача Римана в односвязной и многосвязной областях. Постановка обратных краевых задач. Решение внутренней и внешней задачи. О числе решений внешней задачи. Особые точки контура. Однолистная разрешимость обратных краевых задач.

Примечание: в качестве вступительного экзамена предлагается сдать один из следующих вариантов (указаны разделы программы): 1-й вариант: разделы 1 – 5, 7, 2-й вариант: разделы 1, 3, 5, 6, 8, 3-й вариант: разделы 1, 3, 6, 9.

2. Учебно-методическое и информационное обеспечение программы вступительного экзамена в аспирантуру по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Физматлит, 2006. – 570 с.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. тт.1-2. – М.: Наука, 1990-1991. – 528 с., 544 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
4. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения полиномами. – М.:
5. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1979.—255с.
6. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1975. – 248 с.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
8. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
9. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 332 с.
10. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Харьков: Вища школа, 1978. – 288 с.
11. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
12. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. – М.-Л.: Гостехиздат, 1954. – 327 с.
13. Коровкин П.П. Линейные операторы и теория приближений. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
14. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
15. Бурбаки Н. Общая топология (основные структуры). – М.: Наука, 1968.—272 с.

Программа вступительного экзамена в аспирантуру составлена в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Математический анализ

1.Понятие числа. Рациональные, иррациональные и действительные числа. Точная верхняя и нижняя грань ограниченного числового множества. Предельные точки числового множества.

2.Числовые последовательности. Понятие предела числовой последовательности. Критерии и признаки сходимости числовой последовательности. Сравнение бесконечно малых последовательностей. Замечательные пределы.

3. Числовые ряды. Сходимость и абсолютная сходимость числовых рядов. Признаки сходимости числовых рядов: признак Даламбера, признак Коши, признак Абеля--Дирихле, признак Раабе, признак Гаусса. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда. Умножение рядов. Повторные ряды. Суммирование повторных рядов.

4.Понятие функции. Предел функции. Непрерывность функции. Основные теоремы о непрерывных функциях. Равномерно непрерывные функции.

5. Производная и дифференциал функции. Основные теоремы дифференциального исчисления. Экстремум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума. Высшие производные и дифференциалы.

6. Формула Тейлора. Различные формы остаточного члена: форма Пеано, форма Лагранжа, форма Шлемильха и Роша.

7. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара о радиусе сходимости степенного ряда. Теорема Абеля. Разложение элементарных функций в степенные ряды.

8. Интеграл Римана. Основные теоремы интегрального исчисления. Первообразная функции и ее неопределенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Техника неопределенного интегрирования. Несобственные интегралы. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Гамма-функция и бета-функция Эйлера. Формула Стирлинга.

9. Функциональные последовательности и ряды. Поточечная сходимость. Признаки равномерной сходимости. Дифференцирование и интегрирование равномерно сходящихся рядов.

10. Кривая, касательная и нормаль к кривой. Кривизна и кручение кривой. Криволинейные интегралы.

11. Кратные интегралы на плоскости и в пространстве. Вычисление кратных интегралов. Замена переменных в кратном интеграле.

12. Поверхность в трехмерном пространстве. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Нормальная кривизна поверхности. Главные кривизны к поверхности. Гауссова кривизна поверхности.

13. Поверхностные интегралы. Вычисление поверхностных интегралов.

14. Теорема Гаусса-Остроградского.

15. Теорема Стокса.

16. Несобственные кратные интегралы. Признаки сходимости.

17. Аппроксимации в функциональных пространствах. Ортогональные системы функций. Метод ортогонализации Шмидта. Полные системы. Понятие о рядах Фурье. Вычисление коэффициентов Фурье. Равенство Парсеваля-Стеклова. Неравенство Бесселя.

18. Сходимость ряда Фурье в точке и на множестве. Основные признаки сходимости ряда Фурье. Обобщенное суммирование рядов Фурье.

19. Порядок убывания коэффициентов Фурье и гладкость функции.
20 Интеграл Фурье. Интегральное преобразование Фурье и его обращение.
21. Понятие топологического пространства. Непрерывные отображения топологических пространств.
22. Понятие метрического пространства. Полные метрические пространства. Принцип Бэра–Хаусдорфа.
23. Мера Лебега. Измеримые функции и их свойства. Интеграл Лебега и его свойства. Сходимость по мере и почти всюду. Предельный переход под знаком интеграла.
24. Функции ограниченной вариации. Интеграл Стилтьеса.
25. Гильбертовы пространства. Ортогональные системы функций. Неравенство Бесселя. Сходимость рядов Фурье в гильбертовом пространстве. Равенство Парсеваля.
26. Нормированные пространства. Банаховы пространства. Три основных принципа линейного функционального анализа (теоремы Банаха об открытом отображении и обратном операторе, принцип равномерной ограниченности, теорема Хана-Банаха).
27. Ограниченные линейные функционалы и операторы, сопряженные пространства.
28. Самосопряженные, компактные операторы, проекторы.
29. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода. Теоремы Фредгольма.
29. Спектр и резольвента линейного оператора в нормированном пространстве.
30. Преобразование Фурье в пространствах L_1 и L_2. Теорема Планшереля.
32. Определение и примеры банаховых идеальных пространств (БИП) и примеры. Свойства (А),(Б) и (С) в БИП.
33. Двойственность. Интегральное представление функционалов. Критерий рефлексивности БИП. Пространства со смешанной нормой.
34. Пространства $L_p(T, \sum ,\mu)$ $(1 \leq p< \infty)$ [1, гл.6.2].
35. *Симметричные пространства (СП*). Равноизмеримые функции. Перестановка измеримой функции. Индексы растяжения функций. Вогнутые функции на полуоси
36. Определение и примеры СП: пространства Орлича, Лоренца, Марцинкевича. Основные свойства СП на отрезке и полуоси. Двойственность.
37. Теоремы вложения СП. Полугруппа операторов, ограниченных в пространствах L_1 и L^{∞}. Оператор Харди–Литтльвуда и его сопряженный.
38. Оператор растяжения и индексы Бойда.
39. Независимые функции. Система Радемахера и неравенство Хинчина.
40 Полные и минимальные системы в банаховом пространстве (БП). Базисы и их примеры. Критерий базисности.
41. Безусловные базисы в БП. Критерий безусловной базисности.
42. Функция Лебега функциональной системы. Функция Лебега для тригонометрической системы.

43. *Интерполяция операторов*. Интерполяционная теорема Рисса-Торина и ее приложения.

44. Операторы слабого типа. Интерполяционная теорема Марцинкевича.

45. Определения и основные свойства пространств *K*- и **J**– методов интерполяции и их эквивалентность. Вещественный метод интерполяции.

46. Теорема о реитерации для пространств вещественного метода интерполяции.

47. Двойственность пространств вещественного метода интерполяции.

48. Элементы г*армонического анализа*. Обобщенные функции или распределения на единичной окружности **T**.

49. Свертка обобщенных функций и ее свойства.

50. Общий вид операторов, инвариантных относительно сдвига. Собственные векторы и собственные числа операторов, инвариантных относительно сдвига.

51. Свертка и корреляционная функция на вещественной прямой **R**. Преобразование Фурье и свертка.

52. Формула суммирования Пуассона.

53. Преобразование Фурье обобщенных функций.

54. Вейвлеты (всплески) Хаара как простейший пример кратномасштабного анализа.

Литература

1. Садовничий В.А. Теория операторов. М.: ДРОФА, 2004.
2. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. – М.: МЦНМО, 2004.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981
4. Дьяченко М. И., Ульянов П. Л. Мера и интеграл. — М.: «Факториал Пресс», 2002.
5. Богачев В.И. Основы теории меры. –М. Ижевск. Ниу РХД.2003.
6. Келли Дж. Л. Общая топология. –М.: Наука, 1981.
7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ.--М.: Наука, 1984.
8. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978.
9. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces II, Berlin, Springer–Verlag, 1979.
10. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. – М.: Физматгиз, 1958.
11. Кашин Б.С., Саанян А.А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1999.
12. Lindenstrauss J., Tzafoiri L. Classical Banach Spaces 1, - Berlin, Springer–Verlag, 1978.
13. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные простраства. Введение. –М.: Мир, 1980.
14. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980.
15. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. М.: Мир, 1985.